Rachunek Prawdopodobieństwa 1R semestr letni 2024/2025
przykładowy Egzamin

imię i nazwisko: ______________________________

Egzamin składa się z 2 stron oraz 6 zadań. Dwie ostatnie strony stanowią brudnopis. Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 180 minut. Zacznij od spokojnego (!) przeczytania treści wszystkich zadań. Zacznij od zadania, które Twoim zdaniem jest najłatwiejsze. Powodzenia.

zadanie	1	2	3	4	5	6	Σ
punkty	10	10	10	10	10	10	60
wynik							

1. (10 p.) Niech $n \in \mathbb{N}$. W pierwszym kroku losujemy liczbę X ze zbioru $\{1, 2, \dots n\}$ z rozkładem
$$\mathbb{P}[X = j] = p_j$$
dla pewnych $p_1, \dots, p_n \in (0, 1)$. Jeżeli $X = k$, to w drugim kroku losujemy liczbę Y jednostajnie z odcinka $[0, k]$. Pokaż, że
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] \cdot \mathbb{E}\left[X | Y \in [0, 1]\right] = 1.$$

2. (10 p.) Niech X_n ma rozkład normalny ze średnią n i wariancją jeden. Pokaż, że $X_n/n \to 1$ p.n.

3. (10 p.) Niech $\vec{X} = (X, Y)$ będzie wektorem losowym z rozkładem o gęstości
$$f_{\vec{X}}(x, y) = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y).$$
Znajdź rozkład zmiennej lozowej $Z = \min(X - Y, 1)$.

4. (10 p.) Niech $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że X_n ma rozkład $\mathcal{N}(n^{-2}, 1/n)$. Znajdź granicę według rozkładu
$$S_n = \frac{1}{\sqrt{\log(n)}} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

5. (10 p.) Niech $\vec{X} = (X, Y)$ będzie wektorem losowym z rozkładem o gęstości
$$f_{\vec{X}}(x, y) = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y).$$
Znajdź rozkład zmiennej X pod warunkiem $X - Y \geq 1$.

6. (10 p.) Pokaż, że istnieje przestrzeń probabilistyczna i określone na niej zmienne losowe X i Y takie, że X ma rozkład $\mathrm{Exp}(1)$, Y ma rozkład $\mathcal{U}[0, 1]$ i $X \geq Y$.