Uniwersytet Wrocławski, Instytut Matematyczny
Kolokwium nr 1

imię i nazwisko: ______________________________

Kolokwium składa się z 11 stron oraz 4 zadań. Na drugiej stronie znajduje się spis ważniejszych rozkładów. Dwie ostatnie strony stanowią brudnopis. Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 100 minut. Zacznij od spokojnego (!) przeczytania treści wszystkich zadań i zacznij od najłatwiejszego. Powodzenia!

zadanie	1	2	3	4	Σ
punkty	10	10	10	10	40
wynik					

1. Załóżmy, że mamy $n+1$ ponumerowanych urn. W k-tej urnie znajduje się k kul białych oraz $n-k$ kul czarnych ($k = 0, 1, \ldots, n$). Losujemy urnę (z jednakowym prawdopodobieństwem), a następnie z tej urny kolejno, bez zwracania, 2 kule. Niech B_1 oznacza zdarzenie losowe polegające na wyciągnięciu białej kuli w pierwszym losowaniu, B_2 – zdarzenie polegające na wyciągnięciu białej kuli w drugim losowaniu, zaś A_k zdarzenie polegające na wylosowaniu urny o numerze k.

   (a) (3 p.) Wykaż, że $\mathbb{P}[B_1] = \frac{1}{2}$. Wskazówka: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

   Rozwiązanie: Pierwszy etap doświadczenia polega na wylosowaniu urny. Urny są jednakowo prawdopodobne, więc $\mathbb{P}[A_k] = \frac{1}{n+1}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Następnie $\mathbb{P}[B_1|A_k] = \frac{k}{n}$. Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, otrzymujemy

   $$\mathbb{P}[B_1] = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[B_1|A_k]\mathbb{P}[A_k] = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}.$$

   (b) (2 p.) Wyznacz $\mathbb{P}[A_k|B_1]$.

   Rozwiązanie: Mamy

   $$\mathbb{P}[A_k|B_1] = \frac{\mathbb{P}[A_k \cap B_1]}{\mathbb{P}[B_1]} = \frac{\mathbb{P}[B_1|A_k]\mathbb{P}[A_k]}{\mathbb{P}[B_1]} = \frac{2k}{n(n+1)}$$

   (c) (5 p.) Wyznacz $\mathbb{P}[B_2|B_1]$. Wskazówka: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   Rozwiązanie: Mamy $\mathbf{P}[(B_1 \cap B_2)|A_k] = \frac{k}{n}\frac{k-1}{n-1}$ oraz

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}[B_1 \cap B_2] &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[(B_1 \cap B_2)|A_k]\mathbb{P}[A_k] = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\frac{k-1}{n-1}\frac{1}{n+1} \\
   &= \frac{1}{n(n-1)(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k\right) \\
   &= \frac{1}{n(n-1)(n+1)}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
   &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{2n+1-3}{6}\right) = \frac{1}{3}.
   \end{aligned}$$

   Ostatecznie $\mathbb{P}[B_2|B_1] = \frac{\mathbb{P}[B_2 \cap B_1]}{\mathbb{P}[B_1]} = \frac{2}{3}$.

2. Z przedziału $[-1,1]$ wybrano losowo punkty A i B. Niech funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem
$$f(x) = (A+1)x^2 + 2Bx + 1.$$

(a) (2 p.) Określ zbiór zdarzeń elementarnych i σ-ciało jego podzbiorów. Dobierz odpowiednie prawdopodobieństwo.

> **Rozwiązanie:** Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest zbiór $\Omega = [-1,1]^2$, zatem $\mathcal{F} = \mathcal{B}or(\Omega)$, $\mathbb{P}[A] = \frac{1}{4}\lambda_2(a)$.

(b) (3 p.) Oblicz prawdopodobieństwo, że $f(x) > A$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wskazówka: napisz warunek na wyróżnik pewnego trójmianu kwadratowego.

> **Rozwiązanie:** Niech $A = \{(a,b) \in \Omega : \forall_{x\in\mathbb{R}} f(x) > a\}$. Wówczas $f(x) > a$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, jeżeli $a+1 > 0$ oraz wyróżnik trójmianu $(a+1)x^2 + 2bx + 1 - a$ jest ujemny, zatem
> $$\begin{aligned} A &= \{(a,b) \in \Omega : a > -1 \ \wedge \ 4b^2 - 4(a+1)(1-a) < 0\} \\ &= \{(a,b) \in \Omega : a > -1 \ \wedge \ a^2 + b^2 < 1\}. \end{aligned}$$
> Zbiór A jest więc wnętrzem koła jednostkowego, stąd $|A| = \pi$. Ostatecznie $\mathbb{P}(A) = \frac{\pi}{4}$.

(c) (2 p.) Niech zmienna losowa I będzie dana przez $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Oblicz $\mathbb{E}[I]$.

> **Rozwiązanie:** Zauważmy, że $\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[B] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t = 0$, więc
> $$\mathbb{E}\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right] = \mathbb{E}\left[\frac{A}{3} + \frac{1}{3} + B + 1\right] = \frac{4}{3}.$$

(d) (3 p.) Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że suma rozwiązań równania $f(x) = 0$ jest dodatnia, pod warunkiem, że równanie to ma dwa różne rozwiązania. Wskazówka: zastosuj wzory Viète'a.

> **Rozwiązanie:** Niech
> $$B = \{(a,b) \in \Omega : \exists_{x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}} f(x_1) = f(x_2) = 0\}$$
> oraz
> $$C = \{(a,b) \in \Omega : \exists_{x_1,x_2\in\mathbb{R}} (f(x_1) = f(x_2) = 0 \ \wedge \ x_1 + x_2 > 0)\}.$$
> Należy wyznaczyć $\mathbb{P}[C|B] = \frac{\mathbb{P}[C\cap B]}{\mathbb{P}[B]}$. Równanie $f(x) = 0$ ma dwa różne rozwiązania, jeśli wyróżnik trójmianu $(a+1)x^2 + 2bx + 1$ jest dodatni, a więc
> $$B = \{(a,b) \in \Omega : 4b^2 - 4(a+1) > 0\} = \{(a,b) \in \Omega : a < b^2 - 1\}.$$

Natomiast ze wzorów Viète'a, suma rozwiązań jest dodatnia, jeżeli $-\frac{2b}{a+1} > 0$, tak więc $C = \{(a,b) \in \Omega : b < 0\}$. Zdarzeniu $C \cap B$ odpowiada zatem połowa zbioru B, stąd $|C \cap B| = \frac{1}{2}|B|$ i ostatecznie $\mathbb{P}[C|B] = \frac{\mathbb{P}[C \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{1}{2}$.

3. Niech F będzie ciągłą, ściśle rosnącą dystrybuantą na $\mathbb{R}$. Przez Φ oznaczmy dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0,1)$.

   (a) (3 p.) Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0,1]$. Udowodnij, że $Z = F^{-1}(X)$ ma rozkład o dystrybuancie F. Wskazówka: znajdź dystrybuantę F_Z.

Rozwiązanie: Mamy

$$\mathbb{P}[Z \le t] = \mathbb{P}[X \le F(t)] = F(t),$$

bo $\mathbb{P}[X \le s] = s$ dla $s \in [0,1]$.

   (b) (3 p.) Niech Y będzie zmienną losową o ciągłej, ściśle rosnącej dystrybuancie F_Y. Pokaż, że zmienna losowa $S = F_Y(Y)$ ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[0,1]$. Wskazówka: znajdź dystrybuantę F_S.

Rozwiązanie:

$$\mathbb{P}[S \le t] = \mathbb{P}[Y \le F_Y^{-1}(t)] = F_Y\left(F_Y^{-1}(t)\right) = t.$$

   (c) (4 p.) Oblicz $\int_0^1 \Phi^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$ oraz $\int_{\mathbb{R}} \Phi(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$. Wskazówka: wyraź szukane całki jako wartości oczekiwane pewnych zmiennych losowych i skorzystaj z wiedzy z ćwiczeń.

Rozwiązanie: Mamy

$$\int_0^1 \Phi^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \mathbb{E}\left[\Phi^{-1}(U)\right],$$

gdzie U ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[0,1]$, z podpunktu (a) zmienna $\Phi^{-1}(U)$ ma standardowy rozkład normalny, więc

$$\int_0^1 \Phi^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \mathbb{E}\left[\Phi^{-1}(U)\right] = 0.$$

Podobnie

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\mathbb{E}[\Phi(N)],$$

gdzie N ma standardowy rozkład normalny, więc zmienna $\Phi(N)$ ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[0,1]$, zatem

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\mathbb{E}[\Phi(N)] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

4. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$.

   (a) (5 p.) Wykaż, że $Y = \sqrt{X}$ ma rozkład o gęstości $f_Y(t) = 2\lambda t e^{-\lambda t^2} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(t)$.

   Rozwiązanie: Mamy $\mathbb{P}[X > t] = e^{-\lambda t}$ i stąd

   $$\mathbb{P}[Y > t] = \mathbb{P}[X > t^2] = e^{-\lambda t^2}.$$

   Ostatecznie $F_Y(t) = \mathbb{P}[Y \le t] = 1 - e^{-\lambda t^2}$ oraz $f_Y(t) = 2\lambda t e^{-\lambda t^2}$ dla $t \ge 0$.

   (b) (5 p.) Oblicz $\mathbb{P}\left[Y^2 - 7Y + 12 > 0\right]$.

   Rozwiązanie: Mamy

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[Y^2 - 7Y + 12 > 0\right] &= \mathbb{P}[Y \notin [3,4]] = 1 - \mathbb{P}[Y \in [3,4]] \\ &= 1 - (F_Y(4) - F_Y(3)) = 1 + e^{-16\lambda} - e^{-9\lambda}. \end{aligned}$$