Uniwersytet Wrocławski, Instytut Matematyczny
Kolokwium nr 1

imię i nazwisko: ______________________________

Kolokwium składa się z 10 stron oraz 4 zadań. Na drugiej stronie znajduje się spis ważniejszych rozkładów. Dwie ostatnie strony stanowią brudnopis. Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 100 minut. Zacznij od spokojnego (!) przeczytania treści wszystkich zadań i zacznij od najłatwiejszego. Powodzenia!

| zadanie | 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| punkty | 10 | 10 | 10 | 10 | 40 |
| wynik | | | | | |

1. Załóżmy, że mamy $n+1$ ponumerowanych urn. W $k$-tej urnie znajduje się $k$ kul białych oraz $n-k$ kul czarnych ($k = 0, 1, \ldots, n$). Losujemy urnę (z jednakowym prawdopodobieństwem), a następnie z tej urny kolejno, bez zwracania, 2 kule. Niech $B_1$ oznacza zdarzenie losowe polegające na wyciągnięciu białej kuli w pierwszym losowaniu, $B_2$ – zdarzenie polegające na wyciągnięciu białej kuli w drugim losowaniu, zaś $A_k$ zdarzenie polegające na wylosowaniu urny o numerze $k$.
   (a) (3 p.) Wykaż, że $\mathbb{P}[B_1] = \frac{1}{2}$. Wskazówka: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
   (b) (2 p.) Wyznacz $\mathbb{P}[A_k | B_1]$.
   (c) (5 p.) Wyznacz $\mathbb{P}[B_2 | B_1]$. Wskazówka: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Z przedziału $[-1, 1]$ wybrano losowo punkty $A$ i $B$. Niech funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem

$$f(x) = (A+1)x^2 + 2Bx + 1.$$

   (a) (2 p.) Określ zbiór zdarzeń elementarnych i $\sigma$-ciało jego podzbiorów. Dobierz odpowiednie prawdopodobieństwo.

   (b) (3 p.) Oblicz prawdopodobieństwo, że $f(x) > A$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wskazówka: napisz warunek na wyróżnik pewnego trójmianu kwadratowego.

   (c) (2 p.) Niech zmienna losowa $I$ będzie dana przez $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Oblicz $\mathbb{E}[I]$.

   (d) (3 p.) Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że suma rozwiązań równania $f(x) = 0$ jest dodatnia, pod warunkiem, że równanie to ma dwa różne rozwiązania. Wskazówka: zastosuj wzory Viète'a.

3. Niech $F$ będzie ciągłą, ściśle rosnącą dystrybuantą na $\mathbb{R}$. Przez $\Phi$ oznaczmy dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego $\mathcal{N}(0,1)$.

   (a) (3 p.) Niech $X$ będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0,1]$. Udowodnij, że $Z = F^{-1}(X)$ ma rozkład o dystrybuancie $F$. Wskazówka: znajdź dystrybuantę $F_Z$.

   (b) (3 p.) Niech $Y$ będzie zmienną losową o ciągłej, ściśle rosnącej dystrybuancie $F_Y$. Pokaż, że zmienna losowa $S = F_Y(Y)$ ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[0,1]$. Wskazówka: znajdź dystrybuantę $F_S$.

   (c) (4 p.) Oblicz $\int_0^1 \Phi^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$ oraz $\int_{\mathbb{R}} \Phi(x) e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$. Wskazówka: wyraź szukane całki jako wartości oczekiwane pewnych zmiennych losowych i skorzystaj z wiedzy z ćwiczeń.

4. Zmienna losowa $X$ ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$.
   (a) (5 p.) Wykaż, że $Y = \sqrt{X}$ ma rozkład o gęstości $f_Y(t) = 2\lambda t e^{-\lambda t^2} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(t)$.
   (b) (5 p.) Oblicz $\mathbb{P}\left[Y^2 - 7Y + 12 > 0\right]$.