Lista 8: wketory losowe

Zadania na ćwiczenia: 2025-04-14

Lista zadań w formacie PDF

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Niech $\vec{X} = (X_1, X_2)$ będzie dwuwymiarowym wektorem losowym o standardowym rozkładzie normalnym. Znajdź rozkłady brzegowe.

Odpowiedź

Oba rozkłady brzegowe to standardowe rozkłady normalne.

2. Niech $\vec{X} = (X, Y)$ będzie dwuwymiarowym wektorem losowym o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} 4x^2y + 2y^5 & 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

   a. Sprawdź, że f jest rzeczywiście gęstością.
   b. Oblicz $\mathbb{P}[1/2 \leq X \leq 3/4, 1/4 \leq Y \leq 1/2]$.
   c. Znajdź rozkłady brzegowe X i Y. Czy są one absolutnie ciągłe? Jeżeli tak, to oblicz ich gęstości.

Odpowiedź

(a) $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) = 1$
(b) $\frac{595}{16384}$
(c) $F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{2t^3+t}{3} & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$ $f_X(t) = (2t^2 + 1/3)\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{2t^2+t^6}{3} & t \in [0,1] \\ 1 & t > 1 \end{cases}$ $f_Y(t) = (4/3t + 2t^5)\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$

3. Niech (X, Y) będzie dwuwymiarowym wektorem losowym o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} Cye^{-xy} & 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

   a. Oblicz wartość stałej C.
   b. Oblicz $\mathbb{P}[1/2 \leq X \leq 3/4, 1/4 \leq Y \leq 1/2]$.
   c. Znajdź rozkłady brzegowe X i Y. Czy są one absolutnie ciągłe? Jeżeli tak, to oblicz ich gęstości.

Odpowiedź

(a) $C = e$
(b) $e(2(e^{-3/8} - e^{-1/4}) + 4(e^{-3/16} - e^{-1/8}))$
(c) $F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e(1 + e^{-t}/t - 1/t) & t \in [0,1] \\ 1 & t > 1 \end{cases}$ $f_X(t) = e(e^{-t}/t - e^{-t}/t^2 + 1/t^2)$ $F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e((e^{-t} - 1) + t) & t \in [0,1] \\ 1 & t > 1 \end{cases}$ $f_Y(t) = e(-e^{-t} + 1)$

4. Udowodnij, że wektor losowy $\vec{X} = (X_1, X_2)$ ma rozkład duskretny wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne losowe X_1 i X_2 mają rozkłady dyskretne.

Odpowiedź

Załóżmy, że $\vec{X}$ ma rozkład dyskretny. Wówczas zbiór istnieje przeliczalny zbiór $S \subseteq \mathbb{R}^2$ taki, że

$$\mathbb{P}\left[\vec{X} \in S\right] = 1.$$

Pokażemy jedynie, że X_1 ma rozkład dyskretny. Dyskretność rozkładu X_2 będzie wynikała z analogicznego argumentu. Rozważmy S_1 będący rzutem S na pierwszą oś, tj.

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \exists y \in \mathbb{R},\ (x, y) \in S\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Wówczas $|S_1| \leq |S|$. W szczególności S_1 jest zbiorem przeliczalnym. Mamy

$$\left\{\vec{X} \in S\right\} \subseteq \{X_1 \in S_1\}.$$

Rzeczywiście, niech $\omega \in \{\vec{X} \in S\}$. Wówczas $\vec{X}(\omega) \in S$. Mamy $\vec{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega))$. Innymi słowy dla $y = X_2(\omega)$ mamy $(X_1(\omega), y) \in S$. Oznacza to, że $X_1(\omega) \in S_1$, czyli $\omega \in \{X_1 \in S\}$. To dowodzi postulowanej inkluzji. Z mnotoniczności prawdopodobieństwa

$$1 = \mathbb{P}\left[\vec{X} \in S\right] \leq \mathbb{P}[X_1 \in S_1].$$

Co kończy dowód jednej implikacji. Załóżmy teraz, że rozkłady X_1 i X_2 są dyskretne. Istnieją zatem przeliczalne S_1, $S_2 \subseteq \mathbb{R}$ takie, że

$$\mathbb{P}\left[X_1 \in S_1\right] = \mathbb{P}[X_2 \in S_2] = 1.$$

Rozważmy zbiór $S = S_1 \times S_2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Wówczas S jest zbiorem przeliczalnym. Mamy

$$\left\{\vec{X} \in S\right\} = \{(X_1, X_2) \in S_1 \times S_2\} = \bigcup_{x \in S_1} \{X_1 = x,\ X_2 \in S_2\}.$$

Skoro powyższa suma jest przeliczalna a zbiory rozłaczne

$$\mathbb{P}\left[\vec{X} \in S\right] = \sum_{x \in S_1} \mathbb{P}[X_1 = x,\ X_2 \in S_2].$$

Zauważmy, że $\mathbb{P}[X_1 = x,\ X_2 \in S_2] = \mathbb{P}[X_1 = x]$, ponieważ

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{P}[X_1 = x] - \mathbb{P}[X_1 = x,\ X_2 \in S_2] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = x,\ X_2 \notin S_2] \leq \mathbb{P}[X_2 \notin S_2] = 0. \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\mathbb{P}\left[\vec{X} \in S\right] = \sum_{x \in S_1} \mathbb{P}[X_1 = x] = \mathbb{P}[X_1 \in S_1] = 1.$$

Zadania na ćwiczenia

5. Niech (X, Y) będzie dwuwymiarowym wektorem losowym o rozkładzie zadanym gęstością

   $$f(x, y) = C(x + y)$$

   dla $0 \leq y \leq x \leq 1$, i $f(x, y) = 0$ poza tym zbiorem. Znajdź wartość C. Znajdź rozkłady brzegowe.

6. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

   $$g(x, y) = C \cdot xy \cdot \mathbf{1}_{[0,1]^2}(x, y)$$

   a. Wyznaczyć C.
   b. Obliczyć $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$.
   c. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X/Y.

7. Rzucamy trzy razy kostką. Niech X_1 będzie liczbą wyrzuconych jedynek. Niech X_2 będzie liczbą wyrzuconych dwójek.

   a. Znajdź rozkład wektora losowego $\vec{X} = (X_1, X_2)$.

b. Znajdź $\mathbb{P}[X_1 = 1,\ X_2 = 2 \mid X_1 + X_2 = 3]$.

8. Losujemy liczbę ω z odcinka $[0, 2\pi]$ w sposób jednostajny. Niech $X_1(\omega) = \cos(\omega),\ X_2(\omega) = \sin(\omega)$.

   a. Znajdź rozkład zmiennej X_1.
   b. Niech $\vec{X} = (X_1, X_2)$. Znajdź $\mathbb{P}\left[\vec{X} \in [1/\sqrt{2}, 1] \times [-2, 3]\right]$.

9. Losujemy punkt. znajdz dystrybuante dwiwymiarowa i gestosc Losujemy punkt z trójkąta równobocznego ABC. niech X_1 będzie odległością wylosowanego punktu od boku AB, a X_2 odległością wylosowanego punktu od boku CB.

   a. Znajdź $\mathbb{P}[X_1 \leq t]$ dla $t \in [0.\sqrt{3}/2]$.
   b. Znajdź $\mathbb{P}[X_2 \leq s \mid X_1 \leq t]$ dla $s, t \in [0, \sqrt{3}/2]$.
   c. Znajdź dystrybuantę wektora losowego $\vec{X} = (X_1, X_2)$.

10. Załóżmy, że wektor losowy $\vec{X} = (X_1, X_2)$ ma dwuwymiarowy standardowy rozkład normalny. Rozważmy zmienne losowe $Y_1 = ax_1 + bX_2$ oraz $Y_2 = -X_1/a + X_2/b$ dla $a, b > 0$.

    a. Znajdź rozkład wektora losowego $\vec{Y} = (Y_1, Y_2)$.
    b. Znajdź rozkład zmiennej losowej Y_1.

11. Niech $X = (X_1, X_2)$ będzie wektorem z dwuwymiarowym rozkładem normalnym o parametrach $\vec{m} = (0, 0)$ oraz
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

    a. Pokaż, że Σ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho \in (-1, 1)$.
    b. Niech $f_{\vec{X}}$ będzie gęstością $\vec{X}$. Wyznacz poziomice $f_{\vec{X}}$,
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ f_{\vec{X}}(x, y) = c\right\}, \qquad c > 0$$
    w zależności od parametru $\rho \in (-1, 1)$.

12. Niech $\vec{X} = (X_1, X_2)$ będzie wektorem losowym o dwuwymiarowym standardowym rozkładzie normalnym. Rozważamy wektor $\vec{X}$ we współrzędnych biegunowych. Niech $R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ i niech $S = \arccos(X_1/R)$. Znajdź rozkład wektora losowego (R, S).

Zadania dodatkowe

13. Wektor losowy $\vec{U} = (X, Y, Z)$ ma następującą własność: jeżeli
$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
to zmienna losowa
$$aX + bY + cZ$$
ma rozkład jednostajny na $[-1, 1]$. Jaki rozkład ma wektor $\vec{U}$?