Lista 7: Powtórka przed kolokwium

Lista zadań w formacie PDF

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Wybieramy losowo liczbę naturalną z przedziału $[1, 1000]$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrana liczba jest podzielna przez co najmniej jedną z liczb: 4, 6, 9.
2. Co jest bardziej prawdopodobne: otrzymanie co najmniej jednej jedynki przy rzucie 4 kostek, czy co najmniej raz dwóch jedynek na obu kostkach przy 24 rzutach obu kostek
3. Znaleźć prawdopodobieństwo, że przy wielokrotnym rzucaniu parą kostek sześciennych suma oczek 8 wypadnie przed sumą oczek 7.
4. Każda z n pałek została złamana na dwie części - długą i krótką. $2n$ części połączono w n par, z których utworzono nowe pałki. Znaleźć prawdopodobieństwo, że
   a. części zostaną połączone w takich samych kombinacjach jak przed złamaniem;
   b. wszystkie długie części zostaną połączone z krótkimi.
5. Niech $n \in \mathbb{N}$. Losujemy jednostajnie podzbiór $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Skonstruuj odpowiednią przestrzeń probabilistyczną. Dla $k \in [n]$ niech A_k będzie zdarzeniem, że wylosowany zbiór zawiera k. Pokaż, że zdarzenia $\{A_k\}_{k\in[n]}$ są niezależne.
6. Niech $n \in \mathbb{N}$. Losujemy jednostajnie podzbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$. Niech X będzie liczebnością wylosowanego zbioru. Znajdź rozkład X.
7. Zdarzenia A i B są niezależne oraz $A \cup B = \Omega$. Wykazać, że $\mathbb{P}(A) = 1$ lub $\mathbb{P}(B) = 1$.
8. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Dla zdarzeń $\{A_k\}_{k\in[n]}$ i $\{\epsilon_k\}_{k\in[n]} \in \{0, 1\}^n$ niech
$$A_k^{\epsilon_k} = \begin{cases} A_k, & \epsilon_k = 1 \\ A_k^c, & \epsilon_k = 0 \end{cases} .$$
   Pokaż, że $\{A_k\}_{k\in[n]}$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\{\epsilon_k\}_{k\in[n]} \in \{0, 1\}^n$,
$$\mathbb{P}\left[A_1^{\epsilon_1} \cap A_2^{\epsilon_2} \cap \ldots \cap A_n^{\epsilon_n}\right] = \mathbb{P}\left[A_1^{\epsilon_1}\right] \mathbb{P}\left[A_2^{\epsilon_2}\right] \cdots \mathbb{P}\left[A_n^{\epsilon_n}\right].$$
9. Niech Ω będzie zbiorem wszystkich grafów prostych na wierzchołkach $\{1, 2, \ldots, n\}$. Rozważmy $\mathcal{F} = 2^\Omega$ oraz $\mathbb{P}[A] = |A|/|\Omega|$. Dla każdej pary $i < j$ niech $A_{i,j}$ będzie zdarzeniem, że wylosowany graf zawiera krawędź $\{i, j\}$. Pokaż, że $(A_{i,j})_{i<j}$ są niezależne.
10. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną z poprzedniego zadania. Niech X będzie liczbą trójkątów w wylosowanym grafie, tj. liczbą trójek $i < j < k$ takich, że wylosowany graf zawiera krawędzie $\{i, j\}$, $\{j, k\}$ oraz $\{k, i\}$. Znajdź $\mathbb{E}[X]$.
11. Niech
$$\Omega = \{\omega = (\omega_j)_{j\in[n]} \in \mathbb{N}^n \ : \ |\omega_1| = |\omega_j - \omega_{j-1}| = 1\}$$
   Niech $\mathcal{F} = 2^\Omega$ i $\mathbb{P}[A] = |A|/|\Omega|$. Niech $A_1 = \{\omega_1 = 1\}$. Dla $k \in [n]$, $k \geq 2$ połóżmy $A_k = \{\omega_k - \omega_{k-1} = 1\}$. Pokaż, że $\{A_k\}_{k\in[n]}$ są niezależne.
12. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną z poprzedniego zadania. Rozważmy $X(\omega) = \omega_n$. Znajdź rozkład X.
13. Na odcinku $[0, 1]$ umieszczono losowo punkty A_1 , A_2 i A_3 . Obliczyć prawdopodobieństwo, że $A_1 \leq A_2 \leq A_3$.
14. Niech Q będzie wielomianem rzeczywistym stopnia $2n$ o losowych współczynnikach. Każdy współczynnik jest losowany niezależnie i może wynieść 1 z prawdopodobienstawem p oraz -1 z prawdopodobieństwem $1 - p$. Znaleźć:

a. $\mathbb{P}[Q(2) > 0]$;
b. $\mathbb{P}[Q(1) > 0]$;
c. $\mathbb{P}[Q(2) > 0 | Q(1) > 0]$.

15. Przypomnijmy, że

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Rozważmy $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ oraz $\mathbb{P}[\{n\}] = 6n^{-2}\pi^{-2}$. Niech $\mathcal{P}$ oznacza zbiór liczb pierwszych. Pokaż, że $\{p\mathbb{N}\}_{p\in\mathcal{P}}$ są niezależne. Wywnioskuj, że

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}.$$

16. Rodzina $\mathcal{R}_1$ składa się z jednego zdarzenia $A = \{1, 2\}$ zaś rodzina $\mathcal{R}_2$ z dwóch zdarzeń $B = \{1, 3\}$ i $C = \{2, 3\}$. Wiemy, że $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ i że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Czy σ-algebry $\sigma(\mathcal{R}_1)$ i $\sigma(\mathcal{R}_2)$ są niezależne?

17. Czy funkcja

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \le 0, \\ 1, & \text{dla } x \ge 1, \\ x^2, & \text{dla } 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ x, & \text{dla } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

jest dystrybuantą? Naszkicuj wykres funkcji G i wyznacz jej uogólnioną funkcję odwrotną. Znajdź przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz zmienną losową Y, dla której funkcja G jest dystrybuantą. Znajdź $\mathbb{E}[e^Y]$.

18. Niech X będzie zmienną losową o gęstości $\alpha x^{\alpha-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Niech $\varphi(s) = \max\{\frac{1}{4}, s - s^2\}$. Oblicz $\mathbb{E}\varphi(X)$.

19. Niech F będzie dystrybuantą na $\mathbb{R}$. Pokaż, że dla dowolnego $a \ge 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} F(x + a) - F(x) \mathrm{d}x = a.$$

20. Z urny, w której jest 6 kul czarnych i 4 białe losujemy kolejno bez zwracania po jednej kuli tak długo, aż wylosujemy kulę czarną. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wylosowanych kul białych.

21. Rzucamy sześcienną kostką aż do momentu, gdy wypadną pod rząd dwie „szóstki”. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

22. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą niezależnymi zdarzeniami o jednakowym prawdopodobieństwie p_n. Przy pomocy *nierówności Boole'a* oraz *nierówności Bonferroniego* oszacować (z góry i z dołu)

$$\mathbf{P}_n = \frac{\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^n A_i]}{np_n}.$$

Jak sprawdza się to szacowanie dla $p_n = 1/n$? Wyznaczyć $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n$ w przypadku, gdy $\lim_{n\to\infty} np_n = 0$.]