Lista 6: Wartość oczekiwana

Zadania na ćwiczenia: 2025-03-31

Lista zadań w formacie PDF

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. W urnie jest $b \geq 1$ kul białych i $c \geq 1$ czarnych. Obliczyć $\mathbb{E}[X]$, jeśli X jest liczbą wylosowanych kul białych podczas losowania bez zwracania n kul ($n \leq b + c$);

Odpowiedź

$bn/(b+c)$

2. Zmienna losowa ma rozkład o gęstości $g(x) = 5x^4 \mathbb{I}_{[0,1]}(x)$. Obliczyć

   a. $\mathbb{E}[X]$
   b. $\mathbb{E}[1/(1 + X^5)]$.

Odpowiedź

a. 5/6 b. log(2)

3. Oblicz $\mathbb{E}[X]$ jeżeli X jest zmienną o rozkładzie:

   a. Poiss(λ),
   b. Exp(λ),
   c. Geom(p).
   d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Odpowiedź

a. λ b. $1/\lambda$, c. $1/p$, d. μ

4. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $U[0, 1]$. Obliczyć $\mathbb{E}[Y]$ jeżeli

   a. $Y = e^X$,
   b. $Y = \cos^2(\pi X)$.

Odpowiedź

a. $e - 1$ b. $1/2$

5. Niech F będzie dystrybuantą zmiennej losowej X, a f jej gęstością. Wyznaczyć dystrybuanty i gęstości zmiennych losowych:

   a. $aX + b$ dla $a > 0$;
   b. $|X|$;
   c. X^2;
   d. e^X;

W terminach F i f. Odpowiedź

$$
\begin{aligned}
&a.F((t-b)/a) & f((x-b)/a)/a \\
&b.F(t) - 0F(-t) & f(x) - f(-x) \\
&c.F(\sqrt{t}) - F(-\sqrt{t}) & (f(\sqrt{x}) + f(\sqrt{x}))/(2\sqrt{x}) \\
&d.F(\log(t)) & f(\log(x))/x1_{y>0}
\end{aligned}
$$

Zadania na ćwiczenia

1. Monika wybrała się do kasyna w Las Vegas mając przy sobie 255\$. Jako cel postawiła sobie wygranie 1 dolara w ruletkę i wyjście z kasyna z kwotą 256\$. Podczas tej wizyty obstawiała kolory. Wszystkie pola poza 0 i 00 są czerwone lub czarne (po 18 pól). Poprawne wskazanie koloru (z prawdopodobieństwem 18/38) podwaja zaryzykowaną kwotę. Monika zastosowała następującą strategię: postanowiła, że będzie grać kolejno o 1\$, 2\$, 4\$, 8\$, 16\$, 32\$, 64\$, 128\$. Jeżeli w jednej z gier wygra, zabiera nagrodę i opuszcza kasyno z 256 dolarami. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jej się powiodło. Obliczyć wartość oczekiwaną wygranej.

2. Losujemy cięciwę w okręgu o promieniu jeden poprzez wylosowanie jej środka. Niech X_2 będzie długością wylosowanej cięciwy. Wyznacz rozkład X_2. Czy rozkład ten jest absolutnie ciągły? Wyznacz gęstość. Znajdź $\mathbb{E}[X_2]$.

3. Każdy bok i każda przekątna $2n$-kąta foremnego malujemy losowo na jeden z trzech kolorów. Wybór każdego koloru jest jednakowo prawdopodobny, a kolorowania różnych odcinków są niezależne. Niech X oznacza liczbę jednobarwnych trójkątów prostokątnych o wierzchołkach będących wierzchołkami $2n$-kąta. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

4. W urnie znajduje się 50 białych kul. Losujemy ze zwracaniem po jednej kuli, przy czym wyciągniętą kulę malujemy na czerwono, jeśli jest biała. Niech X będzie liczbą czerwonych kul w urnie po 20 losowaniach. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

5. Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów w taki sposób, że żadne trzy nie są współliniowe. Każda para punktów została połączona odcinkiem z prawdopodobieństwem p. Niech X oznacza liczbę powstałych trójkątów. Oblicz $\mathbb{E}X$.

6. Pokaż, że jeżeli zmienna losowa X ma rozkład dyskretny skoncentrowany na liczbach całkowitych nieujemnych, to
$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

7. Niech X będzie zmienną losową o dystrybuancie F. Wykaż, że
   a. Jeżeli $X \geq 0$, to $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\, dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq t)\, dt$ przy czym istnienie jednej strony implikuje istnienie drugiej i ich równość;
   b. Jeżeli X jest dowolną zmienną losową o skończonej wartości oczekiwanej, to $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F(t))\, dt - \int_{-\infty}^0 F(t)\, dt$.
   c. jeżeli $X \geq 0$, φ jest rosnąca i różniczkowalna, $\varphi(0) = 0$, to $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_0^\infty \varphi'(t)\mathbb{P}(X > t)\, dt$. W szczególności, jeżeli $r > 0$, to $\mathbb{E}[X^r] = \int_0^\infty rt^{r-1}\mathbb{P}(X > t)\, dt$.

8. Udowodnić, że jeżeli $X \geq 0$, to $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq n) \leq \mathbb{E}[X] \leq 1 + \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq n)$.