Lista 5: Zmienne losowe

Zadania na ćwiczenia: 2025-03-24

Lista zadań w formacie PDF

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Losujemy bez zwracania dwie liczby ze zbioru {1,2,3,4,5}. Niech X będzie sumą wylosowanych liczb - wyznacz jego rozkład oraz dystrybuantę. Odpowiedź
$$\begin{aligned}\mu_X =&0.1\delta_3 + 0.1\delta_4 + 0.2\delta_5 + 0.2\delta_6\\ &+ 0.2\delta_7 + 0.1\delta_8 + 0.1\delta_9\\ F_X(t) =&0.1\mathbf{1}_{[3,4)}(t) + 0.2\mathbf{1}_{[4,5)}(t) + 0.4\mathbf{1}_{[5,6)}(t) + 0.6\mathbf{1}_{[6,7)}(t)\\ &+ 0.8\mathbf{1}_{[7,8)}(t) + 0.9\mathbf{1}_{[8,9)}(t) + \mathbf{1}_{[9,+\infty)}(t)\end{aligned}$$
2. Losujemy jednostajnie punkt z okręgu o promieniu jeden. Niech X będzie odległością wylosowanego punktu od środka okręgu. Uzasadnij, że X jest zmienną losową. Znajdź jej dystrybuantę. Odpowiedź
Przyjmujemy $\Omega = \{(x,y)\ :\ x^2+y^2<1\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}or(\Omega)$, $\mathbb{P} = \pi^{-1}\lambda_1$.
$$X^{-1}[(-\infty,t]] = \Omega \cap \{(x,y)\ :\ x^2+y^2<t^2\} \in \mathcal{F}$$
$$F_X(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)t^2 + \mathbf{1}_{[1,\infty)}(t).$$
3. Niech F_1, F_2 będą dystrybuantami (spełniają założenia Twierdzenia @ref(thm:dystr)). Sprawdzić, czy następujące funkcje są jednowymiarowymi dystrybuantami (spełniają założenia Twierdzenia @ref(thm:dystr)):
   a. F_1F_2;
   b. $F_1 + F_2$;
   c. $F_1 - F_2$;
   d. F_1/F_2;
   e. $\max(F_1, F_2)$;
   f. $\min(F_1, F_2)$.
   Odpowiedź
   a,e,f.
4. Podaj przykład przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i funkcji $X : \Omega \to \mathbb{R}$, która nie jest zmienną losową. Odpowiedź
Niech $\Omega = \{1,2\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, $X(\omega) = \omega$.
5. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem
$$F_X(x)\ =\ (0.1+x)\mathbf{1}_{[0,0.5)}(x) + (0.4+x)\mathbf{1}_{[0.5,0.55)}(x) + \mathbf{1}_{[0.55,\infty)}(x)\ .$$
Niech μ_X będzie rozkładem X. Wyznacz
   a. $\mu_X(\{1/2\})$,
   b. $\mu_X([0,1/2])$,
   c. $\mu_X((0,0.55))$.
Odpowiedź
a 0.3, b 0.9, c. 0.85
6. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez
$$\mu_X(A) = \int_A c(1-x)^2\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x.$$
Znajdź wartość parametru c. Odpowiedź
3.
7. Losujemy jednostajnie punkt z przedziału $(0,1)$. Niech U będzie wylosowanym punktem. Wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej $X = -\log(U)$. Odpowiedź
$F_X(t) = 1 - e^{-t}$.

Zadania na ćwiczenia

8. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz funkcja $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Uzasadnij, że jeżeli $X^{-1}(a, b) \in \mathcal{F}$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$, to X jest zmienną losową.

9. Dystrybuanta zmiennej losowej X dana jest wzorem:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ t^2 & \text{dla } 0 \le t < 1/2 \\ 1/4 & \text{dla } 1/2 \le t < 4 \\ 1 & \text{dla } t \ge 4. \end{cases}$$

   Oblicz $\mathbb{P}[X = 5]$, $\mathbb{P}[X = 4]$, $\mathbb{P}[1/3 < X \le 5]$, $\mathbb{P}[0 < X < 1]$.

10. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą zmiennymi losowymi określonymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i niech $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ będzie rozbiciem Ω (tzn. zbiory te są rozłączne i ich sumą jest Ω). Niech $Z(\omega) = X_i(\omega)$ dla $\omega \in B_i$. Uzasadnij, że Z jest zmienną losową.

11. Punkt x nazywamy atomem rozkładu μ na $\mathbb{R}$, gdy $\mu(\{x\}) > 0$.

    a. Pokaż, że rozkład prawdopodobieństwa μ może mieć co najwyżej przeliczalną liczbę atomów.
    b. Czy zbiór atomów może mieć punkt skupienia?
    c. Czy zbiór atomów może być gęsty w $\mathbb{R}$?

12. Dane są dwie miary probabilistyczne μ i ν na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ takie, że dla dowolnej liczby $t > 0$ mamy $\nu([-t, t]) = \mu([-t, t])$. Uzasadnić, że $\mu(A) = \nu(A)$ dla dowolnego symetrycznego zbioru $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (zbiór A nazywamy symetrycznym, jeżeli $A = -A$).

13. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez

$$\mu_X(A) = \int_A \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + x^2} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x) \mathrm{d}x.$$

    Udowodnij, że

$$Y(\omega) = \begin{cases} 1/X(\omega), & X(\omega) > 0 \\ 17, & X(\omega) \le 0 \end{cases}$$

    ma ten sam rozkład, co X.

14. (rozkład geometryczny) Wykonujemy doświadczenia Bernoulliego (z prawdopodobieństwem pojedynczego sukcesu p) aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Niech X oznacza liczbę wykonanych doświadczeń, Y – czas oczekiwania na pierwszy sukces, czyli liczbę porażek przed pierwszym sukcesem. Wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych X i Y, tj. wyznaczyć funkcje $\mathbb{P}[X = k]$ oraz $\mathbb{P}[Y = k]$.

15. (rozkład wykładniczy) Przypuśćmy, że doświadczenia opisane w poprzednim zadaniu wykonuje się n razy na sekundę, zaś prawdopodobieństwo sukcesu wynosi λ/n, $\lambda > 0$, a czas oczekiwania na pierwszy sukces, Y_n, mierzy się w sekundach. Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej Y_n i zbadać jej zachowanie gdy $n \to \infty$.

Zadania dodatkowe

16. Mówimy, że zmienna losowa X jest niezdegenerowana, gdy $\mathbb{P}[X = a] < 1$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste b, c dla których istnieje niezdegenerowana zmienna losowa X taka, że X ma taki sam rozkład jak $bX + c$. Scharakteryzuj rozkład X w terminach b i c.