Lista 3: Prawdopodobieństwo warunkowe

Zadania na ćwiczenia: 2025-03-10

Lista zadań w formacie pdf

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. W urnie znajduje się 20 kul białych i 5 czarnych. Losujemy po jednej kuli aż do momentu, gdy wylosujemy czarną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wykonamy k losowań, jeżeli
   a. losujemy bez zwracania
   b. losujemy ze zwracaniem? Odpowiedź
   bez zwracania:
$$\prod_{j=0}^{k-2} \frac{20-j}{25-j} \cdot \frac{5}{25-k+1}$$
   ze zwracaniem: $(4/5)^{k-1}/5$
2. Dwoje graczy, Maciek i Dawid, dostało po 13 kart z 52. Maciek zobaczył przypadkowo u Dawida
   a. asa pik,
   b. jakiegoś asa czarnego koloru,
   c. jakiegoś asa. Obliczyć prawdopodobieństwo, że Maciek nie ma asa. Odpowiedź
   a,b,c $\binom{48}{13}/\binom{51}{13}$
3. Trzech strzelców oddało niezależnie po jednym strzale do tego samego celu. Prawdopodobieństwa trafień wynoszą odpowiednio p_1, p_2, p_3. Wyznacz prawdopodobieństwo, że trzeci strzelec trafił, jeżeli cel został trafiony
   a. dokładnie jednym pociskiem
   b. dokładnie dwoma pociskami;
   c. trzema pociskami. Odpowiedź
$$a\frac{p_1(1-p_2)(1-p_3)}{p_1(1-p_2)(1-p_3)+p_2(1-p_1)(1-p_3)+p_3(1-p_1)(1-p_2)}$$
$$b\frac{p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3}{p_1p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3}$$
$$c1$$
4. Podaj przykłady zdarzeń takich, że
   a. $\mathbb{P}[A|B] < \mathbb{P}[A]$,
   b. $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$
   c. $\mathbb{P}[A|B] > \mathbb{P}[A]$. Odpowiedź
   Rozważmy $\mathbb{P}[A \cap B] = \alpha$, $\mathbb{P}[B \cap A^c] = \beta$, $\mathbb{P}[A \setminus B] = \gamma$. Szukamy takiego doboru liczb $\alpha, \beta\gamma$ takich, że $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma \leq 1$ oraz $\alpha/(\alpha + \beta)$ było mniejsz/większe/równe $\alpha + \gamma$.

Zadania na ćwiczenia

5. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeżeli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów. Również nie-dyslektyk może popełnić co najmniej 6 błędów i dzieje się to z prawdopodobieństwem $0,1$. Jasiu popełnił 6 błędów. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest dyslektykiem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w kolejnym teście też popełni co najmniej 6 błędów?

6. Dawid i Maciek grają w pokera. Maciek ma silną rękę i zaczął od 5 dolarów. Prawdopodobieństwo, że Dawid ma silniejsze karty wynosi $0,1$. Gdyby Dawid miał mocniejsze/ słabsze karty podbiłby stawkę z prawdopodobieństwem $0,9/0,1$. Dawid podbił stawkę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ma lepsze karty?

7. W pewnej fabryce telewizorów każdy z aparatów może być wadliwy z prawdopodobieństwem p. W fabryce są trzy stanowiska kontroli i wyprodukowany telewizor trafia na każde ze stanowisk z jednakowym prawdopodobieństwem. i-te stanowisko wykrywa wadliwy telewizor z prawdopodobieństwem p_i ($i = 1, 2, 3$). Telewizory nie odrzucone w fabryce trafiają do hurtowni i tam poddawane są dodatkowej kontroli, która wykrywa wadliwy telewizor z prawdopodobieństwem p_0.

   a. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że dany nowowyprodukowany telewizor znajdzie się w sprzedaży (tzn. przejdzie przez obie kontrole).
   b. Przypuśćmy, że telewizor jest już w sklepie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest on wadliwy?

8. Mamy dwie urny i 50 kul. Połowa z kul jest biała, a połowa czarna. Jak rozłożyć kule do urn, aby zmaksymalizować prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana kula z losowej urny jest biała (najpierw losujemy urnę, a potem z wybranej urny losujemy kulę)?

9. Rzucamy trzema sześciennymi kostkami do gry. Następnie rzucamy ponownie tymi kostkami, na których nie wypadły "jedynki". Obliczyć prawdopodobieństwo, że na wszystkich trzech kostkach będą "jedynki".

10. Przypuśćmy, że 1/20 wszystkich kości do gry jest sfałszowana i zawsze wypada na nich szóstka. Wybieramy losowo trzy kostki i rzucamy nimi. Oblicz

    a. prawdopodobieństwo wyrzucenia w sumie 18 oczek;
    b. prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna kostka była sfałszowana, jeżeli wyrzuciliśmy 18 oczek;

11. Kierowcy dzielą się na ostrożnych (jest ich \$ 95 % \$ i taki kierowca powoduje w ciągu roku wypadek z prawdopodobieństwem \$ 0.01 \$) i piratów (jest ich \$ 5 % \$ i taki kierowca powoduje w ciągu roku wypadek z prawdopodobieństwem \$ 0.5 \$). Wybrany losowo kierowca nie spowodował wypadku w pierwszym i drugim roku. Obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe, że spowoduje wypadek w trzecim roku.\

12. W zabawę w 'głuchy telefon' gra n osób: $L_1, \ldots, L_n$. Pierwsza osoba L_1 otrzymuje informację w postaci 'tak' lub 'nie' i przekazuje ją L_2. Osoba L_2 przekazują ją dalej, z prawdopodobieństwem p taką samą, a z prawdopodobieństwem $1-p$ przeciwną, itd. Każdy uczestnik przekazuje kolejnemu informację, którą uzyskał w prawdopodobieństwem p i przeciwną z prawdopodobieństwem $1-p$. Oblicz prawdopodobieństwo q_n, że osoba L_n otrzyma prawidłową informację. Oblicz $\lim_n q_n$.

Zadania dodatkowe

13. Na rodzinie wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$ określamy miarę probabilistyczną $\mathbb{P}_n$ wzorem

$$\mathbb{P}_n(A) = \frac{|\{m :\ 1 \le m \le n, m \in A\}|}{n}.$$

    Mówimy, że zbiór A ma gęstość

$$D(A) = \lim_n \mathbb{P}_n(A)$$

    jeżeli istnieje powyższa granica. Niech $\mathcal{D}$ oznacza rodzinę zbiorów posiadających gęstość.
    a. Pokaż, że D jest skończenie addytywna na $\mathcal{D}$, ale nie jest przeliczalnie addytywna.
    b. Czy $\mathcal{D}$ jest σ-ciałem?
    c. Wykaż, że jeżeli $x \in [0, 1]$, to istnieje zbiór A taki, że $D(A) = x$.

14. Niech Ω będzie przestrzenią przeliczalnych ciągów 0-1, tj. $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{P}}$. Dla $\omega \in \Omega$ oznaczmy przez ω_n wartość n-tej składowej. Dla ustalonego ciągu $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \{0, 1\}^n$ niech

$$C_u = \{\omega :\ \omega_i = u_i; i = 1, \ldots, n\}.$$

    Zbiór C_u nazywamy cylindrem rzędu n. Każdemu takiemu zbiorowi przypisujemy miarę probabilistyczną~$\mathbb{P}$ równą 2^{-n}. Oznaczmy przez $\mathcal{F}_0$ ciało składające się ze zbioru pustego oraz skończonych sum rozłącznych cylindrów. W naturalny sposób definiujemy $\mathbb{P}$ na $\mathcal{F}_0$.
    a. Pokaż, że miara $\mathbb{P}$ jest przeliczalnie addytywna na $\mathcal{F}_0$.
    b. Utożsamiając Ω z przedziałem (0,1] porównaj miarę $\mathbb{P}$ z miarą Lebesgue'a.