Lista 13: Słaba zbieżność

Zadania na ćwiczenia: 2025-06-02

Lista zadań w formacie PDF

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem zmiennych losowych takim, że X_n ma rozkład $\mathrm{Exp}(\lambda_n)$. Pokaż, że jeżeli $\lambda_n \to \lambda > 0$, to $X_n \Rightarrow \mathrm{Exp}(\lambda)$. Odpowiedź
   Wystarczy zbadać zbieżność dystrybuant w punktach ciągłości dystrybuanty granicznej. Dla $t \geq 0$ mamy
   $$\mathbb{P}[X_n \leq t] = 1 - e^{-\lambda_n t} \to 1 - e^{-\lambda t}.$$
2. Czy zmienne losowe posiadające gęstość mogą słabo zbiegać do rozkładu dyskretnego? Czy zmienne losowe o rozkładach dyskretnych mogą słabo zbiegać do rozkładu posiadającego gęstość? Odpowiedź
   $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{k/n} \Rightarrow \lambda_{1|[0,1]}$ oraz $\mathcal{N}(0, 1/n) \Rightarrow \delta_0$.
3. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jednostajnym $U[0,1]$. Niech $Y_n = n \min_{1\leq i \leq n} X_i$. Pokaż, że Y_n zbiega słabo do rozkładu wykładniczego $\mathrm{Exp}(1)$. Odpowiedź
   Mamy
   $$\mathbb{P}[Y_n > t] = (1 - t/n)^n \to e^{-t}$$
4. Niech $F \subseteq \mathbb{R}^d$. Pokaż, że dla każdych $x, y \in \mathbb{R}^d$
   $$|\mathrm{dist}(x, F) - \mathrm{dist}(y, F)| \leq \|x - y\|.$$
   Wywnioskuj, że dla $\epsilon > 0$ funkcja $f(x) = (1 - \mathrm{dist}(x, F)/\epsilon)_+$ jest jednostajnie ciągła. Odpowiedź
   Niech f będzie dowolnym elementem F. Z nierówności trójkąta
   $$\|x - f\| + \|x - y\| \leq \|y - f\|$$
   biorąc kres dolny po $f \in F$,
   $$\mathrm{dist}(x, F) + \|x - y\| \leq \mathrm{dist}(y, F).$$
   Zamieniając x i y miejscami i stosując ten sam argument otrzymujemy pierwszą tezę. Druga teza wynika teraz z nierówności $|a_+ - b_+| \leq |a - b|$ dla $a, b \in \mathbb{R}$.
5. Niech $n \in \mathbb{N}$. Z liczb $\{1, \ldots, n\}$ losujemy trzy liczby. Niech X_n będzie ich medianą (środkową wartością). Pokaż, że X_n/n przy $n \to \infty$ zbiega według rozkładu do rozkładu o gęstości $6x(1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Odpowiedź
   Mamy
   $$\mathbb{P}[X_n = k] = 6(k-1)(n-k)/(n(n-1)(n-2)).$$
   Dla każdej $f \in C_b(\mathbb{R})$ mamy
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_n)] &= \sum_k f(k/n) 6(k-1)(n-k)/(n(n-1)(n-2)) \\ &\to \int_0^1 f(x) 6x(1-x) \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Zadania na ćwiczenia

6. Wykaż, że dodatnie zmienne losowe $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbiegają słabo do rozkładu $\mathcal{U}[0,1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy zmienne losowe $Y_n = -2\log X_n$ zbiegają słabo do rozkładu wykładniczego $\mathrm{Exp}(1/2)$.
7. Pokaż, że jeśli $X, \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ są zmiennymi losowymi oraz $X_n \to^{\mathbb{P}} X$, to $X_n \Rightarrow X$.
8. Pokaż, że jeśli $X, \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ są zmiennymi losowymi oraz $X_n \Rightarrow c \in \mathbb{R}$, to $X_n \to^{\mathbb{P}} c$.

9. Niech X, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, Y, $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą zmiennymi losowymi takimi, że

$$X_n \Rightarrow X \quad \text{oraz} \quad Y_n \Rightarrow Y.(\#eq:ref)$$

   a. Pokaż, że jeżeli X_n i Y_n są niezależne oraz X i Y są niezależne, to to ma miejsce słaba zbieżność dwuwymiarowych wektorów losowych

   $$(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y).$$

   b. Pokaż, że jeżeli $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$, to

   $$X_n + Y_n \Rightarrow X + Y.$$

   c. Podaj przykład zmiennych losowych dla których @ref(eq:ref) ale nie jest prawdą, że $X_n + Y_n \Rightarrow X + Y$.

10. Pokaż, że jeśli $X_n \Rightarrow X$ oraz $Y_n \Rightarrow c \in \mathbb{R}$, to $X_n + Y_n \Rightarrow X + c$;

11. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Niech $Y_n = n \min_{1\le i\le n} |X_i|$. Pokaż, że Y_n zbiega słabo do rozkładu wykładniczego. Z jakim parametrem?

12. Niech dla $n \in \mathbb{N}$ X_n będzie liczbą punktów stałych jednostajnie wylosowanej permutacji liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$. Znajdź granicę według rozkładu ciągu zmiennych $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

13. Niech $\mu_\alpha = \mathcal{N}(m_\alpha, \sigma_\alpha^2)$. Udowodnić, że rodzina $\{\mu_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ jest ciasna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $K > 0$, że dla wszystkich $\alpha \in \Lambda$ jest

    $$|m_\alpha| \le K, \quad \sigma_\alpha^2 \le K.$$

    Wskazówka

    Pokaż, że rodzina jest ciasna wtedy i tylko wtedy, gdy

    $$\lim_{t\to\infty} \sup_{\alpha\in\Lambda} \frac{t - m_\alpha}{\sigma_\alpha} = \infty.$$

Zadania dodatkowe

14. Niech $c_{j,n}$ dla $j \le n$ będzie kolekcją liczb rzeczywistych. Pokaz, że jeśli

    $$\max_{1\le j\le n} |c_{j,n}| \to 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_{j,n} = \lambda, \quad \text{oraz} \quad \sup_n \sum_{j=1}^{n} |c_{j,n}| < \infty,$$

    to

    $$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} (1 + c_{j,n}) = e^{\lambda}.$$

15. Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na zbiorze $\{1, 2, \ldots, N\}$. Oznaczmy przez $T_N = \min\{n : X_n = X_m \text{ dla pewnego } m < n\}$. Oblicz granicę według rozkładu ciągu $T_N/\sqrt{N}$, gdy $N \to \infty$. Wykorzystaj otrzymany wynik do rozwiązania problemu urodzin: oszacuj prawdopodobieństwo, że w gronie 23 osób są dwie mające urodziny tego samego dnia.

16. Niech μ będzie miarą σ-skończoną, f_n, f — funkcjami nieujemnymi i takimi, że miary $\nu_n(A) = \int_A f_n \, d\mu$, $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$ są miarami probabilistycznymi. Niech $f_n \to f$ mu-p.w. Udowodnić, że

    $$\sup_A |\nu(A) - \nu_n(A)| \le \int_\Omega |f - f_n| \, d\mu \to 0.$$

    Wywnioskuj, że $\nu_n \Rightarrow \nu$.

17. Niech X_n będzie pierwszą współrzędną zmiennej losowej o rozkładzie jednostajnym na kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. Wykazać, że
$$\sqrt{n}X_n \Rightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

18. Niech $\xi_1, \xi_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie $\mathbb{P}[\xi_k = \pm 1] = 1/2$. Niech $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$. Pokaż, że nie istnieje zmienna losowa η taka, że $S_n/\sqrt{n} \to \eta$ według prawdopodobieństwa.