Lista 12: Zbieżność

Zadania na ćwiczenia: 2025-05-26

Lista zadań w formacie PDF

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Niech $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}or([0,1])$ i
$$\mathbb{P} = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_{1/3} + \frac{1}{3}\delta_1.$$
Rozważmy $X(\omega) = 0$, $Y(\omega) = \mathbf{1}_{\{1\}}(\omega)$ oraz $Z(\omega) = \mathbf{1}_{[1/2,1)}(\omega)$.
   a. Czy $X = Y$ p. n?
   b. Czy $X = Z$ p. n?

Odpowiedź

a. nie, b. tak

2. Nech $\Omega = \mathbb{R}$ i $\mathcal{F} = \mathcal{B}or(\mathbb{R})$. Rozważmy $X_n(\omega) = \cos(\omega)^n$. Zbadaj zbieżność prawie na pewno ciągu $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jeżeli

a. $\mathbb{P}$ jest jednowymiarową miarą Lebesgue's obciętą do odcinka $[0,1]$.
b. $\mathbb{P}$ jest rozkładem normalnym o średniej zero i wariancji 1.
c. $\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\delta_{k\pi}$.
d. $\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\delta_{2k\pi}$.

Odpowiedź

a. i b. ciąg jest zbieżny do zera p.n. c. ciąg nie jest zbieżny p.n. d. ciąg jest zbieżny do 1 p.n.

3. Rozważmy zmienne losowe X, Y i Z. Pokaż, że jeżeli $X = Y$ p.n. oraz $Y = Z$ p.n, to $X = Z$ p. n.

Odpowiedź

Niech
$$A = \{\omega\ :\ X(\omega) = Y(\omega)\}$$
oraz
$$B = \{\omega\ :\ Y(\omega) = Z(\omega)\}.$$
Z założenia $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = 1$. Dla $\omega \in A \cap B$,
$$X(\omega) = Y(\omega) = Z(\omega)$$
przy czym $\mathbb{P}[A \cap B] = 1$.

4. Niech $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych taki, że X_{2n} ma rozkład Exp(1), a X_{2n+1} ma rozkład Pois(3). Znajdź granicę według prawdopodobieństwa
$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

Odpowiedź

2

5. Niech $X_n \to^{\mathbb{P}} X$ oraz $Y_n \to^{\mathbb{P}} Y$ i załóżmy, że $X = Y$ p.n. Pokaż, że $X_n - Y_n \to^{\mathbb{P}} 0$.

Odpowiedź

Mamy
$$\mathbb{P}[|X_n - Y_n| > \epsilon] \leq \mathbb{P}[|X_n - X| > \epsilon/2] + \mathbb{P}[|Y_n - Y| > \epsilon/2].$$

Zadania na ćwiczenia

7. Pokaż, że jeżeli $X_n \to^{\mathbb{P}} X$ oraz $X_n \to^{\mathbb{P}} Y$, to $X = Y$ p.n.

8. Pokaż, że jeżeli $\vec{X}_n \to^{\mathbb{P}} \vec{X}$ i $\vec{Y}_n \to^{\mathbb{P}} \vec{Y}$, to $a\vec{X}_n + b\vec{Y}_n \to a\vec{X} + b\vec{Y}$ dla dowolnych rzeczywistych a, b.

9. Załóżmy, że σ-ciała $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są niezależne. Pokaż, że jeżeli X jest zmienną losową $\mathcal{F}_\infty$-mierzalną, to $\mathbb{P}[X = c] = 1$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}$.

10. Dany jest ciąg $\{X_n\}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład zadany przez $\mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n} = 1 - \mathbb{P}[X_n = 0]$. Czy ten ciąg jest zbieżny p.w.? Czy jest zbieżny według prawdopodobieństwa? Czy jest zbieżny w L^p?

11. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, które mają rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$. Udowodnij, że
$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^{-1}\right] \to \frac{2}{3}.$$

12. Załóżmy, że $\vec{X}_n \to^{\mathbb{P}} \vec{X}$.

    a. Pokaż, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $T > 0$ takie, że
    $$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left[\left\|\vec{X}_n\right\| > T\right] < \epsilon.$$

    b. Pokaż, że jeżeli $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ jest funkcją ciągłą, to $f(\vec{X}_n) \to^{\mathbb{P}} f(\vec{X})$.

13. Niech $\{X_n\}_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że X_n ma rozkład Poissona z parametrem n. Pokaż, że
$$\frac{X_n}{n} \to 1 \quad p.n.$$

14. Rozwazmy $\Omega = [0, 1]$ z jednowymiarową miarą Lebesgue'a. Niech $X_n(\omega) = \mathbf{1}_A([n\omega])$, gdzie A to zbiór kwadratów liczb naturalnych. Pokaż, że zbiega według miary ale nie zbiega p.n. wskaż podciąg zbieżny p.n.

Zadania dodatkowe

15. Niech $(X_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych. Niech $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Udowodnij, że:

    a. Jeżeli $X_n \to 0$ p. n, to $S_n/n \to 0$ p.n.
    b. Ogólnie, $X_n \to^{\mathbb{P}} 0$ nie implikuje $S_n/n \to^{\mathbb{P}} 0$
    c. $S_n/n \to 0$ p.n. wtedy i tylko wtedy, gdy $S_n/n \to^{\mathbb{P}} 0$ oraz $S_{2n}/2^n \to 0$ p.n.

16. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, na której $X_n \to^{\mathbb{P}} X$. Udowodnij, że jeśli Ω jest przeliczalna, to $X_n \to X$ p.n.

17. Niech $(X_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, dla którego $X_n \to^{\mathbb{P}} X$, gdzie X jest pewną zmienną losową. Udowodnij, że X musi być zmienną losową zdegenerowaną.