Lista 11: Momenty wielowymiarowe i nierówności

Zadania na ćwiczenia: 2025-05-19

Lista zadań w formacie PDF

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Znajdź $\mathbb{E}[\vec{X}]$ oraz macierz kowariancji $Q^{\vec{X}}$, gdzie $\vec{X}$ jest wektorem wylosowanym jednostajnie z trójkąta
   a. o wierzchołkach w punktach $(0,0)$, $(0,1)$ i $(1,0)$.
   b. o wierzchołkach w punktach $(1,1)$, $(3,2)$ i $(4,5)$.

Odpowiedź

$$a)\mathbb{E}[X] = (1/3, 1/3),\ Q = [1/27, -1/54; -1/54, 1/27]$$
$$b)\mathbb{E}[X] = (8/3, 8/3),\ Q = [7/27, 17/54; 17/54, 13/27]$$

2. Znajdź funkcję tworzącą momenty dla zmiennej losowe X o rozkładzie
   a. $\text{Pois}(\lambda)$
   b. $\text{Geo}(p)$
   c. $\mathcal{U}(a,b)$
   d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Odpowiedź

$$a)M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$
$$b)M_X(t) = pe^t/(1-(1-p)e^t)$$
$$c)M_X(t) = e^{tb} - e^{ta}/(t(b-a)), M_X(0) = 1$$
$$d)M_X(t) = \exp\{t\mu t^2\sigma^2/2\}$$

3. Niech $M_X(\beta) = \mathbb{E}\left[e^{\beta X}\right]$ będzie funkcją tworzącą momenty dla zmiennej losowej X. Udowodnij, że dla każdego $\beta > 0$ zachodzi
$$\mathbb{P}[X \geq 0] \leq M_X(\beta).$$

Odpowiedź

$$M_X(\beta) = [E][e^{\beta X}] \geq \mathbb{E}[e^{\beta X}\mathbf{1}_{X\geq 0}] \geq \mathbb{P}[X \geq 0]$$

4. Niech X będzie zmienną losową. Pokaż, że
$$\mathbb{E}\left[X^2\right] \geq \mathbb{E}[X]^2.$$

Odpowiedź

$$0 \leq \mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

5. Pokaż, że dla ustalonych $0 < b \leq a$ istnieje zmienna losowa X taka, że $\mathbb{E}[X^2] = b^2$ i $\mathbb{P}[|X| \geq a] = b^2/a^2$. W szczególności w nierówności Czebyszewa zachodzi równość.

Odpowiedź

$\mathbb{P}[X = a] = b^2/a^2$ i $\mathbb{P}[X = 0] = 1 - b^2/a^2$.

6. Włącz komputer. Na podstawie 1000 najwyżej ocenianych filmów z IMDB metodą regresji liniowej znajdź estymator $\hat{Y}$ zmiennej $Y=$ ocena filmu względem X = czas trwania filmu w minutach.

Odpowiedź

$\hat{Y} = 7.656 + 0.002384 \cdot X$

Zadania na ćwiczenia

7. Niech $\vec{X}$ będzie wektorem wylosowanym jednostajnie ze zbioru

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 13x^2 - 10xy + 13y^2 + 82x - 98y \leq -129\right\}$$

   Znajdź $\mathbb{E}[\vec{X}]$.

8. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi całkowalnymi z kwadratem. Pokaż, że

$$\mathbb{E}[XY] \leq \mathbb{E}[X^2]^{1/2}\mathbb{E}[Y^2]^{1/2}.$$

9. Niech X będzie zmienną losową a $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją wypukła taką, że $\mathbb{E}[|\varphi(X)|] < \infty$. Pokaż, że

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

10. Niech X będzie nieujemną zmienną losową całkowalną z kwadratem. Pokaż, że dla $\theta \in (0,1)$,

$$\mathbb{P}[X \geq \theta\mathbb{E}[X]] \geq (1-\theta)^2\frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

11. Rzucamy monetą aż do momentu otrzymania dwóch orłów z rzędu. Zakładamy, że prawdopodobieństwo otrzymania orła w pojedynczym rzucie wynosi $p \in (0,1)$. Niech

$$\Omega = \{OO, ROO, RROO, OROO, RRROO, ROROO, ORROO, \ldots\}.$$

   Rozważmy zmienną losową $X(\omega) = |\omega|$ oznaczająca liczbę wykonanych rzutów. Celem zadania jest znalezienie $\mathbb{E}[X]$.

   a. Uzasadnij, że dla pewnej $\beta > 0$,

$$M_X(\beta) = \mathbb{E}\left[e^{\beta X}\right] = \sum_{\omega \in \Omega} e^{\beta|\omega|}p^{O(\omega)}q^{R(\omega)} < \infty$$

   gdzie $R(\omega)$ oraz $O(\omega)$ oznaczają odpowiednio liczbę reszek i orłów w ciągu ω.

   b. Zauważ, że

$$\Omega = \{OO\} \cup R\Omega \cup OR\Omega,$$

   gdzie powyższe zbiory są rozłączne. Wywnioskuj

$$M_X(\beta) = p^2e^{2\beta} + qe^{\beta}M_X(\beta) + pqe^{2\beta}M_X(\beta).$$

   c. Znajdź $\mathbb{E}[X]$.

12. Niech X i Y będą dwiema zmiennymi losowymi, dla których $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$ oraz $\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{V}ar[Y] = 1$ oraz $\operatorname{cov}(X,Y) = \rho$. Udowodnij, że

$$\mathbb{E}\left[\max(X^2, Y^2)\right] \leq 1 + \sqrt{1-\rho^2}.$$

Wskazówka

Użyj tożsamości

$$\max(X^2,Y^2) = \frac{1}{2}\left(X^2 + Y^2 + |X^2 - Y^2|\right).$$

13. Przypuśćmy, że X i Y są dwiema zmiennymi losowymi o współczynniku korelacji

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}ar[X]\mathbb{V}ar[Y]}}.$$

Zweryfikuj następujący dwuwymiarowy analog nierówności Czebyszewa:

$$\mathbb{P}\left[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\sqrt{\mathbb{V}ar[X]} \text{ lub } |Y - \mathbb{E}[Y]| \geq \varepsilon\sqrt{\mathbb{V}ar[Y]}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left(1 + \sqrt{1-\rho^2}\right).$$

Wskazówka

Bez straty ogólności można założyć, że $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$ oraz $\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{V}ar[Y] = 1$. Wtedy

$$\mathbb{P}\left[|X| \geq \varepsilon \text{ lub } |Y| \geq \varepsilon\right] = \mathbb{P}\left[\max(X^2, Y^2) \geq \varepsilon^2\right].$$

14. Niech φ oraz Φ będą odpowiednio gęstością i dystrybuantą jednowymiarowego standardowego rozkładu normalnego. Udowodnij, że dla dowolnego $x > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{x}{1+x^2}\,\varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Wskazówka

Oblicz pochodne $\varphi'(x)$ oraz $\left(x^{-1}\varphi(x)\right)'$.

Zadania dodatkowe

15. Niech ξ i η będą dowolnymi niezależnymi zmiennymi losowymi, dla których $\mathbb{E}[\xi] = 0$. Udowodnij, że

$$\mathbb{E}|\xi - \eta| \geq \mathbb{E}|\eta|.$$

16. Niech ξ_1 i ξ_2 będą dowolnymi dwoma zmiennymi losowymi takimi, że rozkład wektora losowego (ξ_1, ξ_2) pokrywa się z rozkładem (ξ_2, ξ_1). Udowodnij, że jeśli f oraz g są dowolnymi nieujemnymi i niemalejącymi funkcjami, to

$$\mathbb{E}\left[f(\xi_1)g(\xi_1)\right] \geq \mathbb{E}\left[f(\xi_1)g(\xi_2)\right].$$

17. Niech $\vec{X}$ będzie wektorem o wielowymiarowym standardowym rozkładzie normalnym. Udowodnij, że dla każdej funkcji Lipschitza $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ takiej, że $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$, zachodzi nierówność

$$\mathbb{P}\left[f(X) - \mathbb{E}[f(X)] \geq \lambda\right] \leq e^{-\lambda^2/2}, \quad \text{dla każdego } \lambda \geq 0.$$

18. Niech $\vec{X}$ będzie m-wymiarowym wektorm losowym, a $Q^{\vec{X}}$ — jego macierzą kowariancji.

a. Udowodnij, że jeśli $\vec{X}$ jest scentrowany (tzn. $\mathbb{E}[\vec{X}] = 0$), to

$$\mathbb{P}\left[\vec{X} \in \mathrm{Im}\, Q^{\vec{X}}\right] = 1$$

(gdzie $\mathrm{Im}\, Q^{\vec{X}}$ oznacza obraz macierzy $Q^{\vec{X}}$).

b. Wywnioskuj, że jeśli macierz kowariancji zmiennej losowej nie jest odwracalna, to rozkład tej zmiennej nie może mieć gęstości.