Lista 10: Wariancja

Zadania na ćwiczenia: 2025-05-12

Lista zadań w formacie PDF

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Zmienne losowe X, Y spełniają warunki: $\mathbb{V}ar[X] = 3$, $\text{Cov}(X, Y) = -1$, $\mathbb{V}ar[Y] = 2$. Oblicz $\mathbb{V}ar[4X - 3Y]$ oraz $\text{Cov}(2X - Y, 2X + Y)$. Odpowiedź

   $\mathbb{V}ar[4X - 3Y] = 90$ oraz $\text{Cov}(2X - Y, 2X + Y) = 10$.

2. Niech $\vec{X} = (X, Y)$ będzie jednostajnie wylosowanym punktem kwadratu jednostkowego $[0, 1]^2$. Znajdź $\mathbb{V}ar(X)$, $\mathbb{V}ar(Y)$, $\text{Cov}(X, Y)$. Odpowiedź

   $\text{Var}(X) = 1/12$, $\text{Var}(Y) = 1/12$, $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

3. Znajdź wariancję dla zmiennej losowej X o rozkładzie

   a. $\text{Pois}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
   b. $\mathcal{U}[a, b]$, $a < b$
   c. $\text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Odpowiedź

a λ, b $(b - a)^2/12$, c $1/\lambda^2$

4. Wykaż, że jeżeli X jest zmienną losową całkowalną z kwadratem, to:

   a. $\mathbb{V}ar[cX] = c^2\mathbb{V}ar[X]$ dla każdego $c \in \mathbb{R}$;
   b. $\mathbb{V}ar[X + a] = \mathbb{V}ar[X]$ dla każdego $a \in \mathbb{R}$;
   c. $\mathbb{V}ar[X] = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna losowa X jest stała z prawdopodobieństwem 1.

Odpowiedź

a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(cX) &= \mathbb{E}[(cX)^2] - (\mathbb{E}[cX])^2 \\
&= c^2\mathbb{E}[X^2] - c^2(\mathbb{E}[X])^2 \\
&= c^2(\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2) \\
&= c^2\mathbb{V}ar(X)
\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(X + a) &= \mathbb{E}[(X + a)^2] - (\mathbb{E}[X + a])^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2 + 2aX + a^2] - (\mathbb{E}[X] + a)^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2] + 2a\mathbb{E}[X] + a^2 - (\mathbb{E}[X]^2 + 2a\mathbb{E}[X] + a^2) \\
&= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{V}ar(X)
\end{aligned}$$

c ($\Rightarrow$) Jeśli $\text{Var}(X) = 0$, to całka z funkcji nieujemnej $(X - \mathbb{E}[X])^2$ jest równa zero. Oznacza to, że owa funkcja jest równa zero p.w. Czyli $X = \mathbb{E}[X]$ p.w. ($\Leftarrow$) Jeśli $X = c$ z prawdopodobieństwem 1, to:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = c^2 - c^2 = 0$$

5. Niech X, Y i Z będą zmiennymi losowymi całkowalnymi z kwadratem. Pokaż, że

   a. $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.
   b. $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}[X]$.
   c. $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$.

d. Kowariancja jest operatorem dwuliniowym:

$$\operatorname{Cov}(aX + bY, Z) = a\operatorname{Cov}(X, Z) + b\operatorname{Cov}(Y, Z).$$

Odpowiedź

a Z definicji kowariancji:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \\ &= \mathbb{E}[XY - X\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]Y + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

b

$$\operatorname{Cov}(X, X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \operatorname{Var}(X)$$

c Z definicji:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ \operatorname{Cov}(Y, X) &= \mathbb{E}[YX] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] \\ &= \operatorname{Cov}(X, Y)\end{aligned}$$

d Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Udowodnijmy:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(aX + bY, Z) &= a\operatorname{Cov}(X, Z) + b\operatorname{Cov}(Y, Z) \\ &= \mathbb{E}[(aX + bY)Z] - \mathbb{E}[aX + bY]\mathbb{E}[Z] \\ &= a\mathbb{E}[XZ] + b\mathbb{E}[YZ] - (a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y])\mathbb{E}[Z] \\ &= a(\mathbb{E}[XZ] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z]) + b(\mathbb{E}[YZ] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Z]) \\ &= a\operatorname{Cov}(X, Z) + b\operatorname{Cov}(Y, Z)\end{aligned}$$

6. Losujemy jednostajnie punkt $\vec{X} = (X, Y)$ z koła

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 - 2x - 4y \le -4\right\}.$$

Znajdź $\operatorname{Cov}(X, Y)$.

Odpowiedź

0

Zadania na ćwiczenia

7. Załóżmy, że wektor losowy $\vec{X} = (X, Y)$ ma dwuwymiarowy rozkład normalny. Pokaż, że X i Y są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.
8. Podaj przykład zmiennych losowych X i Y takich, że X i Y mają standardowy jednowymiarowy rozkład normalny, $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$, ale X i Y nie są niezależne.
9. Niech X_1 i X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$. Wykaż, że zmienne losowe $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ i $\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}$ są niezależne i obie mają rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$.
10. Na płaszczyźnie zaznaczono punkty $p_1, \ldots, p_n$ w taki sposób, że żadne trzy nie są współliniowe. Każda para punktów została połączona odcinkiem z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$. Niech X oznacza liczbę powstałych trójkątów o wierzchołkach w punktach $p_1, \ldots, p_n$. Oblicz $\mathbb{V}ar[X]$.
11. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Pokaż, że dla każdej $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta X}\right] = e^{\theta\mu + \theta^2\sigma^2/2}.$$

12. Niech $\vec{X} = (X, Y)$ będzie wektorem losowym o dwuwymiarowym rozkładzie normalnym z parametrami $\vec{m} = (0, 0)$ i

$$\Sigma = \begin{pmatrix} a & \rho \\ \rho & b \end{pmatrix}$$

dla $\rho < \sqrt{ab}$. Znajdź rozkład zmiennej X i wywnioskuj, że $\mathbb{V}ar[X] = a$.

13. Dla zmiennej losowej X całkowalnej z kwadratem i zdarzenia A o dodatnim prawdopodobieństwie definiujemy wariancję X pod warunkiem A wzorem

$$\mathbb{V}ar[X|A] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X|A])^2 \middle| A \right].$$

Pokaż, że dla rozbicia $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ zbioru Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie zachodzi

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{P}[A_i]\mathbb{E}[X|A_i]$$

oraz

$$\mathbb{V}ar(X) = \sum_i \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{V}ar(X \mid A_i) + \sum_i \mathbb{P}(A_i) \cdot (\mathbb{E}[X \mid A_i] - \mathbb{E}[X])^2.$$

14. Rzucamy kostką aż do momentu otrzymania pierwszej jedynki. Niech X będzie sumą wyrzuconych oczek. Znajdź $\mathbb{E}[X]$ oraz $\mathbb{V}ar[X]$.

Zadania dodatkowe

15. Niech $\vec{X}$ i $\vec{Y}$ będą niezależnymi d-wymiarowymi wektorami losowymi z rozkładem normalnym o parametrach $(0, \ldots, 0)$ i macierzy kowariancji I_d (identyczność).

a. Udowodnij, że dla dowolnych $f, g \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$ zachodzi

$$\mathrm{Cov}(f(X), g(X)) = \int_0^1 \mathbb{E}\left[\left\langle \nabla f(X), \nabla g(\alpha X + \sqrt{1-\alpha^2} Y) \right\rangle \right] \mathrm{d}\alpha,$$

gdzie $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)$. Najpierw sprawdź wzór dla $f(x) = e^{i\langle t,x\rangle}$ oraz $g(x) = e^{i\langle s,x\rangle}$, gdzie $s, t, x \in \mathbb{R}^d$.

b. Niech μ_α będzie miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}^{2d}$, która jest rozkładem wektora

$$\left(X, \alpha X + \sqrt{1-\alpha^2} Y \right),$$

i niech μ oznacza miarą probabilistyczną daną przez

$$\int_0^1 \mu_\alpha \,\mathrm{d}\alpha.$$

Niech Z będzie wektorem losowym w $\mathbb{R}^d$ takim, że wektor (X, Z) w $\mathbb{R}^{2d}$ ma rozkład μ. Udowodnij, że dla każdej funkcji Lipschitza f, takiej że $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$ oraz $\mathbb{E}[f(X)] = 0$, zachodzi nierówność

$$\mathbb{E}\left[f(X) e^{tf(X)} \right] \leq t\mathbb{E}\left[e^{tf(Z)} \right],$$

dla wszystkich $t \geq 0$. Wywnioskuj, że

$$\mathbb{E}\left[e^{tf(X)} \right] \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

16. Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest ograniczona wielomianowo, jeśli istnieją liczby całkowite $k = (k_1, \ldots, k_n)$ oraz liczba rzeczywista $a > 0$ takie, że

$$|f(x)| \leq |x_1|^{k_1} \cdots |x_n|^{k_n}$$

dla każdego $x = (x_1, \ldots, x_n)$ takiego, że $\|x\| \geq a$.

a. Udowodnij, że jeśli G jest zmienną losową o rozkładzie normalnym o średniej zero, to dla każdej ograniczonej wielomianowo i i różniczkowalnej w sposób ciągły funkcji Φ zachodzi:

$$\mathbb{E}[G\Phi(G)] = \mathbb{E}\left[G^2\right] \mathbb{E}[\Phi'(G)].$$

b. Udowodnij, że jeśli $(G, G_1, G_2, \ldots, G_n)$ jest $(n+1)$-wymiarowym wektorem losowym o rozkładzie normalnym, $\mathbb{E}[G] = \mathbb{E}[G_i] = 0$, to dla każdej ograniczonej wielomianowo i różniczkowalnej w sposób ciągły funkcji

$$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

zachodzi

$$\mathbb{E}\left[G\Phi(G_1, \ldots, G_n)\right] = \sum_{l \leq n} \mathbb{E}[GG_l]\, \mathbb{E}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_l}(G_1, \ldots, G_n)\right].$$