Uniwersytet Wrocławski, Instytut Matematyczny
Kolokwium nr 2

imię i nazwisko: ______________________________

Kolokwium składa się z 7 stron oraz 4 zadań. Na drugiej stronie znajduje się spis ważniejszych rozkładów. Dwie ostatnie strony stanowią brudnopis. Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 100 minut. Zacznij od spokojnego (!) przeczytania treści wszystkich zadań i zacznij od najłatwiejszego. Powodzenia.

zadanie	1	2	3	4	Σ
punkty	25	25	25	25	100
wynik					

1. Niech $(A_n)_n$ i $(B_n)_n$ będą dwoma niezależnymi ciągami niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie. Załóżmy, że $B_n \geq 1$, $1 \geq A_n \geq 0$ i $\mathbb{P}[A_n = 1] < 1$ dla każdego $n \in$.

   (a) (10 p.) Załóżmy, że $\mathbb{E}[|\log(A_1)|] < \infty$. Pokaż, że $\sqrt[n]{A_1 \dots A_n} \to \exp \mathbb{E}[\log(A_1)]$ p.w.

   Rozwiązanie: Z mocnego prawa wielkich liczb wnioskujemy, że

   $$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} A_k} = \exp \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log(A_k) \to \exp \mathbb{E}[\log(A)]$$

   (b) (10 p.) Załóżmy, że $\mathbb{E}[\log(B)] < \infty$. Pokaż, że dla dowolnej $c > 1$, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{B_n} \leq c$ p.w.

   Rozwiązanie: Mamy

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{B_n} > c\right] &= \mathbb{P}[\sqrt[n]{B_n} > c \text{ dla nieskończenie wielu } n] \\ &= \mathbb{P}\left[\limsup_n C_n\right], \end{aligned}$$

   gdzie $C_n = \{\sqrt[n]{B_n} > c\}$. Mamy

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[C_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[\log(c)^{-1} \log(B) > n] \leq \log(c)^{-1} \mathbb{E}[\log(B)] < \infty$$

   Zatem z Lematu Borela-Cantelliego $\mathbb{P}[\limsup_n C_n] = 0$.

   (c) (5 p.) Załóżmy, że $\mathbb{E}[|\log(A)|]$, $\mathbb{E}[\log(B)] < \infty$. Pokaż, że szereg

   $$\sum_{n\geq 0} A_1 A_2 \dots A_n B_{n+1}$$

   jest zbieżny p.w.

   Rozwiązanie: Z poprzednich dwóch podpunktów, dla dowolnej stałej $c > 1$

   $$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_1 A_2 \dots A_n B_{n+1}} \leq e^{\mathbb{E}[\log(A)]} c$$

   Skoro $A \leq 1$, to $\mathbb{E}[\log(A)] < 0$ i dla dostatecznie małego c, $e^{\mathbb{E}[\log(A)]} c < 1$. Zbieżność wynika z kryterium Cauchy'ego.

2. Niech $(U_n)_n$ będzie ciągiem stochastycznie niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0,1]$.

(a) (5 p.) Pokaż, że zmienne U_1 oraz $1 - U_1$ mają taki sam rozkład.

Rozwiązanie: Wiemy, że dla $t \in [0,1]$, $F_U(t) = t$ i stąd

$$\mathbb{P}[1 - U \leq t] = \mathbb{P}[U > 1 - t] = 1 - F_U(1 - t) = t.$$

(b) (5 p.) Pokaż, że $\min_{1 \leq k \leq n} U_k$ zbiega do 0 według prawdopodobieństwa, gdy $n \to \infty$.

Rozwiązanie: Dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left[\min_{1 \leq k \leq n} U_k > \varepsilon\right] = \mathbb{P}[U > \varepsilon]^n = (1 - \varepsilon)^n \to 0.$$

(c) (10 p.) Pokaż, że dla $\lambda > 0$, $X_n = \frac{n}{\lambda} \min_{1 \leq j \leq n} U_j$ zbiega słabo do rozkładu wykładniczego $\mathcal{E}xp(\lambda)$.

Rozwiązanie: Dla $t \geq 0$

$$\mathbb{P}[X_n > t] = \mathbb{P}\left[U > \frac{\lambda t}{n}\right]^n = \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \to e^{-\lambda t}.$$

(d) (5 p.) Wykaż, że zmienne losowe $Y_n = 1 - e^{-\lambda X_n}$ zbiegają słabo do zmiennej losowej o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0,1]$.

Rozwiązanie: Funkcja $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ dla $t \geq 0$ jest dystrybuantą zmiennej losowej X o rozkładzie wykładniczym $\mathcal{E}xp(\lambda)$. Jeżeli X_n zbiegają słabo do X, to $Y_n = F(X_n)$ zbiegają słabo do $F(X)$, która ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[0,1]$.

3. Niech (X_1, X_2) będzie wektorem losowym o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 4 \end{pmatrix}\right)$, gdzie $|\rho| < 2$. Niech M będzie niezależną od niego zmienną z rozkładem $\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2$, gdzie $\alpha \in [0,1]$. Definiujemy zmienną losową X_M przez

$$X_M = \begin{cases} X_1 & \text{gdy} \quad M = 1 \\ X_2 & \text{gdy} \quad M = 2 \end{cases}.$$

(a) (5 p.) Oblicz $\mathbb{E}[(X_1 + X_2)^2]$.

Rozwiązanie: $\mathbb{E}[(X_1 + X_2)^2] = 1 + 2\rho + 4$.

(b) (5 p.) Jaki rozkład ma zmienna $X_1 + X_2$?

Rozwiązanie: $\mathcal{N}(0, 5 + 2\rho)$.

(c) (5 p.) Oblicz $\mathbb{E}[X_M^2]$.

Rozwiązanie: $\mathbb{E}[X_M^2] = \alpha\mathbb{E}[X_1^2] + (1-\alpha)\mathbb{E}[X_2^2] = \alpha + 4(1-\alpha) = 4 - 3\alpha$.

(d) (10 p.) Znajdź rozkład X_M.

Rozwiązanie: Mamy $\mathbb{P}[X_M \in A] = \alpha\mathbb{P}[X_1 \in A] + (1-\alpha)\mathbb{P}[X_2 \in A]$, skąd

$$f_{X_M}(x) = \alpha\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} + (1-\alpha)\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/8}.$$

4. Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będzie wektorem losowym z macierzą kowariancji

$$C = Cov(\mathbf{X}) = (Cov(X_i, X_j))_{i,j \leq n}$$

i wektorze średnich $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$. Niech $\langle \cdot | \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$.

(a) (10 p.) Pokaż, że dla dowolnego $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\langle C\xi | \xi \rangle = \mathbb{E}[\langle \mathbf{X} | \xi \rangle^2]$.

Rozwiązanie: Mamy

$$\begin{aligned} \langle C\xi | \xi \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) \xi_j \right) \xi_i = \sum_{i,j} Cov(\xi_i X_i, \xi_j X_j) \\ &= Cov\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i X_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j X_j \right) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i X_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \xi_j X_j \right] \\ &= \mathbb{E}\left[\langle \xi | \mathbf{X} \rangle^2 \right]. \end{aligned}$$

(b) (10 p.) Pokaż, że $\mathbb{P}[\mathbf{X} \in \mathrm{Im}(C)] = 1$. Wskazówka: $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Ker}(C)^{\perp}$.

Rozwiązanie: Niech $\eta_1, \ldots, \eta_k$ będzie bazą $\mathrm{Ker}(C)$. Wówczas dla $i \leq k$,

$$0 = \langle C\eta_i | \eta_i \rangle = \mathbb{E}\left[\langle \mathbf{X} | \eta_i \rangle^2 \right],$$

stąd

$$\mathbb{P}[\langle \mathbf{X} | \eta_i \rangle = 0] = 1.$$

Skoro

$$\{\mathbf{X} \in \mathrm{Im}(C)\} = \{\langle \mathbf{X} | \eta_1 \rangle = 0\} \cap \ldots \cap \{\langle \mathbf{X} | \eta_k \rangle = 0\},$$

to $\{\mathbf{X} \in \mathrm{Im}(C)\}$ jako przekrój skończonej liczby zbiorów miary pełnej ma miarę pełną.

(c) (5 p.) Załóżmy, że $\mathbf{X}$ posiada gęstość względem n-wymiarowej miary Lebesgue'a. Pokaż, że C jest odwracalna.

Rozwiązanie: Jeżeli C nie jest odwracalna, to $\mathrm{Im}(C)$ jest właściwą podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$ i w szczególności ma miarę zero. Jest to niemożliwe, ponieważ

$$1 = \mathbb{P}[\mathbf{X} \in \mathrm{Im}(C)] = \int_{\mathrm{Im}(C)} f(x)\, \mathrm{d}x.$$