Uniwersytet Wrocławski, Instytut Matematyczny

Kolokwium nr 2

imię i nazwisko: ____________________

Kolokwium składa się z 6 stron oraz 4 zadań. Na drugiej stronie znajduje się spis ważniejszych rozkładów. Dwie ostatnie strony stanowią brudnopis. Na rozwiązanie wszystkich zadań jest 100 minut. Zacznij od spokojnego (!) przeczytania treści wszystkich zadań i zacznij od najłatwiejszego. Powodzenia.

zadanie	1	2	3	4	Σ
punkty	25	25	25	25	100
wynik					

1. Niech $(A_n)_n$ i $(B_n)_n$ będą dwoma niezależnymi ciągami niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie. Załóżmy, że $B_n \geq 1$, $1 \geq A_n \geq 0$ i $\mathbb{P}[A_n = 1] < 1$ dla każdego $n \in$.
   (a) (10 p.) Załóżmy, że $\mathbb{E}[|\log(A_1)|] < \infty$. Pokaż, że $\sqrt[n]{A_1 \dots A_n} \to \exp \mathbb{E}[\log(A_1)]$ p.w.
   (b) (10 p.) Załóżmy, że $\mathbb{E}[\log(B)] < \infty$. Pokaż, że dla dowolnej $c > 1$, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{B_n} \leq c$ p.w.
   (c) (5 p.) Załóżmy, że $\mathbb{E}[|\log(A)|]$, $\mathbb{E}[\log(B)] < \infty$. Pokaż, że szereg

$$\sum_{n\geq 0} A_1 A_2 \dots A_n B_{n+1}$$

jest zbieżny p.w.

2. Niech $(U_n)_n$ będzie ciągiem stochastycznie niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0,1]$.
   (a) (5 p.) Pokaż, że zmienne U_1 oraz $1 - U_1$ mają taki sam rozkład.
   (b) (5 p.) Pokaż, że $\min_{1\le k\le n} U_k$ zbiega do 0 według prawdopodobieństwa, gdy $n \to \infty$.
   (c) (10 p.) Pokaż, że dla $\lambda > 0$, $X_n = \frac{n}{\lambda} \min_{1\le j\le n} U_j$ zbiega słabo do rozkładu wykładniczego $\mathcal{E}xp(\lambda)$.
   (d) (5 p.) Wykaż, że zmienne losowe $Y_n = 1 - e^{-\lambda X_n}$ zbiegają słabo do zmiennej losowej o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0,1]$.

3. Niech (X_1, X_2) będzie wektorem losowym o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 4 \end{pmatrix}\right)$, gdzie $|\rho| < 2$. Niech M będzie niezależną od niego zmienną z rozkładem $\alpha\delta_1 + (1 - \alpha)\delta_2$, gdzie $\alpha \in [0, 1]$. Definiujemy zmienną losową X_M przez

$$X_M = \begin{cases} X_1 & \text{gdy} \quad M = 1 \\ X_2 & \text{gdy} \quad M = 2 \end{cases} .$$

(a) (5 p.) Oblicz $\mathbb{E}[(X_1 + X_2)^2]$.

(b) (5 p.) Jaki rozkład ma zmienna $X_1 + X_2$?

(c) (5 p.) Oblicz $\mathbb{E}[X_M^2]$.

(d) (10 p.) Znajdź rozkład X_M.

4. Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będzie wektorem losowym z macierzą kowariancji

$$C = Cov(\mathbf{X}) = (Cov(X_i, X_j))_{i,j \leq n}$$

i wektorze średnich $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mathbf{0}$. Niech $\langle \cdot | \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$.

   (a) (10 p.) Pokaż, że dla dowolnego $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\langle C\xi | \xi \rangle = \mathbb{E}[\langle \mathbf{X} | \xi \rangle^2]$.

   (b) (10 p.) Pokaż, że $\mathbb{P}[\mathbf{X} \in \mathrm{Im}(C)] = 1$. Wskazówka: $\mathrm{Im}(C) = \mathrm{Ker}(C)^{\perp}$.

   (c) (5 p.) Załóżmy, że $\mathbf{X}$ posiada gęstość względem n-wymiarowej miary Lebesgue'a. Pokaż, że C jest odwracalna.