# Magia czy matematyka?

Piotr Dyszewski

Uniwersytet Wrocławski

Robert Hummer

### Twierdzenie

Niech talia $2n$ kart początkowo leży zakryta. Po dowolnej liczbie operacji typu "odwróć dwie i przełóż losowo" zachodzi następująca własność:

$$\text{liczba odkrytych kart na pozycjach parzystych} = \text{liczba odkrytych kart na pozycjach nieparzystych.}$$

## Twierdzenie

Niech talia $2n$ kart początkowo leży zakryta. Po dowolnej liczbie operacji typu “odwróć dwie i przełóż losowo” zachodzi następująca własność:

liczba odkrytych kart na pozycjach parzystych

$$=$$

liczba odkrytych kart na pozycjach nieparzystych.

## Dowód.

$$\blacksquare\blacksquare, \quad \square\blacksquare, \quad \blacksquare\square, \quad \square\square,$$

$$\square\square, \quad \square\blacksquare, \quad \blacksquare\square, \quad \blacksquare\blacksquare,$$

$\square$

■ ■ ■ □

■ ■ ■ □

**Twierdzenie**

Przy każdym tasowaniu Hummera jedna karta zwrócona jest w innym kierunku niż pozostałe.

■ ■ ■ □

## Twierdzenie

Przy każdym tasowaniu Hummera jedna karta zwrócona jest w innym kierunku niż pozostałe.

## Dowód.

Pierwszy przypadek:

□ ■ ■ ■

□ ■ □ □

□

■ ■ ■ □

## Twierdzenie

Przy każdym tasowaniu Hummera jedna karta zwrócona jest w innym kierunku niż pozostałe.

## Dowód.

Pierwszy przypadek:

□ ■ ■ ■

□ ■ □ □

Drugi przypadek:

■ ■ □ ■

□

■ ■ ■ □

### Twierdzenie

Przy każdym tasowaniu Hummera jedna karta zwrócona jest w innym kierunku niż pozostałe.

### Dowód.

Pierwszy przypadek:

□ ■ ■ ■

□ ■ □ □

Drugi przypadek:

■ ■ □ ■

Trzeci przypadek

■ ■ ■ □

□

Karty na pozycjach 1 i 3 oraz karty na pozycjach 2 i 4 nazywamy towarzyszami

Karty na pozycjach 1 i 3 oraz karty na pozycjach 2 i 4 nazywamy towarzyszami

### Twierdzenie

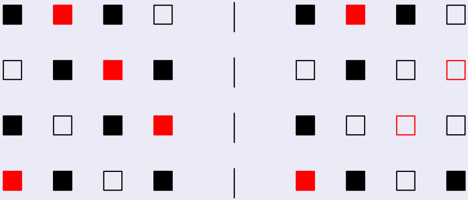
Nasza karta jest zawsze stowarzyszona z kartą zwróconą inaczej niż pozostałe.

Karty na pozycjach 1 i 3 oraz karty na pozycjach 2 i 4 nazywamy towarzyszami

### Twierdzenie

Nasza karta jest zawsze stowarzyszona z kartą zwróconą inaczej niż pozostałe.

### Dowód.



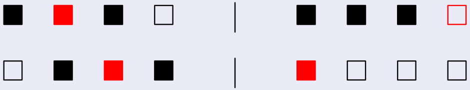
## Twierdzenie

Instrukcje odnajdywania karty odwracają jedną kartę i jej towarzysza.

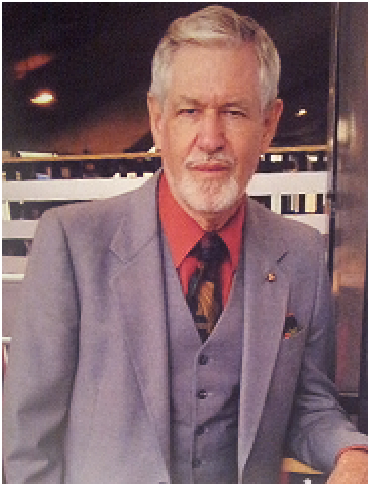
## Twierdzenie

Instrukcje odnajdywania karty odwracają jedną kartę i jej towarzysza.

## Dowód.



□



Norman Laurence Gilbreath

## Tasowanie Gilbreatha

- Rozdaj dowolną liczbę kart z wierzchu talii, tworząc drugi stos kart.
- Przetasuj nowy stos z pozostałą częścią talii (tasowaniem typu riffle).

## Tasowanie Gilbreatha

- Rozdaj dowolną liczbę kart z wierzchu talii, tworząc drugi stos kart.
- Przetasuj nowy stos z pozostałą częścią talii (tasowaniem typu riffle).

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & 4 \\
2 & & & & & 5 \\
3 & & 5 & & & 6 \\
4 & & 6 & 4 & & 3 \\
5 & \rightarrow & 7 & 3 & \rightarrow & 7 \\
6 & & 8 & 2 & & 2 \\
7 & & 9 & 1 & & 8 \\
8 & & 10 & & & 9 \\
9 & & & & & 1 \\
10 & & & & & 10
\end{array}
$$

$$\begin{array}{ccc}
1 & & \pi(1) \\
2 & & \pi(2) \\
3 & & \pi(3) \\
\dots & \to & \dots \\
\dots & & \dots \\
10 & & \pi(10)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \pi(1) \\ 2 & & \pi(2) \\ 3 & & \pi(3) \\ \dots & \to & \dots \\ \dots & & \dots \\ 10 & & \pi(10) \end{array}$$

## Twierdzenie

Niech $\pi$ będzie tasowaniem Gilbreatha.

$$
\begin{array}{ccc}
1 & & \pi(1) \\
2 & & \pi(2) \\
3 & & \pi(3) \\
\dots & \rightarrow & \dots \\
\dots & & \dots \\
10 & & \pi(10)
\end{array}
$$

### Twierdzenie

Niech $\pi$ będzie tasowaniem Gilbreatha.

1. Dla każdego *j*, pierwsze *j* kart $\{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(j)\}$ dają różne reszty przy dzieleniu przez *j*.

$$
\begin{array}{ccc}
1 & & \pi(1) \\
2 & & \pi(2) \\
3 & & \pi(3) \\
\dots & \to & \dots \\
\dots & & \dots \\
10 & & \pi(10)
\end{array}
$$

**Twierdzenie**

Niech $\pi$ będzie tasowaniem Gilbreatha.

1. Dla każdego $j$, pierwsze $j$ kart $\{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(j)\}$ dają różne reszty przy dzieleniu przez $j$.
2. Dla każdego $j$, pierwsze $j$ kart $\{\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(j)\}$ tworzy ciąg kolejnych liczb.

# Podnoszenie do kwadratu: $x^2$

## Podnoszenie do kwadratu: $x^2$

$$2 \to 4 \to 16 \to 256 \to 65536 \ldots$$

Podnoszenie do kwadratu: $x^2$

$$2 \to 4 \to 16 \to 256 \to 65536\dots$$

$$1/2 \to 1/4 \to 1/16 \to 1/256 \to 1/65536\dots$$

Podnoszenie do kwadratu: $x^2$

$$2 \to 4 \to 16 \to 256 \to 65536 \ldots$$

$$1/2 \to 1/4 \to 1/16 \to 1/256 \to 1/65536 \ldots$$

$$-1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \ldots$$

Podnoszenie do kwadratu: $x^2$

$$2 \to 4 \to 16 \to 256 \to 65536 \ldots$$

$$1/2 \to 1/4 \to 1/16 \to 1/256 \to 1/65536 \ldots$$

$$-1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \ldots$$

Podnoszenie do kwadratu i dodawanie jeden: $x^2 + 1$

$$0 \to 1 \to 2 \to 5 \to 26 \ldots$$

Podnoszenie do kwadratu: $x^2$

$$2 \to 4 \to 16 \to 256 \to 65536 \ldots$$

$$1/2 \to 1/4 \to 1/16 \to 1/256 \to 1/65536 \ldots$$

$$-1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \ldots$$

Podnoszenie do kwadratu i dodawanie jeden: $x^2 + 1$

$$0 \to 1 \to 2 \to 5 \to 26 \ldots$$

Podnoszenie do kwadratu i dodawanie minus jeden: $x^2 - 1$

$$0 \to -1 \to 0 \to -1 \to 0 \ldots$$

Podnoszenie do kwadratu: $x^2$

$$2 \to 4 \to 16 \to 256 \to 65536 \ldots$$

$$1/2 \to 1/4 \to 1/16 \to 1/256 \to 1/65536 \ldots$$

$$-1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \ldots$$

Podnoszenie do kwadratu i dodawanie jeden: $x^2 + 1$

$$0 \to 1 \to 2 \to 5 \to 26 \ldots$$

Podnoszenie do kwadratu i dodawanie minus jeden: $x^2 - 1$

$$0 \to -1 \to 0 \to -1 \to 0 \ldots$$

Podnoszenie do kwadratu i dodawanie minus dwa: $x^2 - 2$

$$0 \to -2 \to 2 \to 2 \to 2 \ldots$$

Podnoszenie do kwadratu i dodawanie $c$: $x^2 + c$

$$0 \to c \to c^2 + c \to c^4 + 2c^3 + c^2 + c \to \dots$$

Dla jakich wartości $c$ ten ciąg wraca do zera?

Podnoszenie do kwadratu i dodawanie $c$: $x^2 + c$

$$0 \to c \to c^2 + c \to c^4 + 2c^3 + c^2 + c \to \dots$$

Dla jakich wartości $c$ ten ciąg wraca do zera?
Jeżeli $c^2 + c = 0$, to $c = 0$ lub $c = -1$.

$$0 \to -1 \to 0 \to -1 \to 0 \dots$$

Podnoszenie do kwadratu i dodawanie $c$: $x^2 + c$

$$0 \to c \to c^2 + c \to c^4 + 2c^3 + c^2 + c \to \dots$$

Dla jakich wartości $c$ ten ciąg wraca do zera?
Jeżeli $c^2 + c = 0$, to $c = 0$ lub $c = -1$.

$$0 \to -1 \to 0 \to -1 \to 0 \dots$$

Jeżeli $c^4 + 2c^3 + c^2 + c = 0$ to $c = 0$ lub $c^3 + 2c^2 + c + 1 = 0$. W tym drugim przypadku

$$c = -\frac{\sqrt[3]{100 + 12\sqrt{69}}}{6} - \frac{2}{\sqrt[3]{100 + 12\sqrt{69}}} - \frac{2}{3} \approx -1.75487\dots$$

$$0 \to -1.75487\dots \to (-1.75487\dots)^2 - 1.75487\dots = 1.32471\dots \to 0$$

$$(c^4 + 2c^3 + c^2 + c)^2 + c = \\ c^8 + 4c^7 + 6c^6 + 6c^5 + 5c^4 + 2c^3 + c^2 + c.$$

$c_1 = -1.3107\ldots$:

$$0, \to -1.3107\ldots \to 0.4072\ldots \to -1.1448\ldots, \to 0$$

$c_2 = -1.9407\ldots$ :

$$0, \to -1.9407\ldots \to 1.8259\ldots \to 1.3931\ldots \to 0$$

- $c = -1.75487\ldots$

| 2 | 1 | 3 |
|---|---|---|
| 0 | $-1.75487\ldots$ | $1.32471\ldots$ |

- $c = -1.75487\ldots$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ \hline 0 & -1.75487\ldots & 1.32471\ldots \end{array}$$

- $c_1 = -1.3107\ldots$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 4 & 2 \\ \hline 0 & -1.3107\ldots & 0.4072\ldots & -1.1448\ldots \end{array}$$

- $c = -1.75487\ldots$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ \hline 0 & -1.75487\ldots & 1.32471\ldots \end{array}$$

- $c_1 = -1.3107\ldots$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 4 & 2 \\ \hline 0 & -1.3107\ldots & 0.4072\ldots & -1.1448\ldots \end{array}$$

- $c_2 = -1.9407\ldots$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 0 & -1.9407\ldots & 1.8259\ldots & 1.3931\ldots \end{array}$$

- $c_1 = -1.3107\ldots$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 4 & 2 \\ \hline 0 & -1.3107\ldots & 0.4072\ldots & -1.1448\ldots \end{array}$$

$(1324)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

- $c_1 = -1.3107\ldots$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 4 & 2 \\ \hline 0 & -1.3107\ldots & 0.4072\ldots & -1.1448\ldots \end{array}$$

$(1324)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

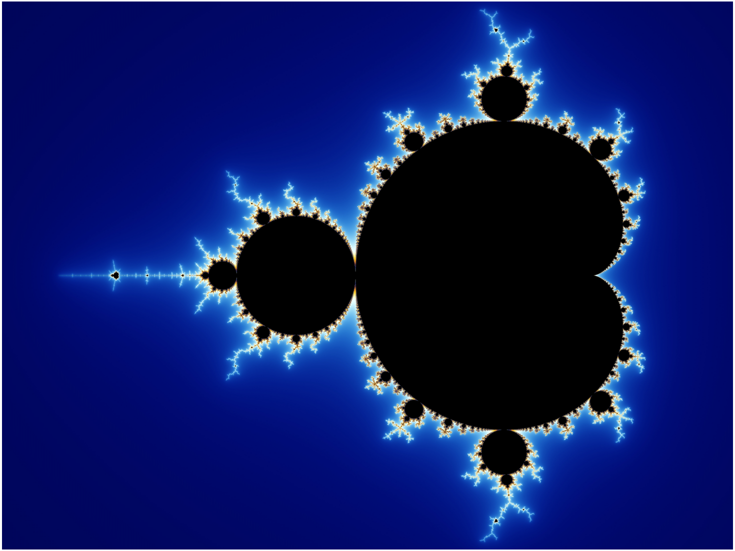
- $c_2 = -1.9407\ldots$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 0 & -1.9407\ldots & 1.8259\ldots & 1.3931\ldots \end{array}$$

$(1234)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}$$

$f(z) = z^2 + c,\ z, c \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$



Nicolaas Govert de Bruijn

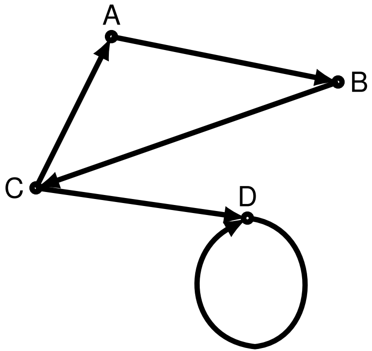
$$\spadesuit \quad \heartsuit \quad \diamondsuit \quad \clubsuit \rightarrow 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$

**Definicja**

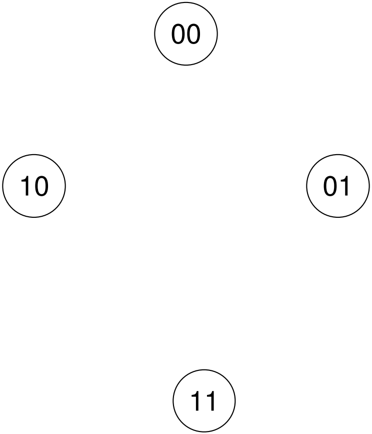
Ciąg de Bruijna rzędu $k$ to ciąg zer i jedynek o długości $2^k$, taki że każdy możliwy podciąg długości $k$ pojawia się dokładnie jeden raz (traktując ciąg cyklicznie, „z zawinięciem na końcu”).

**Przykład**

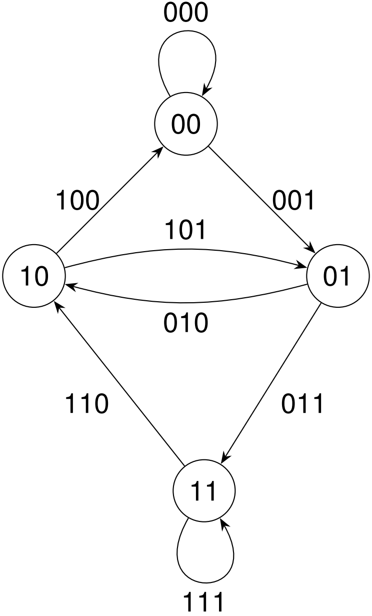
11100010 jest ciągiem de Bruijna dla $k = 3$.

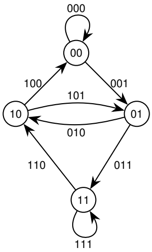

A
B
C
D

## Graf de Bruijna rzędu $k = 3$



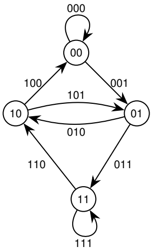
Graf de Bruijna rzędu $k = 3$






## Definicja

Cykl Eulera w skierowanym grafie to przejście (zgodne ze strzałkami), które używa każdej krawędzi dokładnie raz i kończy się w punkcie, w którym się zaczęło.




## Definicja

Cykl Eulera w skierowanym grafie to przejście (zgodne ze strzałkami), które używa każdej krawędzi dokładnie raz i kończy się w punkcie, w którym się zaczęło.

11, 10, 01, 10, 00, 00, 01, 11

11010001

## Uwaga

Jeśli mamy ciąg de Bruijna rzędu $k$, możemy wykonać sztuczkę z $2^k$ kartami.

## Uwaga

Jeśli mamy ciąg de Bruijna rzędu $k$, możemy wykonać sztuczkę z $2^k$ kartami.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 00000 | 8♣, A♣, 2♣, 4♣, A♠ | 01000 | 8♠, 8♦, 8♣, A♣, 2♣ |
| 00001 | A♣, 2♣, 4♣, A♠, 2♦ | 01001 | A♠, 2♦, 5♣, 3♠, 6♦ |
| 00010 | 2♣, 4♣, A♠, 2♦, 5♣ | 01010 | 2♠, 4♦, 8♠, 8♦, 8♣ |
| 00011 | 3♣, 6♣, 5♠, 3♥, 7♦ | 01011 | 3♠, 6♦, 4♠, A♥, 3♦ |
| 00100 | 4♣, A♠, 2♦, 5♣, 3♠ | 01100 | 4♠, A♥, 3♦, 7♣, 7♠ |
| 00101 | 5♣, 3♠, 6♦, 4♠, A♥ | 01101 | 5♠, 3♥, 7♦, 6♠, 5♥ |
| 00110 | 6♣, 5♠, 3♥, 7♦, 6♠ | 01110 | 6♠, 5♥, 2♥, 5♦, 2♠ |
| 00111 | 7♣, 7♠, 7♥, 6♥, 4♥ | 01111 | 7♠, 7♥, 6♥, 4♥, 8♥ |
| 10000 | 8♦, 8♣, A♣, 2♣, 4♣ | 11000 | 8♥, A♦, 3♣, 6♣, 5♠ |
| 10001 | A♦, 3♣, 6♣, 5♠, 3♥ | 11001 | A♥, 3♦, 7♣, 7♠, 7♥ |
| 10010 | 2♦, 5♣, 3♠, 6♦, 4♠ | 11010 | 2♥, 5♦, 2♠, 4♦, 8♠ |
| 10011 | 3♦, 7♣, 7♠, 7♥, 6♥ | 11011 | 3♥, 7♦, 6♠, 5♥, 2♥ |
| 10100 | 4♦, 8♠, 8♦, 8♣, A♣ | 11100 | 4♥, 8♥, A♦, 3♣, 6♣ |
| 10101 | 5♦, 2♠, 4♦, 8♠, 8♦ | 11101 | 5♥, 2♥, 5♦, 2♠, 4♦ |
| 10110 | 6♦, 4♠, A♥, 3♦, 7♣ | 11110 | 6♥, 4♥, 8♥ A♦, 3♣ |
| 10111 | 7♦, 6♠, 5♥, 2♥, 5♦ | 11111 | 7♥, 6♥, 4♥ 8♥ A♦ |