TEORIA ODNOWY

Piotr Dyszewski

2021

Przedmowa

Spis treści

1

Wstęp

Wiele procesów pojawiających się w teorii prawdopodobieństwa oraz zastosowaniach matematyki cechuje się regeneracyjną strukturą. Najprostszym przykładem takiego procesu jest spacer losowy, czyli suma niezależnych, jednakowo rozłożonych zmiennych losowych. Główna część wykładu poświęcona będzie opisowi asymptotycznego zachowania takiego procesu. Pozwoli nam to w przyszłości badać bardziej złożone struktury.

W pierwszym rozdziale sformułujemy główne problemy i dokonamy szybkiego przeglądu zagadnień poruszanych podczas reszty wykładu. Zobaczymy między innymi jak teoria odnowy wiąże się z teorią procesów gałązkowych.

1.1 Problem odnowy

Od teraz niech X, X_1, $X_2 \ldots$ oznacza ciąg nieujemnych, stochastycznie niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie (iid) o dystrybuancie F i wartości oczekiwanej μ, tj.

$$\mu = \mathbb{E}X = \int_0^\infty x\, F(dx).$$

Niech dodatkowo S_0 będzie nieujemną zmienną losową niezależną od X, X_1, $X_2 \ldots$ o dystrybuancie G. Definiujemy

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n \geq 1. \tag{1.1}$$

Tak zdefiniowany proces stochastyczny stanowi jeden z podstawowych obiektów w teorii odnowy.

Definicja 1.1
Ciąg $\{S_n\}_{n\geq 0}$ dany przez (1.1) nazywamy *strumieniem odnowy*. Strumień odnowy nazywamy *opóźnionym*, jeżeli $\mathbb{P}[S_0 > 0] > 0$. W przeciwnym wypadku $\{S_n\}_{n\geq 0}$ nazywamy *czystym strumieniem odnowy*.

W znakomitej większości przypadków skupimy się na czystym procesie odnowy. Bywa jednak, jak przekonamy się w **rozdziale 3**, że zmyślny dobór opóźnienia S_0 bardzo ułatwia analizę strumienia odnowy. Zauważmy,że strumień odnowy jest specjalnym przypadkiem spaceru losowego o dodatnich skokach X_j i rozkładzie początkowym S_0. Ogólnymi spacerami losowymi będziemy zajmowali się w dalszej części wykładu w **rozdziale ?**.

Założenie, o znaku X pozwala na bardzo prostą interpretację strumienia odnowy.

Przykład 1.2
Załóżmy, że mamy do dyspozycji nieskończoną liczbę żarówek produkowanych w tej samej fabryce. Możemy przyjąć, się czasy działania (czas do przepalenia) poszczególnych żarówek tworzą ciąg iid, powiedzmy $\{X_k\}_{k\geq 0}$. Załóżmy, że pierwszą żarówkę instalujemy w chwili $S_0 = 0$. W momencie w którym pierwsza żarówka się przepala, czyli w chwili $S_1 = X_1$, magiczny dozorca bezzwłocznie wymieniona przepaloną żarówkę na nową. Kolejne żarówki również wymieniane są bezzwłocznie. Wówczas kolejne momenty odnowienia systemu (przepalania się kolejnych żarówek) tworzą czysty proces odnowy $\{S_n\}_{n\geq 0}$.

Przykład 1.3
Załóżmy, że nasz zaprzyjaźniony dozorca wymienia żarówki jak w **Przykładzie 1.2**. Przypuśćmy, że odwiedzamy go w pewnym momencie. Jeżeli nie zjawimy się dokładnie w momencie wymiany żarówki, proces odnowień (wymian), który obserwujemy będzie opóźnionym procesem odnowy, w którym S_0 ma rozkład czasu oczekiwania od naszego przybycia do pierwszej wymiany.

Poniższe pytania posłużą nam za pretekst do wprowadzenia obiektów, które będziemy badali w pierwszej części wykładu.

Pytanie 1.4
Ile wynosi $N(t)$ liczba odnowień do czasu $t > 0$?

Pytanie 1.5
Co możemy powiedzieć o $N(t)$ przy $t \to \infty$?

Pytanie 1.6
Ile odnowień miało miejsce w przedziale czasowym $(s, t]$?

Pytanie 1.7
W chwili $t > 0$ ile wynosi czas do najbliższej odnowy?

Przyjmijmy konwencję, że w chwili S_0 również następuje odnowa. W odpowiedzi na **Pytanie 1.4**, łatwo stwierdzić, że

$$N(t) = \#\{n \geq 0 \,:\, S_n \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(S_n). \tag{1.2}$$

Definicja 1.8
Proces stochastyczny $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ dany przez (1.2) nazywamy *procesem odnowy*.

Zauważmy, że zmienną $N(t)$ możemy zapisać w równoważnej formie

$$N(t) = \inf\{n \geq 0 \,:\, S_n > t\}.$$

Co w szczególności oznacza, dla każdego $t > 0$, $N(t)$ jest czasem zatrzymania. Rzeczywiście, określmy ciąg σ-ciał przez

$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_k \,:\, k \leq n).$$

Zauważmy, że $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ tworzą ciąg wstępujący, tj. $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$. Wstępujący ciąg σ-ciał nazywamy *filtracją*.

Definicja 1.9
Zmienną losową τ przyjmującą wartości naturalne nazywamy *czasem zatrzymania* względem filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$, jeżeli dla każdego n,

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Fakt 1.10
Niech $\{S_n\}_{n \geq 0}$ będzie strumieniem odnowy. Wówczas dla każdego $t \geq 0$, zmienna losowa $N(t)$ zadana przez (1.2) jest czasem zatrzymania.

Dowód. Pozostawiamy jako **Zadanie** □

Aby utwierdzić się w przekonaniu, że czasy zatrzymania są wygodne w analizie rozważmy tzw. *Tożsamość Walda*.

Lemat 1.11 (Tożsamość Walda)
Rozważmy czysty strumień odnowy $\{S_n\}_{n\geq 0}$. Niech τ będzie czasem zatrzymania względem filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$. Załóżmy, że $\mathbb{E}\tau < \infty$. Wówczas

$$\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\tau} X_k\right] = \mathbb{E}\tau\mathbb{E}X.$$

Dowód. Jeżeli τ jest czasem zatrzymania, to

$$\{\tau \geq k\} = \{\tau < k\}^c = \{\tau \leq k-1\} \in \mathcal{F}_{k-1}.$$

W szczególności zmienne losowe X_k oraz $\mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}}$ są niezależne. Skoro zmienne X_k są nieujemne, to z Twierdzenia Fubiniego

$$\mathbb{E}S_\tau = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\tau} X_k\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[X_k \mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}}\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}X_k \mathbb{P}[\tau \geq k] = \mathbb{E}X \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[\tau \geq k] = \mathbb{E}X\mathbb{E}\tau.$$

□

Dla chwili $t \geq 0$ zmienna losowa $S_{N(t)}$ oznacza czas następnej odnowy. Z **Lematu 1.11** wynika, że dla czystego procesu odnowy

$$\mathbb{E}S_{N(t)} = \mathbb{E}N(t)\mathbb{E}X$$

o ile $\mathbb{E}N(t) < \infty$. W ten sposób powstaje konieczność zrozumienia funkcji $t \mapsto \mathbb{E}N(t)$. Funkcja ta będzie dla nas szczególnie istotna.

Definicja 1.12
Funkcją odnowy nazywamy funkcję $U\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ daną przez

$$U(t) = \mathbb{E}N(t). \tag{1.3}$$

Zauważmy, że stosując Twierdzenie Fubiniego do (1.2) otrzymujemy

$$U(t) = \mathbb{E}N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[S_n \leq t]. \tag{1.4}$$

Nie jest jeszcze jasne, czy szereg pojawiający się po prawej stronie równania (1.4) jest zbieżny dla każdego $t \geq 0$. Rzeczywiście, jeżeli $X = 0$ p.w., to $S_n = 0$ p.w. dla każdego $n \in \mathbb{N}$ co pociąga $U(t) = \infty$. Okazuje się, że jest to jedyny przypadek, w którym szereg definiujący $U(t)$ jest rozbieżny.

Fakt 1.13
Jeżeli $\mathbb{P}[X = 0] < 1$, to $U(t) < \infty$ dla każdego $t \geq 0$. W szczególności $N(t) < \infty$ p.w. dla każdego $t \geq 0$.

Przypomnijmy, że transformatę Laplace'a nieujemnej zmiennej losowej X definiujemy jako funkcję zmiennej $u > 0$ zadaną wzorem

$$\lambda_X(u) = \mathbb{E}e^{-uX}.$$

Wówczas dla nieujemnych i niezależnych zmiennych losowych X i Y mamy

$$\lambda_{X+Y}(u) = \lambda_X(u)\lambda_Y(u).$$

W szczególności $\lambda_{S_n}(u) = \lambda_{S_0}(u)\lambda_X(u)^n$. (**Zadanie**)

Dowód Faktu 1.13. Niech $u > 0$. Skoro $\mathbb{P}[X = 0] < 1$, to $\lambda_X(u) < 1$. Na mocy nierówności Czebyszewa

$$U(t) = \mathbb{E}N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[S_n \leq t] \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{tu}\mathbb{E}e^{-uS_n} = \frac{\lambda_{S_0}(u)e^{ut}}{1 - \lambda_X(u)} < \infty.$$

□

Skoro wiemy, że $\mathbb{E}N(t) < \infty$, to możemy sformułować zapowiedziany już wcześniej wniosek.

Wniosek 1.14
Dla czystego strumienia odnowy

$$\mathbb{E}S_{N(t)} = \mathbb{E}N(t)\mathbb{E}X, \quad t \geq 0.$$

Przejdźmy teraz do opisu procesu odnowy dla dużych wartości t. Poniższe twierdzenie stanowiące prawo wielkich liczb dla procesu $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ odpowiada na **Pytanie 1.5**.

Twierdzenie 1.15
Jeżeli $\mathbb{P}[X = 0] < 1$, to

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} \quad p.w.$$

Dowód. Zauważmy, że $N(t) \to \infty$ p.w. przy $t \to \infty$. Dodatkowo, na mocy mocnego prawa wielkich liczb $\frac{S_n}{n} \to \mu$ p.w. Zauważmy, że ostatnia zbieżność ma również miejsce wzdłuż dowolnego podciągu uciskającego do $+\infty$. Zatem

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu \quad p.w.$$

Mamy również

$$S_{N(t)-1} \leq t \leq S_{N(t)}$$

a co za tym idzie

$$\frac{S_{N(t)-1}}{N(t)-1} \leq \frac{t}{N(t)-1} \leq \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \frac{N(t)}{N(t)-1}.$$

Teza wynika z twierdzenia o trzech ciągach. □

Udowodnione właśnie twierdzenie mówi, że $N(t)$ jest równe w przybliżeniu $\frac{t}{\mu}$. W tym momencie można zadać pytanie o błąd tego przybliżenia i o to, czy zawiera on losowe fluktuacje. Innymi słowy, czy zachodzi twierdzenie graniczne. Przykładowo, czy w sytuacji gdy $\mathbb{E}X^2 < \infty$ zachodzi zbieżność według rozkładu

$$\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma)$$

dla pewnej $\sigma > 0$? Okazuje się, że odpowiedź na to pytanie jest już w naszym zasięgu. Wymaga ona jednak sporo pracy. Chcąc utrzymać lekki charakter tego rozdziału odłożymy twierdzenie graniczne dla $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ do **rozdziału ?** .

Odpowiadając na **Pytanie 1.6** stwierdzamy, że liczba odnowień w przedziale czasowym $(s, t]$ dla $s < t$ wynosi

$$N(s,t] = N(t) - N(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{(s,t]}(S_n).$$

Zauważmy, że powyższa definicja zmiennej losowej $N(s, t]$ automatycznie uogólnia się do borelowskiego $A \subseteq [0, +\infty)$ wzorem

$$N(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_A(S_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{S_n}(A). \tag{1.5}$$

Tutaj N ma podwójny charakter. Dla każdego borelowskiego A, $N(A)$ jest zmienną losową. Dodatkowo dla każdej ustalonej $\omega \in \Omega$, $N_\omega(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{S_n(\omega)}(\cdot)$ jest miarą na σ-ciele zbiorów borelowskich na prostej. Takie odwzorowania nazywamy *miarami losowymi*.

Definicja 1.16
Miarę losową N zadaną przez (1.5) nazywamy *procesem czasu przebywania*.

Zauważmy, że dla nieujemnej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ całka względem miary N dana jest poprzez

$$\int f(x)\, N(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} f(S_n).$$

W praktyce często będziemy spotykali się ze średnią z powyżej całki, czyli z wyrażeniem

$$\mathbb{E}\left[\int f(x)\, N(dx)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[f(S_n)\right].$$

Jest to całka z f względem uśrednionej miary N, którą nazywamy miarą odnowy.

Definicja 1.17
Miarą odnowy nazywamy miarę na $\mathbb{R}$ daną dla $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$ poprzez

$$U(A) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_A(S_n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\mathbb{1}_A(S_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[S_n \in A]. \tag{1.6}$$

Podobnie jak w przypadku procesu czasu przebywania, dla nieujemnej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ całka względem miary U dana jest poprzez

$$\int f(x)\, U(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} f(S_n).$$

Miara odnowy pomoże nam udzielić odpowiedzi na **Pytanie 1.7**. W chwili $t > 0$, czasem do najbliższej odnowy jest *pozostały czas oczekiwania* dany, dla $t \geq 0$ przez

$$S_{N(t)} - t. \tag{1.7}$$

Co potrafimy powiedzieć o rozkładzie zmiennej $S_{N(t)} - t$? Dla $x, t \geq 0$ mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[S_{N(t)} - t > x] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[S_k > t + x,\, N(t) = k] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[S_k > x + t,\, S_{k-1} \leq t,\, S_k > t] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[S_k > x + t,\, S_{k-1} \leq t] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[S_{k-1} + X_k > x + t,\, S_{k-1} \leq t].
\end{aligned}$$

Niech $f_x(s) = \mathbb{P}[X > x + s]$. Wówczas

$$\mathbb{P}[S_{N(t)} - t > x] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} f_x(t - S_n) \mathbb{1}_{[0,t]}(S_n) = \int f_x(t-y) \mathbb{1}_{[0,t]}(y)\, U(dy)$$
$$= \int_{[0,t]} f_x(t-y)\, U(dy).$$

Otrzymaliśmy

$$\mathbb{P}[S_{N(t)} - t > x] = \int_{[0,t]} f_x(t-y)\, U(dy). \tag{1.8}$$

Okazuje się, że dokładne wyznaczenie wartości całki może być kłopotliwe, a otrzymana wielkość może być ciężka do zinterpretowania. Opis asymptotyczny okaże się tutaj o wiele prostszy do uzyskania i zinterpretowania. Jakiego zachowania spodziewamy się po prawej stronie powyższego równania przy $t \to \infty$? $f_x(t) \to 0$ przy $t \to \infty$, więc $f_x(t-y)$ dla „małych wartości y" będzie zaniedbywane. Najistotniejsze będzie zachowanie miary $U(dy)$ dla dużych wartości y. Udowodnione przed chwilą Twierdzenie **??** sugeruje, że gdy $t \to \infty$,

$$\frac{U(t)}{t} = \mathbb{E}\left[\frac{N(t)}{t}\right] \approx \frac{1}{\mu}.$$

Dokładny dowód wymaga jednak subtelniejszej analizy niż ta zaprezentowana do tej pory. W następnym rozdziale zaprezentujemy dowód powyższej zbieżności. Wszystko wskazuje na to, że funkcja U asymptotycznie zachowuje się jak funkcja liniowa. Można bowiem pokazać, co uczynimy w **rozdziale 3**, że przy pewnym technicznym założeniu na rozkład F,

$$U(t, t+h] = U(t+h) - U(t) \approx \frac{h}{\mu}, \quad t \to \infty.$$

Zatem miara $U(dy)$ dla dużych wartości y powinna przypominać miarę Lebesgue'a. Ta nieformalna dyskusja sugeruje, że przy pewnym technicznym założeniu na rozkład F,

$$\int_{[0,t]} f_x(t-y)\, U(dy) \approx \frac{1}{\mu} \int_{[0,t]} f_x(t-y)\, dy \approx \frac{1}{\mu} \int f_x(y)\, dy.$$

Powyższa argumentacja zostanie uściślona w rozdziale czwartym w postaci kluczowego twierdzenia o odnowie. Wtedy też formalnie uzasadnimy, że

$$\mathbb{P}[S_{N(t)} - t > x] \approx \frac{1}{\mu} \int_x^{\infty} \mathbb{P}[X > y]\, dy = 1 - F_I(x).$$

Rozkład F_I zadany przez

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{x} \mathbb{P}[X > y]\, dy$$

nazywamy rozkładem resztowym rozkładu F.

1.2 Proces Poissona

Skupimy się teraz na bardzo ważnym przykładzie procesu odnowy. Załóżmy, że $\{S_n\}_{n\geq 0}$ jest opóźnionym procesem odnowy w którym S_0 oraz X mają rozkład wykładniczy z parametrem $\theta > 0$, t.j. dystrybuanty F i G są dane przez

$$G(x) = F(x) = 1 - e^{-\theta x}, \quad x \geq 0.$$

Wówczas F i G są absolutnie ciągłe z gęstością $f(x) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Dodatkowo $\mu = \mathbb{E}X = \frac{1}{\theta}$. Rozkład wykładniczy posiada własność braku pamięci. Jest to główny powód, dla którego ten rozkład jest szczególnie istotny w teorii odnowy. Dokładniej, dla $s, t > 0$

$$\mathbb{P}[X > t + s \mid X > s] = \mathbb{P}[X > t].$$

Powyższą równość łatwo sprawdzić zauważając, że $\mathbb{P}[X > t + s, X > s] = \mathbb{P}[X > t + s]$ oraz $\mathbb{P}[X > t] = e^{-\theta t}$. Pierwszą jawną korzyścią z założenia przyjętego na rozkład X jest to, że znane są dokładnie rozkłady S_n dla każdego n.

Fakt 1.18
Załóżmy, że S_0 oraz X mają rozkład wykładniczy z parametrem $\theta > 0$. Wówczas S_n ma tzw. rozkład Erlanga, czyli rozkład o gęstości zadanej wzorem

$$f_n(x) = \frac{\theta^{n+1} x^n}{n!} e^{-\theta x}, \quad x \geq 0.$$

Dowód. Dowód indukcyjny pozostawiamy jako **zadanie** . □

Okazuje się, że korzystając z powyższego faktu w łatwy sposób można wyznaczyć rozkład zmiennej $N(t)$. Na początek należy zauważyć, że

$$\{N(t) = 0\} = \{S_0 > t\}.$$

W takim wypadku

$$\mathbb{P}[N(t) = 0] = \mathbb{P}[X > t] = e^{\theta t}.$$

Dla $n \geq 1$ mamy

$$\{N(t) = n\} = \{S_{n-1} \leq t < S_n\}.$$

Zatem, warunkując względem S_{n-1} otrzymujemy dla każdego $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}[N(t) = n] = \mathbb{P}[S_{n-1} \leq t < S_{n-1} + X_n] = \int_0^t \mathbb{P}[X_n + x > t] f_{n-1}(x)\, dx$$
$$= e^{-\theta t} \int_0^t \frac{\theta^n x^{n-1}}{(n-1)!}\, dx = e^{-\theta t} \frac{(\theta t)^n}{n!}.$$

Twierdzenie 1.19
Rozważmy opóźniony proces odnowy, w którym S_0 oraz X mają rozkład wykładniczy z parametrem $\theta > 0$. Wówczas dla każdego $t \geq 0$ zmienna losowa $N(t)$ ma rozkład Poissona z parametrem θt, t.j.

$$\mathbb{P}[N(t) = n] = e^{-\theta t} \frac{(\theta t)^n}{n!}.$$

W szczególności

$$U(t) = \mathbb{E} N(t) = \theta t, \quad t \geq 0.$$

Zauważmy, że w tym przypadku miara odnowy jest proporcjonalna do miary Lebesguea. Dokładniej

$$U(t, t+h] = U(t+h) - U(t) = \frac{h}{\mu} = \theta h, \quad t, h \geq 0.$$

Dla nieujemnej $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, U(dx) = \theta \int_0^\infty f(x)\, dx. \tag{1.9}$$

Definicja 1.20
Jeżeli S_0 oraz X mają rozkład wykładniczy z parametrem $\theta > 0$, to proces stochastyczny $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ nazywamy *jednorodnym procesem Poissona z intensywnością* $\theta > 0$.

1.3 Przerywnik analityczny

Przypomnijmy, że każda dystrybuanta F w jednoznaczny sposób wyznacza rozkład prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$, który również będziemy oznaczali przez F. Wówczas $F(s, t] = F(t) - F(s)$. Podobna uwaga tyczy się funkcji niemalejących. Dokładniej, jeżeli $H \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ jest funkcją niemalejącą i prawostronnie ciągłą, to w jednoznaczny sposób wyznacza miarę, którą również będziemy oznaczali przez H, dla której

$$H(s, t] = H(t) - H(s), \quad s < t.$$

Przykład 1.21
Zauważmy, że funkcja odnowy U jest niemalejąca. Prawostronna ciągłość wynika z prawostronnej ciągłości i monotoniczności $N(t)$. Zauważmy, że miarą generowaną przez funkcję odnowy U jest miara odnowy dana przez (1.6).

Definicja 1.22
Dla funkcji nieujemnej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określamy splot funkcji f z miarą H jako funkcję $f * H\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną przez

$$f * H(t) = \int f(t-x)\, H(dx).$$

Przykład 1.23
Niech f będzie funkcją nieujemną. Zauważmy, że

$$f * F(t) = \int f(t-x)\, F(dx) = \mathbb{E} f(t-X).$$

Przykład 1.24
Uzyskany przez nas wcześniej wzór (1.8),

$$\mathbb{P}[S_{N(t)} - t > x] = \int_{[0,t]} \mathbb{P}[X > x + t - y]\, U(dy)$$

również zapisuje się w notacji splotu jako

$$\mathbb{P}[S_{N(t)} - t > x] = \int_{[0,t]} \mathbb{P}[X > x + t - y]\, U(dy) = f_x * U(t)$$

gdzie $f_x(s) = \mathbb{P}[X > x + s] \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(s)$.

Dla dystrybuant H i D określamy ich splot poprzez

$$H * D(x) = \int_{\mathbb{R}} H(x-y)\, D(dy). \tag{1.10}$$

Całkę pojawiającą się w definicji splotu (1.10) należy interpretować jako całkę z funkcji $H(x - \cdot)$ względem miary D. Zauważmy, że jeżeli Z i Y są niezależne o dystrybuantach H i D odpowiednio. to zmienna losowa $X + Y$ ma dystrybuantę $H * D$.

Przez F^{*n} oznaczać będziemy n-krotny splot dystrybuanty F ze sobą, tj. $F^{*0} = \mathbb{1}_{[0,+\infty)}$, $F^{*1}(t) = F(t)$ oraz $F^{*(n+1)}(t) = F^{*n} * F(t)$. Wówczas dla każdego n, F^{*n} jest dystrybuantą (rozkładem) zmiennej S_n.

Przykład 1.25
Rozważmy czysty proces odnowy. Wówczas dla każdego $t > 0$

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[S_n \le t] = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t).$$

1.4 Procesy gałązkowe

Przejdziemy teraz do pierwszego zastosowania, które na pierwszy rzut oka może wydać się zaskakujące. Teoria odnowy skupia się na badaniu własności spacerów losowych, które charakteryzują się liniowym wzrostem. Okazuje się, że teorię tę można zastosować do procesów gałązkowych, które charakteryzują się wzrostem wykładniczym.

Rozważmy populację komórek, których czasy życia są niezależne ze standardowym rozkładem wykładniczym ($\theta = 1$). Każda komórka, na koniec swego życia (niezależnie od czasu życia) dzieli się na dwie nowe z prawdopodobieństwem $p \in (0,1)$ lub umiera z prawdopodobieństwem $1-p$. Załóżmy, że w chwili $t = 0$ populacja składa się z jednej komórki, której czas życia wynosi T. Oznaczmy przez Y liczbę potomstwa pierwszej komórki. Wówczas $\mathbb{P}[Y = 2] = p$ oraz $\mathbb{P}[Y = 0] = 1 - p$. Niech $Z(t)$ oznacza liczbę komórek w populacji w chwili $t \geq 0$. Wówczas

$$Z(t) = \mathbb{1}_{\{T>t\}} + \mathbb{1}_{\{T\leq t\}}\mathbb{1}_{\{Y=2\}}(Z_1(t-T) + Z_2(t-T)),$$

gdzie $Z_i(t-T)$ oznacza rozmiar podpopulacji zapoczątkowanej przez i-tego potomka pierwszej komórki, który narodził się w chwili T. Nasz model zakłada, że $\{Z_i(t)\}_{t\geq 0}$ są wzajemnie niezależnymi procesami o tym samym rozkładzie co $\{Z(t)\}_{t\geq 0}$ które są dodatkowo niezależne od (T, Y).

Niech $M(t) = \mathbb{E}Z(t)$ dla $t \geq 0$ i $M(t) = 0$ dla $t < 0$. Mamy dla każdego $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} M(t) &= \mathbb{P}[T > t] + \mathbb{E}\mathbb{1}_{T\leq t} 2pM(t-T) \\ &= e^{-t} + \int_0^t 2pM(t-s)e^{-s}ds \\ &= e^{-t} + \int_{\mathbb{R}} M(t-s)2pe^{-s}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(s)ds \end{aligned}$$

Jeżeli oznaczymy $G(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(t)$ oraz $Q(ds) = 2pe^{-s}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(s)ds$, to otrzymane równanie przyjmuje postać

$$M(t) = G(t) + M * Q(t).$$

Równanie tej postaci w teorii odnowy nosi nazwę *równania odnowy*. Zauważmy, ze miara Q w ogólności nie jest probabilistyczna, ponieważ

$$Q(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} 2pe^{-s}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(s)ds = 2p.$$

Użyjemy techniki zamiany miary. Dla dowolnej $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy i $t \geq 0$,

$$e^{\alpha t}M(t) = e^{t(1-\alpha)} + \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha(t-s)}M(t-s)2pe^{(\alpha-1)s}\mathbb{1}_{[0,+\infty}(s)ds$$

co może być zapisane w skróconej formie jako

$$M_\alpha(t) = G_\alpha(t) + M_\alpha * Q_\alpha(t), \tag{1.11}$$

gdzie $M_\alpha(t) = e^{\alpha t}M(t)$, $G_\alpha(t) = e^{\alpha t}G(t)$ i $Q_\alpha(ds) = 2pe^{s(1-\alpha)}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(s)ds$ dla $t \geq 0$. Dla $\alpha = 1-2p$ miara Q_α staje się probabilistyczna

$$Q_\alpha(\mathbb{R}) = \int_0^\infty 2pe^{\alpha(1-t)}ds = \frac{2p}{1-\alpha} = 1.$$

Zauważmy, że wówczas $Q_\alpha(dt) = 2pe^{-2pt}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}dt$ staje się rozkładem wykładniczym z parametrem $\theta = 2p$.

Załóżmy, że $S_0, X_1, X_2, \ldots$ mają rozkład wykładniczy z parametrem $\theta = 2p$. Wówczas (1.11), zgodnie z **Przykładem 1.23**, przyjmuje postać

$$M_\alpha(t) = G_\alpha(t) + \mathbb{E}M_\alpha(t-X).$$

Iteracja powyższego równania daje

$$\begin{aligned} M_\alpha(t) &= G_\alpha(t) + \mathbb{E}M_\theta(t-S_0) \\ &= G_\alpha(t) + \mathbb{E}G_\alpha(t-S_0) + \mathbb{E}M_\alpha(t-S_1) \\ &= G_\alpha(t) + \mathbb{E}G_\alpha(t-S_1) + \mathbb{E}G_\alpha(t-S_2) + \mathbb{E}M_\alpha(t-S_3) \\ &= G_\alpha(t) + \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}G_\alpha(t-S_k) + \mathbb{E}M_\alpha(t-S_n) \end{aligned}$$

Przypuśćmy, że pokazaliśmy, że M_α jest ciągła. Wówczas dla ustalonego $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}M_\alpha(t-S_n) \leq \mathbb{P}[S_n \leq t] \sup_{s\in[0,t]} M_\alpha(s) \to 0,$$

ponieważ $S_n \to \infty$. Otrzymaliśmy dla $t > 0$,

$$\begin{aligned} M_\alpha(t) &= G_\alpha(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}G_\alpha(t-S_k) = G_\alpha(t) + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} G_\alpha(t-s)\, F^{*k}(ds) \\ &= G_\alpha(t) + \sum_{k=0}^{\infty} G_\alpha * F^{*k}(t) = G_\alpha(t) + G_\alpha * U(t) \\ &= G_\alpha(t) + \int G_\alpha(t-x)\, U(dx) \overset{(1.9)}{=} G_\alpha(t) + 2p\int_0^\infty G_\alpha(x-t)\, dx \\ &= e^{-2pt} + 2p\int_0^t e^{-2p(t-s)}\, d = 1. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$M(t) = e^{(2p-1)t}, \quad t \geq 0.$$

Założenie, że T ma rozkład wykładniczy bardzo ułatwiło analizę $M(t)$. Co potrafimy powiedzieć o funkcji $M(t)$, jeżeli T ma rozkład inny niż wykładniczy? Nasze argumenty będą wymagałyby odpowiednich modyfikacji. Największym problemem byłaby funkcja odnowy U. Jeżeli X nie ma rozkładu wykładniczego, to jawna postać U nie musi być znana, wobec tego dokładna wartość splotu

$$G_\alpha * U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} G_\alpha(t - S_k)$$

nie jest znana. Jak przekonamy się w **rozdziale 4**, znane jest zachowanie asymptotyczne

$$G_\alpha * U(t) \approx \frac{1}{\mu} \int G_\alpha(x)\, dx.$$

1.5 Zadania

Zadanie 1.1
Załóżmy, że $\mathbb{P}[X = 0] \in (0, 1)$. Naszkicuj wykres funkcji $t \mapsto N(t)$.

Zadanie 1.2
Pokaż, że dla każdego $t \geq 0$, zmienna losowa $N(t)$ zadana przez (1.2) jest czasem zatrzymania.

Zadanie 1.3
Pokaż, że dla dystrybuant F i G, $F * G = G * F$.

Zadanie 1.4
Pokaż, że

$$U(t) \leq \frac{1}{\mathbb{P}[X > t]}, \quad t \geq 0.$$

Zadanie 1.5
Oblicz $\int_{[0,t]} \mathbb{P}[X > t - x]\, U(dx)$.

Zadanie 1.6
Zauważ, że dla nieujemnych i niezależnych zmiennych losowych X i Y mamy

$$\lambda_{X+Y}(u) = \lambda_X(u) \lambda_Y(u).$$

W szczególności $\lambda_{S_n}(u) = \lambda_{S_0}(u) \lambda_X(u)^n$.

Zadanie 1.7
Pokaż, że jeżeli F jest dystrybuantą rozkładu wykładniczego z parametrem $\theta > 0$, to X ma własność braku pamięci, tj. dla $s, t > 0$

$$\mathbb{P}[X > t + s \mid X > s] = \mathbb{P}[X > t].$$

Zadanie 1.8
Załóżmy, że F jest dystrybuantą rozkładu wykładniczego. Wyznacz rozkład resztowy F_I.

Zadanie 1.9
Załóżmy, że X ma rozkład wykładniczy. Pokaż, że

$$S_{N(t)} - t \overset{d}{=} X.$$

Zadanie 1.10
Pokaż, że

$$X_{N(t)} \overset{d}{\geq} X,$$

tj. $\mathbb{P}[X_{N(t)} > x] \geq \mathbb{P}[X > x]$ dla każdego x.

Zadanie 1.11
Znajdź reprezentację całkową dystrybuanty zmiennej losowej

$$\frac{S_{N(t)} - t}{X_{N(t)}}.$$

Jaką przyjmuje ona postać, gdy X ma rozkład wykładniczy?

Zadanie 1.12
Pokaż, że jeżeli F jest dystrybuantą rozkładu wykładniczego z parametrem $\theta > 0$ a $S_0 = 0$, to S_n ma tzw. rozkład Erlanga, czyli rozkład o gęstości zadanej wzorem

$$f_n(x) = \frac{\theta^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\theta x}, \quad x \geq 0$$

Zadanie 1.13
Załóżmy, że dla każdego $t \geq 0$, zmienna losowa $N(t)$ ma rozkład Poissona z parametrem θt. Pokaż, że X ma rozkład wykładniczy z parametrem θ.

Zadanie 1.14
Załóżmy, że X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\theta > 0$ a $S_0 = 0$. Pokaż, że

1. $N^*(0) = 0$.
2. Dla każdych $t, s > 0$, $N^*(t+s) - N^*(s)$ jest niezależne od $\sigma(N^*(u) : u \leq s)$.
3. $N^*(t+s) - N^*(t) \overset{d}{=} N^*(s)$.
4. Funkcja $t \mapsto N^*(t)$ jest prawostronnie ciągła z prawdopodobieństwem jeden.

Zadanie 1.15
Niech λ_X będzie transformatą Laplace'a zmiennej X. Pokaż, że transformata Laplace'a miary odnowy wynosi

$$\int_{[0,+\infty)} e^{-sx}\, U(dx) = \lambda_{S_0}(u) + \frac{\lambda_{S_0}(u)}{1-\lambda_X(s)}, \quad s > 0.$$

Zadanie 1.16
Niech dla pewnej $\lambda > 0$, $\mathbb{P}[X \le x] = 1 - (1-\lambda x)e^{-\lambda x}$ dla $x \ge 0$. Pokaż, że $U(x) = 1 + \frac{\lambda}{2}x - \frac{1}{4}(1 - e^{-2\lambda x})$ dla $x \ge 0$.

Zadanie 1.17
Załóżmy, że X ma rozkład o gęstości

$$f(x) = f_3(x) = \frac{\lambda^3 x^2}{2} e^{-\lambda x}, \quad x \ge 0.$$

(Zauważ, że jest to gęstość z **Zadania 1.12**). Pokaż, że

$$U(t) = 1 + \frac{\lambda t - 1}{3} + \frac{1}{3}\exp\{-\frac{3}{2}\lambda t\}(\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t))$$

Zadanie 1.18
Załóżmy, że X ma rozkład gamma o gęstości

$$f(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi x}} e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

gdzie $\lambda > 0$. Pokaż, że

$$U(t) = 2\lambda t + \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{\lambda} e^{-\lambda t}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{u} e^{-tu}}{(\lambda+u)^2}\, du.$$

Zadanie 1.19
Załóżmy, że X ma rozkład o gęstości f. Pokaż, że funkcja odnowy U jest absolutnie ciągła na $(0,+\infty)$, tj. $U(t) = U(0) + \int_0^t v(x)\, dx$ dla pewnej mierzalnej, nieujemnej funkcji v. Wyznacz v.

Zadanie 1.20
Załóżmy, że $\mathbb{P}[X > t] = pe^{-\lambda t} + qe^{-\gamma t}$ dla $t, p, q \ge 0$, $p + q = 1$ oraz $\lambda, \gamma > 0$. Pokaż, że funkcja v z **Zadania 1.19** ma postać

$$v(x) = \frac{\lambda\gamma}{q\lambda + p\gamma} + \frac{pq(\lambda-\gamma)^2}{q\lambda + p\gamma} e^{-(q\lambda + p\gamma)x}, \qquad x \ge 0.$$

Wskazówka : użyj transformaty Laplace'a.

Zadanie 1.21
Załóżmy, że X ma taki sam rozkład co zmienna N^{-2}, gdzie N jest zmienną losową o rozkładzie normalnym ze średnią 0 i wariancją 2, tj. X ma gęstość

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-1/(4x)}}{x^{3/2}}, \quad x > 0.$$

Pokaż, że funkcja v z **Zadania 1.19** ma postać

$$v(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2/(4x)}, \quad x > 0.$$

Zadanie 1.22
Załóżmy, że $\mathbb{P}[X = 0] < 1$ oraz $a > 0$. Rozważmy

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{an}\mathbb{P}[S_n \leq t].$$

Pokaż, że następujące warunki są równoważne:

- Szereg definiujący $V(t)$ jest zbieżny dla każdego $t > 0$;
- Szereg definiujący $V(t)$ jest zbieżny dla pewnego $t > 0$;
- $e^a\mathbb{P}[X = 0] < 1$

Wywnioskuj, że $\mathbb{E}e^{aN(t)} < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e^a\mathbb{P}[X = 0] < 1$. W szczególności $\mathbb{E}N(t)^p < \infty$ dla każdego $p > 0$.

Zadanie 1.23
Twierdzenie ?? jest czasami nazywane mocnym prawem wielkich liczb dla procesu $\{N(t)\}_{t\geq 0}$. Pokaż, że zachodzi też centralne twierdzenie graniczne. Jeżeli $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) < \infty$, to

$$\frac{N(t) - \mu^{-1}t}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

2

Funkcja odnowy

W tym rozdziale skupimy się na opisie własności funkcji odnowy U. Po udowodnieniu tak zwanego elementarnego twierdzenia o odnowie zobaczymy podstawowe nierówności związane z funkcją U, jak między innymi jej podaddytywność. Na koniec zobaczymy pierwsze zastosowania.

2.1 Asymptotyka

W poprzednim rozdziale agitowaliśmy, że skoro $N(t) \approx \frac{t}{\mu}$, gdzie $\mu = \mathbb{E}[X]$, oraz $U(t) = \mathbb{E}[N(t)]$, to U powinna spełniać takie samo oszacowanie. Zaprezentujemy teraz dokładny dowód tego faktu.

Twierdzenie 2.1 (Elementarne twierdzenie o odnowie)
Mamy, przy $t \to \infty$,

$$\frac{U(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}.$$

Dowód. Dolne ograniczenie wynika z Lematu Fatou

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \geq \mathbb{E}\left[\liminf_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}\right] = \frac{1}{\mu}.$$

Pozostaje więc uzyskać odpowiednie oszacowanie górne. Weźmy dowolne $M > 0$ i rozważmy zmienne

$$X^{(M)} = X \wedge M, \quad X_k^{(M)} = X_k \wedge M, \quad S_0^{(M)} = 0,$$

gdzie $x \wedge y = \min\{x, y\}$. Niech

$$S_n^{(M)} = \sum_{k=1}^{n} X_k^{(M)}.$$

Wówczas $\left\{S_n^{(M)}\right\}_{n\geq 0}$ jest czystym strumieniem odnowy takim, że $S_n^{(M)} \leq S_n$ dla każdego n. Jeżeli $\left\{S_n^{(M)}\right\}_{n\geq 0}$ ma krótsze kroki niż $\{S_n\}_{n\geq 0}$ to potrzebuje zrobić ich więcej, żeby opuścić przedział $[0,t]$. Innymi słowy

$$N^{(M)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}\left(S_n^{(M)}\right) \geq N(t)$$

a co za tym idzie

$$U(t) \leq \mathbb{E}N^{(M)}(t).$$

Powołując się na Tożsamość Walda (**Lemat 1.11**) otrzymujemy

$$\mathbb{E}X^{(M)}\mathbb{E}N^{(M)}(t) = \mathbb{E}S^{(M)}_{N^{(M)}(t)} \leq t + M,$$

gdzie nierówność wynika z $S^{(M)}_{N^{(M)}(t)} \leq t + M$. Ostatecznie

$$U(t) \leq \mathbb{E}N^{(M)}(t) \leq \frac{t+M}{\mathbb{E}X^{(M)}} \tag{2.1}$$

co daje

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \leq \frac{1}{\mathbb{E}X^{(M)}}.$$

Przechodząc teraz $M \to \infty$ i korzystając z twierdzenia o zbieżności monotonicznej otrzymujemy $\mathbb{E}X^{(M)} \to \mu$. □

Analiza dowodu **Twierdzenia 2.1** pozwala nam wywnioskować oszacowania z góry i z dołu na funkcję U.

Wniosek 2.2 (Nierówność Eriksona)
Rozważmy czysty strumień odnowy $\{S_n\}_{n\geq 0}$. Dla $t \geq 0$

$$\frac{t}{m(t)} \leq U(t) \leq \frac{2t}{m(t)},$$

gdzie

$$m(t) = \mathbb{E}X^{(t)} = \mathbb{E}X \wedge t = \int_0^t \mathbb{P}[X > y]\, dy.$$

Dowód. Zauważmy, że dla $M = t$ nierówność (2.1) przyjmuje postać $U(t) \leq \frac{2t}{m(t)}$. Pozostaje więc uzasadnić dolne szacowanie na $U(t)$. Niech $M = t + \varepsilon$ dla pewnego $\varepsilon > 0$. Zauważmy, że

$$N(t) = N^{(t+\varepsilon)}(t) = N^{(M)}(t).$$

Możemy zatem napisać

$$U(t) = \mathbb{E}N(t) = \mathbb{E}N^{(t+\varepsilon)}(t) = \mathbb{E}N^{(M)}(t)$$
$$= \frac{\mathbb{E}S^{(M)}_{N^{(M)}(t)}}{m(M)} \geq \frac{t}{m(M)} = \frac{t}{m(t+\varepsilon)}.$$

Przechodząc do granicy przy $\varepsilon \to 0$ otrzymujemy dolne oszacowanie. □

Nierówności Eriksona są wyjątkowo przydatne w przypadku, gdy $\mu = \mathbb{E}[X] = \infty$. Wówczas $U(t) \asymp t\mathbb{E}[X \wedge t]$. Kolejną przydatną własnością funkcji U jest jej podaddytywność. Do jej wykazania potrzebne nam będą dwa lematy.

Lemat 2.3 (Mocna własnosć Markowa dla $\{S_n\}_{n\geq 0}$)
Rozważmy czysty strumień odnowy $\{S_n\}_{n\geq 0}$. Dla każdego ustalonego $t \geq 0$ ciąg $\{S_{n+N(t)} - S_{N(t)}\}_{n\geq 0}$ ma ten sam rozkład co $\{S_n\}_{n\geq 0}$ i jest niezależny od $N(t)$.

Dowód. Dwa ciągi zmiennych losowych mają taki sam rozkład wtedy i tylko wtedy, gdy maja takie same rozkłady skończenie wymiarowe. Wystarczy zatem sprawdzić, że

$$\mathbb{P}[N(t) = i,\, S_{1+N(t)} - S_{N(t)} \in A_1,\, \ldots, S_{j+N(t)} - S_{N(t)} \in A_j]$$
$$= \mathbb{P}[N(t) = i]\mathbb{P}[S_1 \in A_1, \ldots, S_j \in A_j].$$

Wynika to z następujących równości

$$\mathbb{P}[N(t) = i,\, S_{1+N(t)} - S_{N(t)} \in A_1,\, \ldots, S_{j+N(t)} - S_{N(t)} \in A_j]$$
$$= \mathbb{P}\left[N(t) = i,\, X_{i+1} \in A_1,\, \ldots,\, \sum_{k=i+1}^{j+i} X_k \in A_j\right]$$
$$= \mathbb{P}[N(t) = i]\mathbb{P}\left[X_{i+1} \in A_1,\, \ldots,\, \sum_{k=i+1}^{j+i} X_k \in A_j\right]$$
$$= \mathbb{P}[N(t) = i]\mathbb{P}[S_1 \in A_1, \ldots, S_j \in A_j],$$

gdzie w drugiej równości skorzystaliśmy z niezależności zdarzenia

$$\{N(t) = i\} = \{S_{i-1} \leq t,\, S_i > t\}$$

oraz tego, że

$$\left(X_{i+1}, X_{i+1} + X_{i+2}, \ldots, \sum_{k=i+1}^{j+i} X_k\right) \stackrel{d}{=} (S_1, S_2, \ldots S_j).$$

□

Lemat 2.4 (Stochastyczna podaddytywność $\{N(t)\}_{t\geq 0}$)
Dla czystego procesu odnowy i ustalonych $s, t > 0$ mamy

$$N(t+s) \leq N(t) + N'_t(s), \tag{2.2}$$

gdzie $N'_t(s)$ jest pewną zmienną niezależną od $N(t)$ o takim samym rozkładzie co zmienna $N(s)$.

Dowód. Mamy

$$N(s+t) = N[0, t+s] = N[0, t] + N(t, t+s],$$

gdzie

$$\begin{aligned} N(t, t+s] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{(t,t+s]}(S_n) = \sum_{n=N(t)}^{\infty} \mathbb{1}_{(t,t+s]}(S_n) = \sum_{n=N(t)}^{\infty} \mathbb{1}_{[S_{N(t)},t+s]}(S_n) \\ &\leq \sum_{n=N(t)}^{\infty} \mathbb{1}_{[S_{N(t)},S_{N(t)}+s]}(S_n) = \sum_{n=N(t)}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,s]}(S_n - S_{N(t)}) =: N'_t(s). \end{aligned}$$

Druga równość wynika z faktu, że dla $k < N(t)$, $S_k \leq t$ co pociąga za sobą $S_k \notin (t, t+s]$. Druga wynika z tego, że w przedziale $(t, S_{N(t)})$ nie może być żadnej odnowy. Nierówność wynika z tego, że $S_{N(t)} > t$. Rozkłady $N'_t(s)$ oraz $N(s)$ pokrywają się na mocy **Lematu 2.3**. □

Wniosek 2.5
Dla czystego procesu odnowy funkcja odnowy U jest podaddytywna, tj. dla $t, s > 0$ zachodzi

$$U(t+s) \leq U(t) + U(s).$$

2.2 Zastosowanie: model Cramera-Lundberga

Rozważmy problem budżetu firmy ubezpieczeniowej, której kapitał początkowy wynosi $R(0) = u > 0$. Firma w sposób ciągły otrzymuje zyski ze składek ubezpieczeniowych z intensywnością $c > 0$. Dodatkowo w chwilach opóźnionego strumienia odnowy $\{S_n\}_{n\geq 0}$ ($S_0 \overset{d}{=} X$) wypłaca należności z ubezpieczeń. Zakładamy, że k-ta należność wynosi Y_k a zmienne $\{Y_k\}_{k\geq 0}$ tworzą cią iid niezależny od $\{S_n\}_{n\geq 0}$. Wówczas kapitał spółki ubezpieczeniowej w chwili $t \geq 0$ zadaje się jako

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k.$$

Centralnym obiektem zainteresowania jest prawdopodobieństwo ruiny, która zachodzi w momencie

$$\Lambda = \inf\{t \geq 0 \,:\, R(t) < 0\}.$$

Na początek sprawdzimy jak wartości c, μ i $\mathbb{E}[Y]$ wpływają na prawdopodobieństwo zajścia ruiny, czyli

$$\mathbb{P}[\Lambda < \infty].$$

Zauważmy, że

$$\mathbb{E}[R(t)] = u + ct - \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k\right] = u + ct - \mathbb{E}[Y](U(t)+1).$$

Ostatnia równość wynika z niezależności zmiennej $N(t)$ i ciągu $\{Y_k\}_{k\geq 0}$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{N(t)} Y_k\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} Y_k \mathbb{1}_{\{N(t)\geq k\}}\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Y]\mathbb{P}[N(t) \geq k] = \mathbb{E}[Y](U(t)+1).$$

W szczególności

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[R(t)]}{t} = c - \frac{\mathbb{E}[Y]}{\mu}$$

co z kolei oznacza, że dla $c < \frac{\mathbb{E}[Y]}{\mu}$, $\mathbb{P}[\Lambda < \infty] = 1$. Postępując jak w dowodzie **Twierdzenia 1.15** można udowodnić zbieżność punktową

Fakt 2.6
Załóżmy, że $\mathbb{E}[Y] < \infty$ i $\mathbb{P}[X > 0] > 0$. Wówczas

$$\frac{R(t)}{t} = c - \frac{\mathbb{E}[Y]}{\mu}\ p.w.$$

Dowód. Pozostawiamy jako **zadanie ?**. □

W sytuacji, gdy $c \geq \frac{\mathbb{E}[Y]}{\mu}$ odpowiedź o prawdopodobieństwo ruiny nie jest taka prosta. Wrócimy do tego pytania w dalszej części wykładu. Zauważmy jednak na koniec, że

$$\mathbb{P}[\Lambda < \infty] = \mathbb{P}\left[\sup_{t\geq 0} \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k - ct > u\right]$$
$$= \mathbb{P}\left[\sup_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} Y_k - cS_n > u\right] = \mathbb{P}\left[\sup_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{n} Y_k - cX_k > u\right].$$

Problem więc sprowadza się do zrozumienia trajektorii spacerów losowych.

2.3 Zadania

Zadanie 2.1
Niech $a > 0$ oraz $N(t) = \#\{n > 0 : S_n \leq t\}$. Bez odwoływania się do mocnego prawa wielkich liczb pokaż, że jeżeli $\lim_{t\to\infty} t^{-1}N(t) = a$ p.w. to $\lim_{n\to\infty} n^{-1}S_n = a^{-1}$ p.w.

Zadanie 2.2
Załóżmy, że $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Pokaż, że

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t S_{\nu(z)} - z\,dz = \frac{\mathbb{E}X^2}{2\mu} \quad p.w.$$

Zadanie 2.3
Załóżmy, że $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Pokaż, że

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_{\{S_{\nu(z)}-z>x\}}\,dz = \frac{\mathbb{E}(X-x)^+}{\mu} \quad p.w.$$

Zadanie 2.4
Niech $c > 0$. Pokaż, że

$$\lim_{t\to\infty} t^{-c}(\nu(t+1)-\nu(t)) = 0 \quad p.w.$$

Zadanie 2.5
Pokaż, że

$$\mathbb{E}e^{-t\widehat{S}_0} = \frac{1-\lambda_X(t)}{\mu t}, \quad t > 0.$$

Zadanie 2.6
Pokaż, że funkcja $U^*(t) = \mathbb{E}N(t)$ jest nadaddytywna, czyli dla $t, s > 0$ zachodzi

$$U^*(t+s) \geq U^*(t) + U^*(s).$$

Zadanie 2.7
Załóżmy, że rozkład X jest arytmetyczny o skoku 1. Załóżmy, że

$$S_{\nu(t)} - t \Rightarrow W,$$

dla pewnej zmiennej losowej W. Pokaż, że rozkład W jest arytmetyczny o skoku 1. W szczególności rozkład W nie może być ciągły.

Zadanie 2.8
Pokaż, że dla każdego $p > 0$ rodzina zmiennych losowych $(t^{-p}\nu(t)^p)_{t\geq 1}$ jest jednostajnie całkowalna, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\geq 1}\mathbb{E}t^{-p}\nu(t)^p\mathbb{1}_{\{t^{-p}\nu(t)^p>n\}}=0.$$

Wywnioskuj, że

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}\nu(t)^p}{t^p}=\frac{1}{\mu^p}.$$

3

Twierdzenie Blackwella

W tym rozdziale udowodnimy najważniejsze twierdzenie całego wykładu. Jego konsekwencje będą widoczne w każdym zastosowaniu teorii odnowy.

Twierdzenie 3.1 (Blackwell)
Załóżmy, że X jest nieujemne o rozkładzie, który nie jest arytmetyczny. Wówczas, dla każdego ustalonego $h > 0$, gdy $x \to \infty$,

$$U(x, x+h] = U(x+h) - U(x) \to \frac{h}{\mu}.$$

To twierdzenie mówi, że dla rozkładów niearytmetycznych miara odnowy $U(dx)$ w nieskończoności przypomina miarę Lebesguea przemnożoną przez stałą $\frac{1}{\mu}$. Najpierw wyjaśnimy czym są rozkłady arytmetyczne. Następnie omówimy stacjonarne procesy odnowy, które posłużą nam do dowodu **Twierdzenia 3.1**.

3.1 Stacjonarny proces odnowy

Wśród rozkładów dyskretnych istnieje prosta klasa, która niekiedy utrudnia proste sformułowania twierdzeń, przez konieczność wprowadzania wyjątków.

Definicja 3.2
Rozkład X nazywamy *arytmetycznym*, jeżeli jest on skupiony na zbiorze $d\mathbb{Z}$. Największe d o tej własności nazywamy skokiem rozkładu.

Najistotniejsze twierdzenia w teorii odnowy wymagają rozróżnienia między przypadkiem X o rozkładzie arytmetycznym a X o rozkładzie nie będącym rozkładem arytmetycznym. To rozróżnienie ma charakter czysto techniczny a uzyskane rezultaty są do siebie bardzo zbliżone. Wszystko bierze się z tego, że dla rozkładów arytmetycznych o skoku $d > 0$ funkcja odnowy $U(t)$ jest stała na odcinkach postaci $[kd, (k+1)d)$. W szczególności miara odnowy $U(dx)$ nie ma szans przypominać miary Lebesgue'a. Ze względu na przejrzystość prezentacji skupimy się wyłącznie na rozkładach, które nie są arytmetyczne.

Kluczem do sukcesu będzie tutaj odpowiednia manipulacja opóźnieniem S_0. Dla strumienia odnowy $\{S_n\}_{n\geq 0}$ przez $\{S_n^0\}_{n\geq 0}$ oznaczać będziemy jego czystą wersję, czyli czysty strumień odnowy zadany przez $S_0^0 = 0$ i $S_n^0 = S_n - S_0$. Zacznijmy od wyprowadzenia równania splotowego, które spełnia funkcja odnowy $U^0(t)$ czystego strumienia $\{S_n^0\}_{n\geq 0}$. Zauważmy, że $U^0(t) = 0$ dla $t < 0$ oraz dla $t \geq 0$ poprzez warunkowania względem wartości X_1,

$$U^0(t) = 1 + \int U^0(t-x)\, F(dx).$$

W skrócie możemy zapisać

$$U^0(t) = \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(t) + U^0 * F(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Wykorzystamy U^0 do wyznaczenia równani splotowego dla U. Oznaczając proces odnowy czystego strumienia przez $N^0(t) = \inf\{n \geq 0 \,:\, S_n^0 > t\}$ możemy napisać

$$\begin{aligned} N(t) = \inf\{n \geq 0 \,:\, S_n > t\}& \\ = \inf\{n \geq 0 \,:\, S_n^0 > t - S_0\} &= N^0(t - S_0) \quad p.w. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że S_0 jest niezależna od $\{X_k\}_{k\geq 1}$, więc jest w szczególności niezależna od N^0. Stąd

$$\begin{aligned} U(t) = \mathbb{E}N(t) = \mathbb{E}N(t-S_0) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[N(t-S_0)\,|S_0\right]\right]& \\ = \mathbb{E}\left[U^0(t-S_0)\right] &= \int U^0(t-y) G(dy), \end{aligned}$$

czyli w skrócie

$$U(t) = U^0 * G(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Jak mówi **Twierdzenie 2.1**, $U(t) \sim \mu^{-1}t$. Okazuje się że możemy tak dobrać rozkład G, aby $U(t) = \frac{t}{\mu}$. Splatając obie strony równania (3.1) z G otrzymujemy

$$U(t) = U^0 * G(t) = G * \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(t) + G * U^0 * F(t) = G(t) + U * F(t).$$

Podstawiając $U(t) = \frac{t}{\mu}$, $t \geq 0$ otrzymujemy warunek na G,

$$\frac{t}{\mu} = G(t) + \frac{1}{\mu}\int (t-y)^+ \, F(dy).$$

Co po uproszczeniu daje

$$\begin{aligned} G(t) = \frac{1}{\mu}\int t - (t-y)^+ \, F(dy) &= \frac{1}{\mu}\mathbb{E}t - (t-X)_+ \\ &= \frac{1}{\mu}\mathbb{E}X \wedge t = \frac{1}{\mu}\int_0^t \mathbb{P}[X > y]\, dy. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Definicja 3.3
Jeżeli F nie jest rozkładem arytmetycznym, to strumień odnowy $\{S_n\}_{n\geq 0}$, gdzie S_0 ma rozkład o dystrybuancie G danej przez (3.3) nazywamy *stacjonarnym strumieniem odnowy*. Wówczas $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ nazywamy *stacjonarnym procesem odnowy*.

Wprawiony czytelnik zauważy, że w konstrukcji stacjonarnego procesu odnowy nie skorzystaliśmy z tego, że rozkład F nie jest arytmetyczny. To założenie wejdzie w grę dopiero przy niektórych zastosowaniach stacjonarnego procesu odnowy. Dla przykładu, stacjonarny proces odnowy posłuży nam do udowodnienia zbieżności zapowiadanej w **rozdziale 1**. Postawiliśmy tam hipotezę, że przy pewnym technicznym założeniu na rozkład F,

$$\mathbb{P}[S_{N(t)} - t \leq x] \to \frac{1}{\mu}\int_0^x \mathbb{P}[X > y]\, dy. \tag{3.4}$$

Wspomnianym technicznym założeniem na rozkład F jest to, że nie jest on arytmetyczny.

Jak już wspomnieliśmy, użyjemy stacjonarnego procesu odnowy aby uzasadnić zbieżność (3.4). Okazuje się, że dla opóźnionego procesu lewa strona (3.4) jest stała i równa granicy. Tłumaczy to dlaczego taki proces nazywamy stacjonarnym.

Fakt 3.4
Niech $\{S_n\}_{n\geq 0}$ będzie stacjonarnym procesem odnowy. Wówczas każdego $t > 0$

$$\mathbb{P}[S_{N(t)} - t \leq x] = \frac{1}{\mu}\int_0^x \mathbb{P}[X > y]\, dy.$$

Dowód. Dowód pozostawiamy jako **zadanie ?**. □

Stacjonarny proces odnowy może posłużyć do uzyskania szacowań dla punkcji odnowy.

Twierdzenie 3.5 (Nierówność Lordena)
Rozważmy czysty proces odnowy N^0 dla którego $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Wówczas dla dowolnego $t \geq 0$

$$U^0(t) = \mathbb{E}[N^0(t)] \leq \frac{t}{\mu} + \frac{\mathbb{E}X^2}{\mu^2}.$$

Dowód. Załóżmy, że $\{S_n^0\}_{n\geq 0}$ jest czystym strumieniem odnowy odpowiadającym procesowi N^0. Oznaczmy przez $\{S_n\}_{n\geq 0}$ jego stacjonarną wersję, czyli S_0 o rozkładzie (3.3) oraz $S_n = S_n^0 + S_0$. Niech S_0' będzie niezależną kopią S_0. Z podaddytywności funkcji U^0,

$$U^0(t) \leq \mathbb{E}U^0(t + S_0' - S_0) + \mathbb{E}U^0(S_0 - S_0').$$

Skoro, $\mathbb{E}U^0(t - S_0) = U(t) = t/\mu$, to wobec niezależności S_0 oraz S_0',

$$\mathbb{E}\left[U^0(t + S_0' - S_0)\middle| S_0'\right] = \frac{t + S_0'}{\mu}$$

co z kolei pociąga za sobą

$$\mathbb{E}U^0(t + S_0' - S_0) = \frac{\mathbb{E}S_0' + t}{\mu}.$$

W analogiczny sposób pokazujemy, że

$$\mathbb{E}U^0(S_0 - S_0') = \frac{\mathbb{E}S_0}{\mu}.$$

Ostatecznie

$$U^0(t) \leq \frac{t}{\mu} + \frac{2\mathbb{E}S_0}{\mu}.$$

Pozostaje tylko zweryfikować, że

$$\mathbb{E}S_0 = \frac{1}{\mu}\int x\mathbb{P}[X > x]\,dx = \frac{\mathbb{E}X^2}{2\mu}.$$

□

Uwaga 3.6
Zauważmy, że nierówność w **Twierdzeniu 3.5** jest równoważna

$$\mathbb{E}S_{N(t)} - t \leq \frac{\mathbb{E}X^2}{\mu}.$$

Powyższa forma jest częściej spotykana w literaturze.

Wniosek 3.7
Dla opóźnionego procesu odnowy N takiego, że $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ zachodzi nierówność

$$U(t) \leq \frac{t}{\mu} + \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mu} - \frac{1}{\mu}\mathbb{E}[S_0 \mathbb{1}_{\{S_0 \leq t\}}]$$

dla każdego $t \geq 0$.

Dowód. Pozostawiamy czytelnikowi jako **zadanie**. □

3.2 Przypadek skończonej średniej

Skonstruowany w właśnie stacjonarny proces odnowy posłuży nam do dowodu **Twierdzenia 3.1** w przypadku $\mu < \infty$. Niech $\{S'_n\}_{n\geq 0}$ będzie niezależną kopia $\{S_n\}_{n\geq 0}$. Przez $\{\widehat{S}'_n\}_{n\geq 0}$ oznaczmy jego opóźnioną wersję, tj.

$$\widehat{S}'_n = \widehat{S}'_0 + S'_n, \quad n \geq 0,$$

gdzie zmienna $\widehat{S}'_0$ jest niezależna od S'_n o rozkładzie (3.3). Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Naszym pierwszym zadaniem będzie znalezienie indeksów K oraz J takich, że $|\widehat{S}'_K - S_J| \leq \varepsilon$. Dokładnie w tym miejscu potrzebujemy założenia, że F nie jest rozkładem arytmetycznym.

Lemat 3.8
Niech F będzie rozkładem nie będącym rozkładem arytmetycznym. Wówczas, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją czasy K oraz J taki, że

$$|\widehat{S}'_K - S_J| \leq \varepsilon \quad \text{oraz} \quad K, J < \infty, \quad p.w.$$

Dodatkowo

Dowód. Niech $\eta_1, \eta_2, \ldots$ oraz $\eta'_1, \eta'_2, \ldots$ będą zmiennymi iid, niezależnymi od $\{S_n\}_{n\geq 0}$, $\{\widehat{S}'_n\}_{n\geq 0}$ oraz przyjmującymi wartości 0 i 1 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Niech $\theta_n = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n$ oraz $\theta'_n = \eta'_1 + \eta'_2 + \ldots + \eta'_n$. Rozważmy spacer losowy $T_n = S_{\theta_n} - \widehat{S}'_{\theta'_n}$. Przyrosty spaceru T_n są 0 z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż $\frac{1}{4}$ a nośnik ich rozkładów jest symetryczny względem 0 i zawiera nośnik X. Jeżeli więc rozkład X nie jest arytmetyczny, to spacer losowy $\{T_n\}_{n\geq 0}$ będzie nieredukowalnym łańcuchem Markowa. Skoro przyrosty $\{T_n\}_{n\geq 0}$ mają średnią 0, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$,

$$\tau = \inf\{n \geq 0 \, : \, |T_n| < \varepsilon\} < \infty \quad p.w.$$

Połóżmy $J = \theta_\tau$ oraz $K = \theta'_\tau$. Z konstrukcji wynika, że

$$|\widehat{S}'_K - S_J| \leq \varepsilon, \quad p.w.$$

□

Zdefiniujmy kolejny proces

$$S''_n = \begin{cases} S_n & J \geq n \\ S_J + \widehat{S}'_{K+n-J} - \widehat{S}'_K & J < n \end{cases}.$$

Innymi słowy $\{S''_n\}_{n\geq 0}$ to modyfikacja $\{S_n\}_{n\geq 0}$ w której po czasie J przyrosty zostały zamienione na te pochodzące z procesu opóźnionego.

Lemat 3.9
Załóżmy, że X jest nieujemną zmienną losową o rozkładzie nie będącym rozkładem arytmetycznym. Wówczas

1. $|S''_n - S_n| \leq \varepsilon$ dla $n > J$;
2. $\{S''_n\}_{n\geq 0} \stackrel{d}{=} \{S_n\}_{n\geq 0}$.

Dowód. Zauważmy, że dla $n > J$ mamy

$$|S''_n - S_n| = |\widehat{S}'_K - S_J| \leq \varepsilon$$

na mocy konstrukcji czasów J oraz K. Wystarczy zatem dowieść drugą cześć twierdzenia. Należy pokazać, że oba procesy mają takie same rozkłady skończenie wymiarowe. Pokażemy, że dla dowolnego $n \geq 0$

$$\mathbb{S}'' = (S''_0, S''_1, \ldots, S''_n) \stackrel{d}{=} (S_0, S_1, \ldots, S_n) = \mathbb{S}.$$

□

3.3 Przypadek nieskończonej średniej

Na koniec tego rozdziału zaprezentujemy dowód Twierdzenia Blackwella w przypadku nieskończonej średniej. Zaczniemy od kilku technicznych definicji i lematów.

Definicja 3.10
Niech G będzie dystrybuantą. $x \in \mathbb{R}$ nazywamy punktem wzrostu G, jeżeli

$$G(x+\varepsilon) - G(x-\varepsilon) > 0$$

dla każdego $\varepsilon > 0$. Zbiór wszystkich punktów wzrostu dystrybuanty G nazywamy nośnikiem rozkładu odpowiadającego dystrybuancie G.

3.4 Zadania

Indeks