

# SŁABA ZBIEŻNOŚĆ

*Notatki do wykładu (wersja 0.9)*

PIOTR DYSZEWSKI

**2022**

Nasz mózg elektrony okazał się bezsilny, po wprowadzeniu danych wypluł wielki znak zapytania.

---

*Hydrozagadka*

---

# Słaba zbieżność miar probabilistycznych

## Dane dotyczące przedmiotu

Nazwa przedmiotu: Słaba zbieżność miar probabilistycznych

Jednostka oferująca przedmiot: Instytut Matematyczny

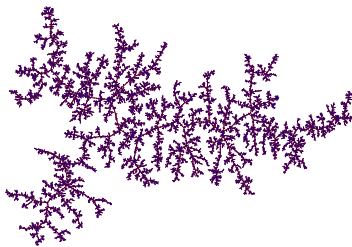
Założenia: Teoria prawdopodobieństwa 2 (28-MT-S-tTPrawd2)

Strona www: <https://sites.google.com/site/piotrdyszewski/teaching/sz2022>

Forma zajęć: wykład + ćwiczenia

Punkty ECTS: 6

Celem wykładu jest wprowadzenie pojęcia słabej zbieżności miar probabilistycznych w przestrzeniach metrycznych. Po zapoznaniu się z ogólną teorią zbadamy zbieżność w przestrzeniach funkcji ciągłych, miar punktowych oraz funkcji typu cadlag. Po prezentacji tych klasycznych już przykładów zbadamy ciągłe drzewa losowe oraz modele ewolucji cząsteczek z interakcjami.



Do opanowania podstaw wykładu niezbędny będzie teoriomiarowy rachunek prawdopodobieństwa oraz znajomość warunkowej wartości oczekiwanej (Rachunek prawdopodobieństwa 1B i 2B). Poruszymy zagadnienia takie jak:

#### IV

- A) **Słaba zbieżność:** Przestrzenie metryczne, słaba zbieżność na przestrzeniach metrycznych, Twierdzenie Portmanteau, Twierdzenie Prohorowa, ciasność;
- B) **Funkcje ciągłe:** Ruch Browna, Twierdzenie Donskera;
- C) **Miary punktowe:** Funkcjonał Laplacea, konstrukcja procesu Piossona, zbieżność w  $\nu$ -topologii;
- D) **Przestrzeń Skorohoda:** metryka Skorohoda, losowa zamiana czasu, teoria odnowy;
- F) **Zastosowania:** ciągłe drzewa losowe, stochastyczne układy cząstek i procesy fragmentacji.

Podstawową literaturą do wykłady są:

- Billingsley, P. (1968). *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons.
- Resnick, S. I. (2007). *Extreme values, regular variation, and point processes*. Springer Science & Business Media.
- Whitt, W. (2002). *Stochastic-process limits*. Springer New York, NY
- G. Miermont, *Aspects of random maps*

Zaliczenie ćwiczeń na podstawie dwóch sprawdzianów pisemnych i aktywności w czasie zajęć. Ocena z egzaminu na podstawie egzaminu ustnego.

Wrocław, luty 2023

*Piotr Dyszewski*

---

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b> .....	1
1.1	Spacerory losowe i funkcje ciągłe .....	2
1.2	Drzewa losowe .....	5
1.3	Rekordy i miary .....	8
1.4	Systemy cząsteczek z interakcjami .....	11
<b>2</b>	<b>Przestrzenie metryczne</b> .....	14
2.1	Słaba zbieżność .....	19
2.2	Miary ciasne* .....	25
2.3	Odwzorowania ciągłe .....	27
2.4	Długie cykle .....	32
2.5	Losowe partycje .....	35
<b>3</b>	<b>Funkcje ciągłe</b> .....	37
3.1	Zbiory zwarte w $C[0, 1]$ .....	38
3.2	Funkcje losowe .....	41
3.3	Miara Wienera i twierdzenie Camerona-Martina .....	42
3.4	Twierdzenie Donskera .....	50
3.5	Most Browna .....	54
<b>4</b>	<b>Miary</b> .....	57
4.1	Procesy punktowe .....	58
4.2	Procesy Poissona .....	64
4.3	Procesy punktowe i losowe partycje .....	70
4.4	$v$ -topologia .....	70
<b>5</b>	<b>Funkcje Càdlàg</b> .....	79
5.1	Rozkłady stabilne .....	79
5.2	Przestrzeń Skorochoda .....	82
5.2.1	Metryka Skorochoda $J_1$ .....	83
5.2.2	Metryka Skorochoda $M_1$ .....	86
5.2.3	Własności topologii $J_1$ .....	86

VI	Spis treści	
	5.2.4	Projekcje ..... 88
5.3	Rodziny ciasne w $D[0,1]$ ..... 89	
5.4	Losowe funkcje càdlàg ..... 89	
<b>6</b>	<b>Losowe przestrzenie metryczne</b> ..... 93	
6.1	Wycieczki ruchu Browna ..... 93	
	6.1.1	Warunkowanie prostego spaceru losowego ..... 93
	6.1.2	ciągły odpowiednik ..... 93
6.2	Ciągłe drzewa ..... 93	
6.3	Metryka Gromova-Hausdorffa ..... 95	

# Wstęp

**Streszczenie** Zaczniemy od krótkiego przeglądu zagadnień, które będziemy omawiać w trakcie wykładu. Niekiedy nasze rozumowania będą opierały się na heurystyce, ale wszystkie podane fakty będą ściśle sformułowane i udowodnione udowodnione.

Twierdzenia graniczne łączą obiekty dyskretne i ciągłe. Przykładowo, z podstawowego kursu analizy wiemy, że dla ciągłej funkcji  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , przy  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \rightarrow \int_0^1 f(x) dx. \quad (1.1)$$

Pozwala to między innymi przybliżać dyskretne obiekty, którego wartość lub własności mogą być trudne do określenia, przez obiekty ciągłe, którym operować jest niekiedy znacznie łatwiej. Dodatkowo dostarcza to ciągłego kontekstu dla bytów dyskretnych. Rzeczywiście, suma  $\sum_{k=1}^n f(k/n)/n$  może być interpretowana jako całka  $\int_0^1 f_n(x) dx$  z funkcji  $f_n$  danej wzorem

$$f_n(s) = \sum_{k=1}^n f(k/n) \mathbb{1}_{[(k-1)/n, k/n)}(s).$$

W szczególności ciągły kontekst pozwala na użycie całego dobrodziejstwa abstrakcyjnej teorii  $L^1$  do badania przeróżnych własności  $\sum_{k=1}^n f(k/n)/n$ .

Zauważmy na koniec, że przytoczona przez nas zbieżność ma również interpretację probabilistyczną. Jeżeli  $U_n$  jest losowo wybraną liczbą ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ , to

$$\mathbb{E}[f(U_n/n)] = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

Dodatkowo, jeżeli  $U$  jest losowo wybranym punktem z odcinka  $(0, 1)$ , to

$$\mathbb{E}[f(U)] = \int_0^1 f(x) dx.$$

Wówczas zbieżność (1.1) dla każdej ciągłej  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  oznacza, że ciąg zmiennych  $U_n/n \in [0, 1]$  zbiega słabo do  $U \in [0, 1]$ .

Celem wykładu jest prezentacja podstaw słabej zbieżności i funkcjonalnych twierdzeń granicznych. Interesować nas będzie asymptotyczne zachowanie elementów losowych w przestrzeniach metrycznych. Przyjrzymy się teraz kilku konkretniejszym przykładom twierdzeń granicznych. Skupimy się na funkcjach ciągłych i drzewach losowych.

## 1.1 Spacery losowe i funkcje ciągłe

Jednym z kluczowych zjawisk w teorii prawdopodobieństwa jest centralne twierdzenie graniczne. Jeżeli  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem zmiennych iid o rozkładzie  $\mathbb{P}[X_k = 1] = \mathbb{P}[X_k = -1] = 1/2$ , to dla  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  zachodzi

$$n^{-1/2}S_n \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad (1.2)$$

gdzie  $\mathcal{N}(0, 1)$  oznacza standardowy rozkład normalny. Przypomnijmy, że przez  $\Rightarrow$  oznaczamy słabą zbieżność zmiennych losowych. Dokładniej (1.2) oznacza, że dla każdej ograniczonej funkcji ciągłej  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , przy  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\mathbb{E} \left[ f \left( n^{-1/2}S_n \right) \right] \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) \Phi(dx), \quad (1.3)$$

gdzie  $\Phi$  oznacza rozkład normalny, tj. miarę probabilistyczną na prostej taką, że dla każdego borelowskiego  $A$ ,

$$\Phi(A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

Wbrew pozorom zbieżność (1.3) warto zapisać w nieco bardziej abstrakcyjny sposób. Oznaczmy rozkład zmiennej losowej  $n^{-1/2}S_n$  przez  $\mu_n$ , tj.

$$\mu_n(A) = \mathbb{P} \left[ n^{-1/2}S_n \in A \right]$$

dla borelowskich  $A$ . Wreszcie, dla miary probabilistycznej  $\mu$  na prostej oraz ograniczonej funkcji ciągłej  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będziemy stosować oznaczenie

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx).$$

Wówczas (1.3) zapisuje się jako przy  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\mu_n(f) \rightarrow \Phi(f)$$

dla każdej ciągłej i ograniczonej funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Intuicyjnie oznacza to, że lokalnie  $\mu_n$  przypomina  $\Phi$ . Funkcje  $f$  na których testujemy zbieżność mogą posłużyć do wycinania lokalnego fragmentu prostej, który chcemy opisać. Rzeczywiście, dla ustalonych  $a < b$  dobierając funkcje ciągłe przybliżające  $\mathbb{1}_{[a,b]}$  widzimy, że

$$\mathbb{P} \left[ a \leq n^{-1/2} S_n \leq b \right] \rightarrow \int_a^b \Phi(dx).$$

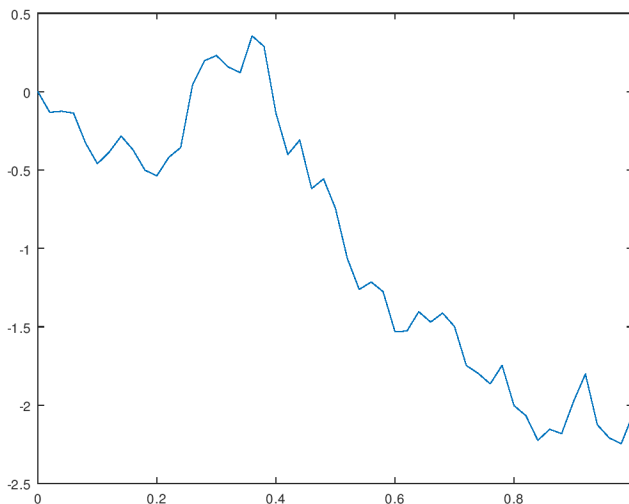
Klasyczne sformułowanie twierdzenia granicznego pozwala na opis lokalnych własności  $n^{-1/2} S_n$ . Zastanówmy się teraz jak opisać własności całego ciągu  $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ . Dla ustalenia uwagi przypuśćmy, że chcemy opisać lokalne własności rozkładu

$$\max_{k \in [n]} S_k,$$

gdzie  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Powinniśmy znaleźć jeden obiekt, który będzie zawierał całą informację o ciągu  $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ . Jednym ze sposobów jest rozważenie funkcji kawałkami liniowej  $Y_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zadanej przez

$$Y_n(t) = n^{-1/2} S_{[tn]} + \{tn\} n^{-1/2} X_{[tn]+1}.$$

Innymi słowy  $Y_n(\cdot)$  jest kawałkami liniowa i równa  $n^{-1/2} S_k$  w punkcie  $k/n$ .



**Rysunek 1.1.** losowa funkcja  $Y_n$  dla  $n = 50$

Rozważany przez nas losowy obiekt  $Y_n$  jest elementem  $C[0, 1]$  przestrzeni

funkcji ciągłych na odcinku  $[0, 1]$ . Czy  $Y_n$  widziane w ten sposób ma granicę przy  $t \rightarrow \infty$ ? Zauważmy, że dla  $s, t \in [0, 1], s < t$ ,

$$\frac{Y_n(t) - Y_n(s)}{\sqrt{n}} = \frac{S_{[nt]} - S_{[ns]}}{\sqrt{n}} + O(n^{-1/2}) \Rightarrow \mathcal{N}(0, t - s).$$

Dodatkowo  $Y_n(0) = 0$ , i  $S_{[nt]} - S_{[ns]}$  jest niezależne od  $\sigma(S_1, S_2, \dots, S_{[sn]-1})$ . Funkcja graniczna dla  $Y_n$  powinna mieć niezależne przyrosty. Istnieje zatem jeden kandydat na granicę dla  $Y_n$ .

### Definicja 1.1

*Ruchem Browna (procesem Wienera)* nazywamy proces stochastyczny  $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , taki że

- (B1)  $B_0 = 0$  p.w;
- (B2)  $B$  ma niezależne przyrosty: dla dowolnych  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, +\infty)$ ,  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , zmienne losowe  $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}$  są niezależne;
- (B3) dla każdych  $t > s$ , zmienna  $B_t - B_s$  ma rozkład  $\mathcal{N}(0, t - s)$ ;
- (B4) funkcja  $t \mapsto B_t(\omega)$  jest ciągła dla wszystkich  $\omega \in \Omega$ .

Spodziewamy się, że  $Y_n$  będzie zbiegało do  $B$  (co doprecyzujemy w dalszej części wykładu)

$$Y_n \Rightarrow B. \quad (1.4)$$

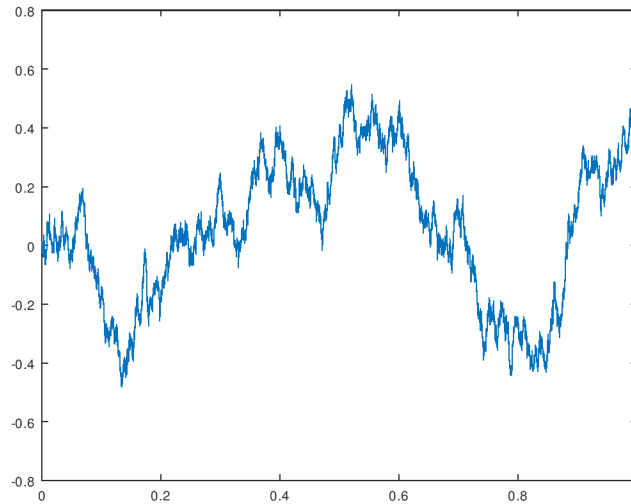
Jakie daje to informacje o  $\max_k S_k$ ? Warto w tym miejscu zauważyć, że

$$n^{-1/2} \max_{k \in [n]} S_k = \max_{t \in [0, 1]} Y_n(t).$$

Lokalny opis rozkładu  $\max_{k \in [n]} S_k$  wynika zatem z lokalnego opisu rozkładu  $\max Y_n$ . Zauważmy, że odwzorowanie  $m: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zadane przez  $m(f) = \max f$  jest ciągłe w topologii zbieżności jednostajnej. Spodziewamy się zatem, że

$$n^{-1/2} \max_{k \in [n]} S_k = \max_{t \in [0, 1]} Y_n(t) = m(Y_n) \Rightarrow m(B) = \max_{t \in [0, 1]} B(t).$$

Należy tutaj zaznaczyć, że słaba zbieżność (1.4) odnosi się do losowych funkcji ciągłych. Zbieżność (1.4) mówi nam o zachowaniu całej ścieżki  $(S_1, S_2, \dots, S_n)$  i daje nam więcej informacji niż klasyczne centralne twierdzenie graniczne (1.2), które opisuje tylko ostatnią wartość  $S_n$ .

Rysunek 1.2. losowa funkcja graniczna  $B$ 

## 1.2 Drzewa losowe

Przypomnijmy, że grafem  $G = (V, E)$  nazywamy parę zbioru wierzchołków  $V$  i krawędzi  $E$  taką, że

$$E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in V, x \neq y\},$$

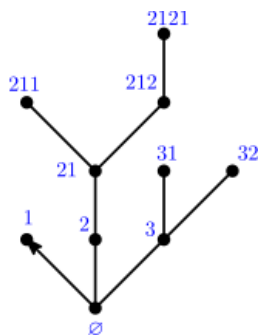
Graf  $G$  nazywamy drzewem, jeżeli jest spójny i nie ma cykli. W każdym drzewie  $\mathbf{t} = (V, E)$  będziemy wyróżniali korzeń  $\emptyset \in V(\mathbf{t})$ . Dodatkowo każdemu z wierzchołków będziemy przypisywali etykietę ze zbioru

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=1} \mathbb{N}^n \cup \{\emptyset\}$$

w taki sposób, że jeżeli  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  jest rodzicem  $y = (y_1, \dots, y_m)$  to  $m = n + 1$  oraz  $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$ . Zauważmy, że przy ustalonym właśnie etykietowaniu istnieje kanoniczna reprezentacja drzewa  $\mathbf{t}$  na płaszczyźnie (tak, aby etykiety wśród rodzeństwa czytane od lewej do prawej tworzyły ciąg rosnący). Od tej pory przez drzewo rozumiemy drzewo z etykietami lub równoważnie rysunek drzewa na płaszczyźnie.

Niech  $\mathbf{t}$  będzie drzewem. Z  $\mathbf{t}$  możemy stowarzyszyć funkcję konturową  $C_{\mathbf{t}}$  w następujący sposób: Niech  $n = \#E(\mathbf{t})$ . i niech  $e_0, e_1, \dots, e_{2n-1}$  będzie ciągiem zorientowanych krawędzi obchodzących  $\mathbf{t}$ . Niech  $u_i$  będzie wierzchołkiem początkowym w  $e_i$  oraz  $u_{2n} = \emptyset$ . Definiujemy

$$C_{\mathbf{t}}(i) = d_{\mathbf{t}}(u_0, u_i),$$

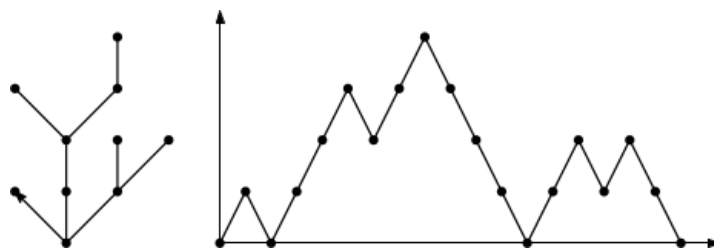


Rysunek 1.3. Przykładowe etykietowanie drzewa

gdzie  $u_0$  jest korzeniem  $\mathbf{t}$  a  $d_t$  oznacza odległość w grafie  $\mathbf{t}$ . Zauważmy, że wówczas  $C_t$  jednoznacznie wyznacza nam  $\mathbf{t}$ . Rozszerzamy  $C_t$  z liczb  $\{0, 1, \dots, 2n\}$  do całego odcinka  $[0, 2n]$  wzorem

$$C_t(s) = (1 - \{s\})C_t([s]) + \{s\}C_t([s] + 1).$$

Chcielibyśmy zrozumieć geometrię dużego losowego drzewa  $\mathbb{T}_n$  o  $n$  wierzchołkach. Jedynym ze sposobów jest zbadanie stowarzyszonych funkcji konturowych  $C_{\mathbb{T}_n}$  jako losowych elementów  $C[0, 1]$ .



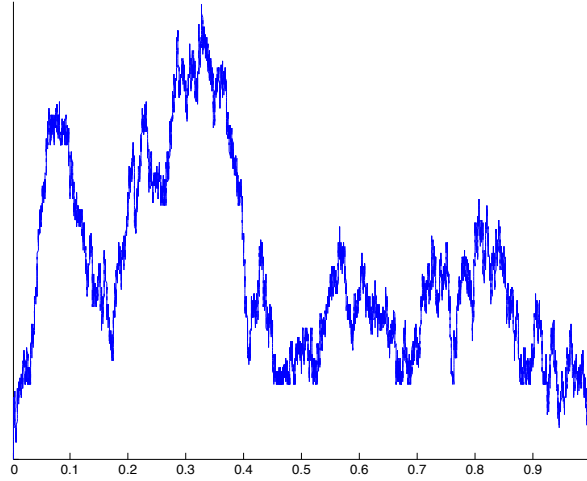
Rysunek 1.4. drzewo i jego funkcja konturowa

Jeżeli  $\mathbb{T}_n$  jest jednostajnie wylosowane spośród drzew o  $n$  wierzchołkach, to ciąg  $C_{\mathbb{T}_n}(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2n$  może być generowany w następujący sposób. Niech  $S_n$  będzie prostym, symetrycznym spacerem losowym na  $\mathbb{Z}$ . Wówczas  $\{C_{\mathbb{T}_n}(k)\}_{k=0}^{2n}$  ma ten sam rozkład do  $\{S_k\}_{k=0}^{2n}$  pod warunkiem  $A_n = \{S_k \geq 0, S_{2n} = 0\}$ . Skoro  $Y_n \Rightarrow B$ , to spodziewamy się, że  $(C_{\mathbb{T}_n}(t2n))/\sqrt{2n}$  zbiegają do  $B$  pod warunkiem  $\{B_t \geq 0, B_1 = 0\}$ . Problem tutaj polega na tym, że ostatnie zdarzenie ma prawdopodobieństwo zero. Aby ten problem obejść rozważmy

$$G = \sup\{t \in [0, 1] : B_t = 0\}, \quad D = \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}.$$

Skoro  $B_1 \neq 0$  p.w. to z ciągłości  $B$ ,  $G < 1 < D$  p.w. Zdefiniujemy znormalizowaną wycieczkę ruchu Browna przez

$$\mathbf{e}_t = \frac{|B_{G+t(D-G)}|}{\sqrt{D-G}}, \quad t \in [0,1].$$

Rysunek 1.5. losowa funkcja  $\mathbf{e}$ 

Okazuje się, że

$$\left( \frac{C_{\mathbb{T}_n}(2nt)}{\sqrt{2n}} \right)_{t \in [0,1]} \Rightarrow \mathbf{e} = (\mathbf{e}_t)_{t \in [0,1]}.$$

Skoro  $C_{\mathbb{T}_n}$  jednoznacznie kodują drzewo  $\mathbb{T}_n$ , to to z kolei powinno pociągać zbieżność  $\mathbb{T}_n$  w odpowiednim sensie. Zobaczymy teraz jako można odzyskać  $\mathbb{T}_n$  z  $C_n$ . Ze względów technicznych łatwiej będzie nam pracować ze schodkową wersją funkcji konturowej, która niesie tyle samo informacji o drzewie. Rozważmy

$$\ell_n(t) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{C_{\mathbb{T}_n}(k)}{\sqrt{2n}} \mathbb{1}_{[(k-1)/n, k/n)}(t)$$

oraz pseudometrykę pochodzącą od  $\ell_n$  daną wzorem

$$d_{\ell_n}(s, t) = \ell_n(s) + \ell_n(t) - \min_{r \in [s \wedge t, s \vee t]} \ell_n(r).$$

Wówczas  $d_{\ell_n}$  jest symetryczne i spełnia warunek trójkąta. Nie ma jednak własności rozdzielania punktów. Rozważmy relację równoważności  $x \sim_{\ell_n} y$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $d_{\ell_n}(x, y) = 0$ . Wówczas  $d_{\ell_n}$  podniesiona do zbioru ilorazowego  $[0, 1] / \sim_{\ell_n}$  wzorem

$$d_{\ell_n}([x], [y]) = d_{\ell_n}(x, y),$$

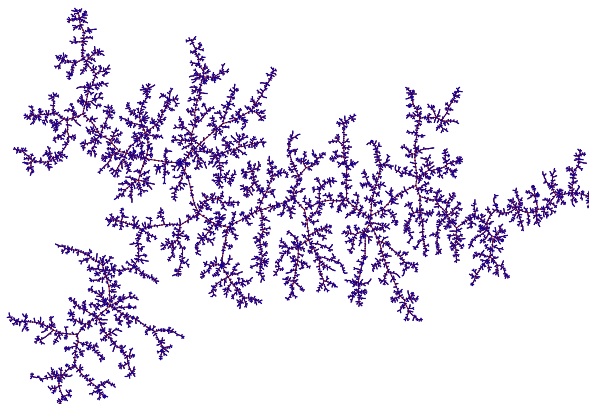
gdzie  $[x]$  i  $[y]$  to klasy abstrakcji  $x$  i  $y$ . Wówczas przestrzenie metryczne

$$([0, 1] / \sim_{\ell_n}, d_{\ell_n}) \quad \text{oraz} \quad (\mathbb{T}_n, d_{\mathbb{T}_n})$$

są izomorficzne (tutaj korzystamy z tego, że  $\ell_n$  jest skokowa). Spodziewamy się, że podobnie jak to miało miejsce dla  $C_{\mathbb{T}_n}$ ,

$$\ell_n \Rightarrow \mathbf{e}$$

To pozwala powiedzieć, że



Rysunek 1.6. ciągłe drzewo losowe  $\mathcal{T}_e$

$$\mathbb{T}_n \Rightarrow \mathcal{T}_e,$$

gdzie  $\mathcal{T}_e$  jest ciągłym drzewem losowym zadany jako

$$\mathcal{T}_e = [0, 1] / \sim_{\mathbf{e}},$$

gdzie relacja równoważności pochodzi od pseudometryki

$$d_{\mathbf{e}}(s, t) = \mathbf{e}(s) + \mathbf{e}(t) - \min_{r \in [s \wedge t, s \vee t]} \mathbf{e}_n(r).$$

### 1.3 Rekordy i miary

Przytoczymy teraz kolejne stosunkowo proste zagadnienie, które prowadzi do miar losowych, które z kolei okażą się nad wyraz przydatne w dwóch ostatnich zagadnieniach tego rozdziału. Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  takie, że dla pewnej  $\alpha \in (0, \infty)$ ,

$$\mathbb{P}[X_1 > n] = n^{-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Interesuje nas zarówno opis rekordów tym ciągu, czyli kolejnych wartości w  $M_n = \max_{k \leq n} X_k$  jak i odstępów pomiędzy nimi. Chcemy tym celu badać losowy podzbiór  $\mathbb{R}^2$  zadany przez  $\{(k/n, n^{-1/\alpha} X_k) : k \in \mathbb{N}\}$ . Powód, dla którego wpisaliśmy  $n^{-1/\alpha}$  okaże się jasny podczas dowodu następnego lematu. Z przyczyn technicznych wygodniej będzie nam pracować z miarą losową zadaną przez

$$\Lambda_n = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{j/n} \otimes \delta_{n^{-1/\alpha} X_j}.$$

Tak zdefiniowana  $\Lambda_n$  staje się losowym elementem  $\mathcal{M}(E)$  przestrzeni miar na  $E = [0, +\infty) \times (0, +\infty)$ . Kwestię określenia topologii na  $\mathcal{M}(E)$  wyjaśnimy w rozdziale czwartym, Zauważmy teraz, że

$$\{M_n \leq tn^{1/\alpha}\} = \{\Lambda_n(t, \infty) \times [0, 1] = 0\}.$$

Zauważmy, że dla ustalonego  $A \subseteq E$ ,  $\Lambda_n(A)$  jest zmienną losową.

### Lemat 1.2

Niech  $A = (a, b) \times (c, d)$ . Wówczas ciąg zmiennych losowych  $\Lambda_n(A)$  zbiega według rozkładu do zmiennej oznaczanej przez  $\Lambda_\infty(A)$  o rozkładzie Piossona z parametrem

$$(b - a) \int_c^d \alpha x^{-\alpha-1} dx.$$

*Dowód.* Zadanie □

W rozdziale czwartym pokażemy, że  $\Lambda_n \Rightarrow \Lambda_\infty$  w  $\mathcal{M}(E)$ . W chwili obecnej wiemy jedynie, że przy założeniu, że obiekt graniczny istnieje, to dla każdego  $A \subseteq E$  zmienna losowa  $\Lambda_\infty(A)$  powinna mieć rozkład Piossona z parametrem

$$\int_A \alpha x^{-\alpha-1} dx dt.$$

Rozważmy teraz dowolne prostokąty  $A_1, \dots, A_k \subseteq E$ . Zmienne losowe  $\Lambda_k(A_1), \dots, \Lambda_k(A_k)$  są zależne, ale przy przejściu granicznym ta zależność znika.

### Fakt 1.3

Dla dowolnych prostokątów  $A_1, \dots, A_k$  oraz dowolnych naturalnych  $l_1, \dots, l_k$

$$\mathbb{P} \left[ \bigcap_{1 \leq j \leq k} \{\Lambda_n(A_j) = l_j\} \right] \rightarrow \prod_{1 \leq j \leq k} \mathbb{P}[\Lambda_\infty(A_j) = l_j].$$

*Dowód.* Zadanie. □

**Definicja 1.4**

Niech  $\mu$  będzie  $\sigma$ -skończoną miarą na  $E = [0, +\infty) \times (0, +\infty)$ . Miarę losową  $\Lambda$  na  $\mathbb{R}$  nazywamy punktowym procesem Poissona jeżeli

- (i) dla każdego borelowskiego  $A \subseteq E$ , zmienna losowa  $\Lambda(A)$  ma rozkład Poissona z parametrem  $\mu(A)$ ;
- (ii) Dla dowolnych parami rozłącznych zbiorów borelowskich  $A_1, \dots, A_n$  zmienne  $\Lambda(A_1), \Lambda(A_2) \dots \Lambda(A_n)$  są niezależne.

Widzimy, że losowa miara graniczna  $\Lambda_\infty$  (o ile istnieje) jest procesem punktowym Poissona z miarą intensywności

$$\lambda(A) = \int_A \alpha x^{-\alpha-1} dx dt.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[M_n \leq tn^{1/\alpha}] &= \mathbb{P}[\Lambda_n([0, 1] \times (t, \infty)) = 0] \rightarrow \mathbb{P}[\Lambda_\infty([0, 1] \times (t, \infty)) = 0] = \\ &= e^{-\lambda([0, 1] \times (t, \infty))} = \exp \left\{ - \int_{[0, 1] \times (t, \infty)} \alpha x^{-\alpha-1} dx dt \right\} = e^{-t^{-\alpha}}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że powyższa heurystyka jest rzeczywiście zgodna z prawdą, bo jak pokazuje bezpośredni rachunek

$$\mathbb{P}[M_n \leq tn^{1/\alpha}] = (1 - \mathbb{P}[X > tn^{1/\alpha}])^n = (1 - t^{-\alpha}/n)^n \rightarrow e^{-t^{-\alpha}}.$$

Miary losowe  $\Lambda_n$  mają pełną informację o ekstremach  $X_1, \dots, X_n$ .

**Przykład 1.5**

Dla zmiennych  $X_1, X_2, \dots, X_n$  rozważmy ich statystyki pozycyjne:

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}.$$

Dokładniej zmienne  $\{X_{j:n}\}_{j \leq n}$  to zmienne  $\{X_k\}_{k \leq n}$  uporządkowane z kolejności rosnącej. Przykładowo  $X_{n:n} = \max_{k \leq n} X_k$ . Można pokazać (zadanie), że

$$\mathbb{P}[n^{-\alpha} X_{n-j:n} \leq x] \rightarrow \sum_{k=0}^j \frac{\lambda(A)^k}{k!} e^{-\lambda(A)},$$

gdzie  $A = [0, 1] \times (x, \infty)$ .

W rozdziale czwartym dokładnie omówimy topologię na  $\mathcal{M}(E)$  oraz słabą zbieżność miar losowych.

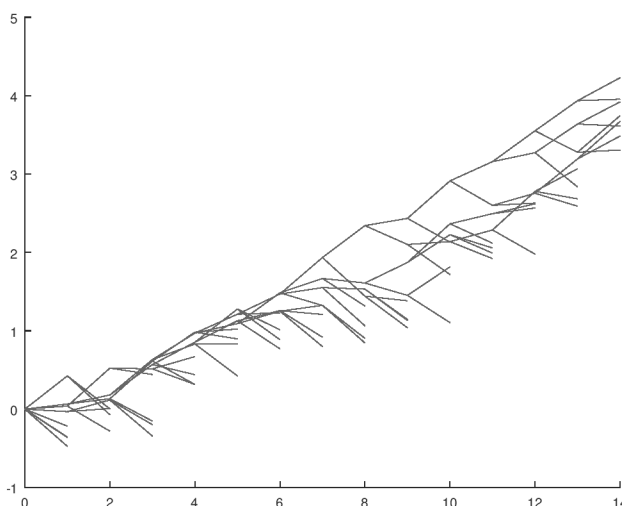
## 1.4 Systemy cząsteczek z interakcjami

Kolejny raz rozważmy zmienną losową o rozkładzie

$$\mathbb{P}[X > n] = n^{-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

dla pewnej  $\alpha > 0$ . Niech  $N \in \mathbb{N}$ . Rozważmy system  $N$  cząstek na  $\mathbb{N}$ , który zmienia się następująco

- (i) w chwili  $n = 0$  wszystkie  $N$  cząstek znajduje się w punkcie 0;
- (ii) w każdej chwili  $n > 0$  każda z  $N$  cząstek dzieli się na dwie nowe cząsteczki. Każda z  $2N$  cząstek wykonuje niezależny krok w prawo zgodnie z rozkładem  $X$ . Powiedzmy, że  $i$ -ta cząsteczka wykonuje krok o długości  $X_{n,i}$  dla  $i \leq 2N$ . Wreszcie  $N$  cząsteczek wysuniętych najbardziej na lewo zostaje usunięte z systemu. (w ten sposób zostaje  $N$  cząstek najbardziej wysuniętych na prawo)



Rysunek 1.7. realizacja procesu ze współzawodnictwem

W każdej chwili  $n$ , w naszym systemie znajduje się  $N$  cząstek zajmujących pozycje

$$\mathcal{X}_1(n) \leq \mathcal{X}_2(n) \leq \dots \leq \mathcal{X}_N(n).$$

Jakie jest zachowanie  $\mathcal{X}_N(n)$  przy  $n \rightarrow \infty$ ? Struktura probabilistyczna powyższego systemu jest skomplikowana, więc w analizie posłużymy się procesem, który jest łatwiejszy i pokażemy, że dostatecznie dobrze przybliża  $\mathcal{X}_N(n)$ . Dla  $\ell = \lceil \log_2(N) \rceil$  rozważmy proces  $R(n)$  zadany indukcyjnie przez

$$R(n+1) = R(n) \vee \max_{i \leq 2N} \{R(n-\ell) + X_{n+1,i}\}$$

**Fakt 1.6**

Niech  $\ell = \lceil \log_2(N) \rceil$ . Wówczas

$$R(n - \ell) \leq \mathcal{X}_1(n) \leq \mathcal{X}_N(n) \leq R(n).$$

*Dowód. Zadanie* □

Niech  $\Lambda = \sum_k \delta_{t_k} \otimes \delta_{\xi_{t_k}}$  będzie punktowym procesem Poissona zmiarą intensywności  $dt \otimes \mu(dx)$ , gdzie

$$\mu(x, \infty) = -2N\ell \log(1 - x^{-\alpha})$$

**Fakt 1.7**

Zmienne losowe  $\max\{\xi_{t_k} : t_k \leq 1/\ell\}$  oraz  $\max_{i \leq 2N} X_{n,i}$  mają ten sam rozkład.

*Dowód. zadanie.* □

Powyższy fakt sugeruje, że proces  $R = \{R(n)\}$  może być kontrolowany przez proces w czasie ciągłym. Niech funkcja  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(t)$  będzie zadany przez

$$\mathcal{R}(t) = \max \left\{ \sum_{i=1}^k \xi_{t_i} : k \in \mathbb{N}, t_i \leq t, t_i - t_{i-1} \geq 1 \right\}.$$

Zanim zobaczymy, że rzeczywiście proces  $\mathcal{R}$  zauważmy najpierw,  $\mathcal{R}$  jest funkcją, która jest jedynie prawostronnie ciągła. Dodatkowo

$$\mathcal{R}(t) = \max_{t_k \in [t-1, t]} \{ \mathcal{R}(t_k - 1) + \xi_{t_k} \}.$$

Jeżeli rozszerzymy definicję punktów  $\xi_s$  do wszystkich wartości  $s \in \mathbb{R}$  wzorem  $\xi_s = \sum_k \xi_{t_k} \delta_{t_k}(s)$ , to powyższa równość zapisuje się jako

$$\mathcal{R}(t) = \max_{s \in [0, 1]} \{ \mathcal{R}(t - s - 1) + \xi_{t-s} \}.$$

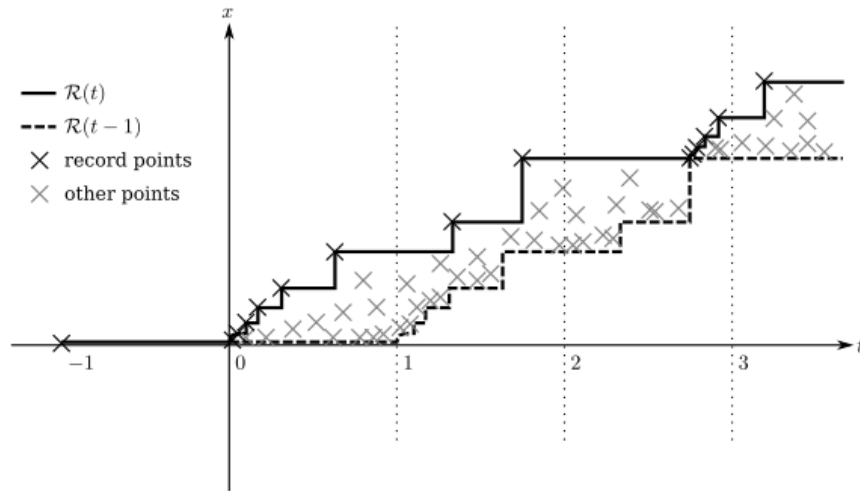
Stąd proces  $\mathcal{R}$  można konstruować w następujący sposób. Powiedzmy, że  $\mathcal{R}(t)$  jest zdefiniowany dla  $t \leq n \in \mathbb{N}$ . W pasku  $(n, n+1] \times (0, \infty)$  wygenerujmy punkty punkowego procesu Piossona z intensywnością  $\mu(dx) \otimes dt$ . Następnie każdy atom  $(s_k, \xi_{s_k})$  w pasku należy przesunąć o wektor  $(0, \mathcal{R}(t-1))$ . Niech teraz  $\mathcal{R}(t)$  będzie procesem rekordów tak otrzymanych punktów.

Zauważmy wreszcie, że  $\mathcal{R}$  istotnie kontroluje  $R$ , które z kolei kontroluje  $\mathcal{X}$ .

**Lemat 1.8**

Dla każdego  $t > 0$ ,

$$\mathbb{P}[\mathcal{R}(n/\ell) > t] > \mathbb{P}[R(n) > t] > \mathbb{P}[\mathcal{R}(n/(\ell+1)) > t].$$



*Dowód. Zadanie.*

□

Sprowadziliśmy zatem problem badania maksimum i minimum w gałęzkowym systemie cząsteczek z interakcjami do badania zachowania prawostronnie ciągłej funkcji  $\mathcal{R}$ . W rozdziale piątym poznamy topologię w tej przestrzeni i zajmiemy się badaniem słabej zbieżności w niej.

## Przestrzenie metryczne

**Streszczenie** Zapoznamy się z pojęciem słabej zbieżności na ogólnych przestrzeniach metrycznych. Na koniec zastosujemy zebrany aparat do badania losowych partycji.

Zacniemy od sformułowania pojęcia słabej zbieżności w ogólnym kontekście przestrzeni metrycznych. Przypomnijmy, że przestrzenią metryczną nazywamy parę  $(S, \rho)$ , gdzie  $\rho$  jest metryką na zbiorze  $S$ , tj. symetryczną funkcją  $\rho: S \times S \rightarrow \mathbb{R}_+$  taką, że  $\rho(x, y) = 0$  dla wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = y$  oraz spełniona jest nierówność trójkąta  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  dla dowolnych  $x, y, z \in S$ . Kulą otwartą o środku w punkcie  $x \in S$  i promieniu  $r > 0$  nazywamy podzbiór  $S$  zadany przez

$$B_r(x) = \{y \in S : \rho(x, y) < r\}.$$

Zbiór  $U \subseteq S$  jest otwarty w  $(S, \rho)$ , jeżeli jest (dowolną) sumą kul otwartych. Wówczas  $U \subseteq S$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $x \in U$  istnieje  $r_{x,U} > 0$  takie, że  $B_{r_{x,U}}(x) \subseteq U$ . Przypomnijmy również, że  $(S, \rho)$  nazywamy ośrodkową, jeżeli istnieje przeliczalny, gęsty podzbiór  $S_0 \subseteq S$ , tj. taki, że dla każdego otwartego zbioru  $U$ ,  $S_0 \cap U \neq \emptyset$ . Przez  $\Sigma$  oznaczamy będziemy  $\sigma$ -ciało zbiorów borelowskich  $S$ , czyli  $\sigma$ -ciało podzbiorów  $S$  generowane przez wszystkie zbiory otwarte.

### Fakt 2.1

Jeżeli  $(S, \rho)$  jest ośrodkowa, to

$$\Sigma = \sigma(B_r(x) : x \in S, r \geq 0).$$

### Przykład 2.2

Niech  $S = \mathbb{R}$  z metryką euklidesową  $\rho(x, y) = |x - y|$ . Wówczas  $S$  jest ośrodkowa ze zbiorem gęstym  $S_0 = \mathbb{Q}$ . Zauważmy, że oznacza to, że w każdej kuli  $B_r(x)$  istnieje  $q \in \mathbb{Q}$  takie, że dla pewnego  $r_q \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$ ,  $x \in B_r(q) \subseteq B_r(x)$ . Oznacza to, że każdy zbiór otwarty w  $\mathbb{R}$  jest przeliczalną sumą kul.

$$\Sigma = \sigma(U : U \subseteq S \text{ otwarty}) = \sigma((a, b) : a < b) = \mathcal{Bor}(\mathbb{R}).$$

Przypomnijmy, że  $\mathbf{P}$  nazywamy prawdopodobieństwem na  $(S, \Sigma)$ , jeżeli  $\mathbf{P} : \Sigma \rightarrow [0, 1]$  jest przeliczalnie addytywną funkcją zbioru taką, że  $\mathbf{P}[S] = 1$ . Na początek przytoczymy techniczny, ale wyjątkowo użyteczny fakt, że wartości  $\mathbf{P}$  są jednoznacznie wyznaczone przez wartości na zbiorach domkniętych.

### Twierdzenie 2.3

Każda miara probabilistyczna  $\mathbf{P}$  na  $(S, \Sigma)$  jest regularna. Dokładniej dla każdego  $A \in \Sigma$  oraz  $\varepsilon > 0$  istnieją zbiór domknięty  $F \subseteq A$  oraz zbiór otwarty  $G \supseteq A$  takie, że  $\mathbf{P}[G \setminus F] \leq \varepsilon$ .

*Dowód.* Rozważmy klasę zbiorów  $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$  spełniających tezę twierdzenia. Dokładniej  $A \in \mathcal{A}$  jeżeli dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieją zbiór domknięty  $F \subseteq A$  oraz zbiór otwarty  $G \supseteq A$  takie, że  $\mathbf{P}[G \setminus F] \leq \varepsilon$ .

Pokażemy najpierw, że  $\mathcal{A}$  zawiera wszystkie zbiory domknięte. Ustalmy domknięty  $A \subseteq S$ . Dla  $x \in S$  rozważmy odległość  $x$  od  $A$  zadaną przez

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}.$$

Dla  $\delta > 0$  rozważmy  $\delta$ -otoczenie zbioru  $A$  zadane wzorem

$$A^\delta = \{x \in X : \rho(x, A) < \delta\}.$$

Zauważmy, że

$$\bigcap_{\delta > 0} A^\delta = \text{cl}(A) = A.$$

Rzeczywiście,  $x \notin \bigcap_{\delta > 0} A^\delta$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \notin A^{\delta_0}$  dla pewnej  $\delta_0$ . Oznacza to, że kula otwarta o środku w  $x$  i promieniu  $\delta_0$  jest rozłączna z  $A$ . Jest to równoznaczne z  $x \notin \text{cl}(A)$ .

Z ciągłości z góry  $\mathbf{P}$  na zbiorze  $A$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathbf{P}[A^\delta] = \mathbf{P}[A]$ . Jeżeli więc obierzemy  $F = A$  oraz  $G = A^\delta$ , to  $\mathbf{P}[G \setminus F] = \mathbf{P}[A^\delta \setminus A] \leq \varepsilon$  dla dostatecznie małej  $\delta > 0$ . To pokazuje, że  $A \in \mathcal{A}$ .

Teraz pokażemy, że  $\mathcal{A}$  tworzy  $\sigma$ -ciało. Klasa  $\mathcal{A}$  jest zamknięta na dopełnienia. Istotnie, dla  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\varepsilon > 0$  oraz świadków  $F \subseteq A \subseteq G$  takich, że  $\mathbf{P}[G \setminus F] \leq \varepsilon$  zbiory  $G^c = X \setminus G$  oraz  $F^c = X \setminus F$  są odpowiednio domknięte i otwarte oraz spełniają  $G^c \subseteq A^c \subseteq F^c$  oraz  $\mathbf{P}[G^c \setminus F^c] \leq \varepsilon$ .

Klasa  $\mathcal{A}$  jest również zamknięta na przeliczalne sumy. Rzeczywiście dla  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $n \geq 1$  oraz  $\varepsilon > 0$  możemy wybrać zbiory domknięte  $F_n$  oraz zbiory otwarte  $G_n$  takie, że  $F_n \subseteq A_n \subseteq G_n$  oraz  $\mathbf{P}[G_n \setminus F_n] \leq \varepsilon 2^{-n}$ ,

$n \geq 1$ . Rozważmy zbiór otwarty  $G = \bigcup_{n \geq 1} G_n$  oraz zbiór domknięty  $F = \bigcup_{1 \leq n \leq n_0} F_n$ , gdzie  $n_0$  jest tak dobrane, aby  $\mathbf{P}[\bigcup_{n \geq 1} F_n \setminus F] \leq \varepsilon/2$ . Istnienie  $n_0$  jest zagwarantowane przez ciągłość  $\mathbf{P}$  z dołu na zbiorze  $\bigcup_{n \geq 1} F_n$ . Wówczas  $F \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n \subseteq G$  oraz  $\mathbf{P}[G \setminus F] \leq \varepsilon$ .

Klasa  $\mathcal{A}$  zawiera więc  $\sigma$ -ciało generowane przez wszystkie zbiory domknięte, czyli  $\Sigma$ . Skoro  $\mathcal{A} = \Sigma$ , to teza twierdzenia jest prawdziwa dla każdego  $A \in \Sigma$ .  $\square$

Zauważmy, że powyższe **Twierdzenie 2.3** implikuje, że  $\mathbf{P}$  jest wyznaczona jednoznacznie przez wartości na zbiorach domkniętych. Rzeczywiście dla  $A \in \Sigma$ ,

$$\mathbf{P}[A] = \sup\{\mathbf{P}[F] : F \subseteq A, F \text{ domknięty}\}.$$

Rzeczywiście, nierówność  $\geq$  w powyższym wzorze jest oczywista z monotoniczności prawdopodobieństwa. Aby uzasadnić  $\leq$  zauważmy, że z **Twierdzenia 2.3** dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  istnieje zbiór domknięty  $F \subseteq A$  i otwarty  $G \supseteq A$  takie, że  $\mathbf{P}[A] \leq \mathbf{P}[G] = \mathbf{P}[G \setminus F] + \mathbf{P}[F] \leq \varepsilon + \mathbf{P}[F]$ . Jedną z konsekwencji powyższego wzoru jest to, że każde dwie miary probabilistyczne, które zgdzają się na zbiorach domkniętych, są sobie równe.

#### Definicja 2.4

Powiemy, że  $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$  jest klasą rozróżniającą, jeżeli dla dowolnych miar probabilistycznych  $\mathbf{P}_1$  oraz  $\mathbf{P}_2$  na  $(S, \Sigma)$ ,  $\mathbf{P}_1(A) = \mathbf{P}_2(A)$  dla wszystkich  $A \in \mathcal{A}$  pociąga  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ , czyli  $\mathbf{P}_1(B) = \mathbf{P}_2(B)$  dla wszystkich  $B \in \Sigma$ .

Klasa zbiorów otwartych i klasa zbiorów domkniętych są klasami rozróżniającymi. Dodatkowo każdy  $\pi$ -układ generujący  $\Sigma$  jest klasą rozróżniającą. Przypomnijmy, że  $\pi$ -układem nazywamy dowolną rodzinę zamkniętą na skończone przekroje.

#### Fakt 2.5

Niech  $\mathcal{A}$  będzie  $\pi$ -układem. Jeżeli  $\sigma(\mathcal{A}) = \Sigma$ , to  $\mathcal{A}$  jest klasą rozróżniającą.

*Dowód.* zadanie.  $\square$

#### Przykład 2.6

Rozważmy  $S = \mathbb{R}$ . Wówczas  $\Sigma = \text{Bor}(\mathbb{R})$ . Rodzina zbiorów

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$$

jest  $\pi$ -układem generującym  $\Sigma$ . Z **Faktu 2.5**  $\mathcal{A}$  jest klasą generującą. Oznacza to dokładnie tyle, że miara  $\mathbf{P}$  jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości dystrybuanty

$$F_{\mathbf{P}}(a) = \mathbf{P}[(-\infty, a]].$$

**Przykład 2.7**

Niech teraz  $S = \mathbb{R}^k$  dla pewnego  $k \in \mathbb{N}$  z metryką euklidesową

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j - y_j)^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_k), \quad y = (y_1, \dots, y_k).$$

Wówczas  $\Sigma = \mathcal{Bor}(\mathbb{R}^k)$  jest generowane przez  $\pi$ -układ

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_k] : a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Skoro  $\mathcal{A}$  jest klasą generującą, to podobnie jak w przypadku jednowymiarowym,  $\mathbf{P}$  jest jednoznacznie wyznaczone przez wartości wielowymiarowej dystrybuanty

$$F_{\mathbf{P}}(a_1, \dots, a_k) = \mathbf{P}[(-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_k]].$$

**Przykład 2.8**

Rozważy  $S = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , czyli przestrzeń nieskończonych ciągów  $x = (x_1, x_2, \dots)$  o wartościach rzeczywistych. Inaczej funkcji  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \mapsto x_n$ . Na  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  rozważmy metrykę

$$\rho(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \min\{1, |x_j - y_j|\} 2^{-j}.$$

Wówczas  $x \rightarrow y$  w  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_j \rightarrow y_j$  w  $\mathbb{R}$  dla każdego  $j \in \mathbb{N}$ . Innymi słowy  $\rho$  zadaje na  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  metrykę zbieżności punktowej. Dla  $k \in \mathbb{N}$  rozważmy projekcję  $\pi_k: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^k$  zadaną przez  $\pi_k(x) = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Wówczas  $\pi_k$  jest odwzorowaniem ciągłym. Oznacza to, że rodzina zbiorów skończenie wymiarowych

$$\mathcal{R}_f^{\mathbb{N}} = \{\pi_k^{-1}[H] : k \in \mathbb{N}, H \in \mathcal{Bor}(\mathbb{R}^k)\}$$

zawiera się w  $\mathcal{Bor}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ . Okazuje się, że  $\mathcal{R}_f^{\mathbb{N}}$  jest klasą rozróżniającą (zadanie).

**Przykład 2.9**

Niech  $S = C[0, 1]$  będzie przestrzenią funkcji ciągłych  $x = x(\cdot)$  na odcinku  $[0, 1]$  z metryką jednostajną

$$\rho(x, y) = \|x - y\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|.$$

Przypomnijmy, że jeżeli  $x_n \rightarrow x$  w  $C[0,1]$ , to w szczególności  $x_n(t) \rightarrow x(t)$  dla każdego  $t \in [0,1]$ . Wynikanie odwrotne nie jest prawdziwe. Rozważmy ciąg funkcyjny

$$z_n(t) = nt \mathbb{1}_{[0,1/n]}(t) + (2 - nt) \mathbb{1}_{[1/n,2/n]}(t).$$

Wówczas  $z_n(t) \rightarrow 0$  dla każdego  $t \in [0,1]$ , ale  $\rho(x_n, 0) = 1$  dla wszystkich  $n \in \mathbb{N}$ .

Niech  $\mathcal{C}$  będzie  $\sigma$ -ciałem zbiorów borelowskich  $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ . Dla  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq 1$  piszemy  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$  oraz  $|\mathbf{t}| = k$ . Rozważmy projekcję  $\pi_{\mathbf{t}}: C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^k$  zadaną przez  $\pi_{\mathbf{t}}(x) = (x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k))$ . Wówczas  $\pi_{\mathbf{t}}$  jest odwzorowaniem ciągłym a co za tym idzie  $\pi_{\mathbf{t}}^{-1}[H] \in \mathcal{C}$  dla dowolnego  $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ . Klasę zbiorów

$$\mathcal{C}_f = \{\pi_{\mathbf{t}}^{-1}[H] : \mathbf{t}, H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{|\mathbf{t}|})\}$$

nazywać będziemy zbiorami skończenie wymiarowymi. Pokażemy w zadaniu, że  $\mathcal{C}_f$  jest klasą rozróżniającą.

Zobaczmy teraz, że funkcje ciągłe również mają własność rozróżniania miar.

#### Twierdzenie 2.10

Założmy, że  $\mathbf{P}_1$  oraz  $\mathbf{P}_2$  są miarami probabilistycznymi na  $(S, \Sigma)$  takimi, że

$$\int f(x) \mathbf{P}_1(dx) = \int f(x) \mathbf{P}_2(dx)$$

dla każdej ograniczonej i jednostajnie ciągłej funkcji  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ . Wówczas  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ .

*Dowód.* Ustalmy zbiór domknięty  $F$ . Dla ustalonego  $\varepsilon > 0$  rozważmy funkcję  $f: S \rightarrow [0,1]$  zadaną przez  $f(x) = (1 - \rho(x, F)/\varepsilon)_+$ , gdzie  $t_+ = \max\{0, t\}$  dla  $t \in \mathbb{R}$ . Wówczas  $f(x) = 1$  dla  $x \in F$  oraz  $f(x) = 0$  dla  $x \notin F^\varepsilon$ . Stąd

$$\mathbb{1}_F(x) \leq f(x) = (1 - \rho(x, F)/\varepsilon)_+ \leq \mathbb{1}_{F^\varepsilon}(x).$$

Stąd, korzystając z założonej równości dla funkcji  $f$ ,

$$\mathbf{P}_1[F] \leq \int f(x) \mathbf{P}_1(dx) = \int f(x) \mathbf{P}_2(dx) \leq \mathbf{P}_2[F^\varepsilon].$$

Skoro  $F$  jest zbiorem domkniętym, to przy  $\varepsilon \rightarrow 0$  prawa strona będzie zbiegać do  $\mathbf{P}_2[F]$ . To pokazuje, że  $\mathbf{P}_1[F] \leq \mathbf{P}_2[F]$  co przez symetrię prowadzi do  $\mathbf{P}_1[F] = \mathbf{P}_2[F]$ . Skoro  $F$  jest dowolnym zbiorem domkniętym, to z uwag poprzedzających dowodzone twierdzenie wynika, że  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ .  $\square$

## 2.1 Słaba zbieżność

Funkcję  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy ciągłą w punkcie  $x \in S$ , jeżeli dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że  $\rho(x, y) < \delta$  pociąga  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ . Równoważnie,  $f$  jest ciągła w  $x$ , jeżeli  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  dla każdego ciągu  $\{x_n\}$  w  $S$  zbieżnego do  $x$ . Innymi słowy  $f$  jest ciągła w  $x$  jeżeli  $\rho(x, x_n) \rightarrow 0$  pociąga  $|f(x) - f(x_n)| \rightarrow 0$ .

Powiemy, że  $f$  jest ciągła, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie. Równoważnie  $f^{-1}[U]$  jest zbiorem otwartym w  $S$  dla każdego zbioru otwartego  $U \subseteq \mathbb{R}$ . Przypomnijmy, że przez  $C_b(S)$  oznaczamy klasę ciągłych i ograniczonych funkcji  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ . Dla  $f \in C_b(S)$  i miary probabilistycznej  $\mathbf{P}$  będziemy przyjmowali oznaczenie

$$\mathbf{P}(f) = \int_S f(x) \mathbf{P}(dx).$$

### Definicja 2.11

Niech  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem miar probabilistycznych na  $(S, \Sigma)$ . Powiemy, że  $\mathbf{P}_n$  zbiega słabo do miary probabilistycznej  $\mathbf{P}$  na  $(S, \Sigma)$ , jeżeli dla każdej  $f \in C_b(S)$ ,

$$\mathbf{P}_n(f) \rightarrow \mathbf{P}(f).$$

Piszemy wtedy  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ .

### Przykład 2.12

Niech  $\mathbf{P} = \delta_x$  dla pewnego  $x \in S$ , czyli

$$\mathbf{P}(A) = \delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \in A \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}.$$

Wówczas

$$\mathbf{P}(f) = \delta_x(f) = f(x).$$

Jeżeli rozważymy  $\mathbf{P}_n = \delta_{x_n}$  dla pewnych  $x_n \in S$ , to z ciągłości wszystkich  $f \in C_b(S)$ ,  $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_n \rightarrow x$  w  $S$ .

### Twierdzenie 2.13

Niech  $\mathbf{P}, \{\mathbf{P}_n\}$  będą miarami probabilistycznymi na  $(S, \Sigma)$ . Wówczas  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu  $\{n_k\}_k$  można wybrać podciąg  $\{n_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  taki, że  $\mathbf{P}_{n_{k_j}} \Rightarrow \mathbf{P}$ .

*Dowód.* Implikacja  $\Rightarrow$  jest oczywista. Załóżmy, że  $\mathbf{P}_n$  nie zbiega słabo do  $\mathbf{P}$ . Istnieje zatem funkcja ciągła  $f$  i  $\varepsilon > 0$  i ciąg  $\{n_k\}$  taki, że  $|\mathbf{P}_{n_k}(f) - \mathbf{P}(f)| > \varepsilon$ . Z ciągu  $\{\mathbf{P}_{n_k}\}_k$  nie można wybrać słabo zbieżnego podciągu.  $\square$

Przypomnijmy, że dla zbioru  $A \subseteq S$  definiujemy jego brzeg poprzez

$$\partial A = \text{cl}(A) \setminus \text{int}(A).$$

Wówczas  $x \in \partial A$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją ciągi  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  oraz  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S \setminus A$  takie, że  $y_n \rightarrow x$  oraz  $z_n \rightarrow x$  w  $S$ .

### Przykład 2.14

Niech  $\mathbf{P} = \delta_x$  i  $\mathbf{P}_n = \delta_{x_n}$  dla pewnych  $x, x_n \in S$  takich, że  $x_n \rightarrow x$  w  $S$ . Wtedy  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ . Zbadamy teraz co możemy powiedzieć o zbieżności  $\mathbf{P}_n[A]$  do  $\mathbf{P}[A]$  dla  $A \in \Sigma$ . Bez zmniejszania ogólności możemy zakładać, że  $A \neq \emptyset$  oraz  $A \neq S$ . Załóżmy najpierw, że  $x \notin \partial(A)$ . Wtedy  $x \in \text{int}(A)$  lub  $x \notin \text{cl}(A)$ . W pierwszym przypadku  $x_n \in \text{int}(A)$  dla dostatecznie dużych  $n$  i wtedy

$$\mathbf{P}_n(A) = 1 \rightarrow 1 = \mathbf{P}(A).$$

Jeżeli natomiast  $x \notin \text{cl}(A)$ , to  $x \in \text{int}(S \setminus A)$  i wtedy  $x_n \in \text{int}(S \setminus A)$  dla dostatecznie dużych  $n$  i wtedy

$$\mathbf{P}_n(A) = 0 \rightarrow 0 = \mathbf{P}(A).$$

Otrzymujemy więc pewne kryterium: jeżeli  $x \notin \partial A$ , to  $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$  pociąga  $\delta_{x_n}(A) \rightarrow \delta_x(A)$  dla dowolnego ciągu  $x_n \rightarrow x$ . Załóżmy teraz, że  $x \in \partial A$ . Wówczas istnieją ciągi  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  oraz  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S \setminus A$  takie, że  $y_n \rightarrow x$  i  $z_n \rightarrow x$  w  $S$ . Wobec tego  $\delta_{y_n} \Rightarrow \delta_x$  oraz  $\delta_{z_n} \Rightarrow \delta_x$ . Nie jest jednak możliwe, aby jednocześnie  $1 = \delta_{y_n}(A) \rightarrow \delta_x(A)$  oraz  $0 = \delta_{z_n}(A) \rightarrow \delta_x(A)$ . Jeżeli więc  $x \in \partial A$ , to nie jest możliwe aby  $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$  pociągało  $\delta_{x_n}(A) \rightarrow \delta_x(A)$  dla dowolnego ciągu  $x_n \rightarrow x$ .

W powyższym przykładzie warunek  $x \notin \partial A$  jest równoważny  $\delta_x(\partial A) = 0$ . Okazuje się, że to jest właśnie warunek który należy testować w ogólnym kontekście.

### Definicja 2.15

Zbiór  $A \in \Sigma$  nazywamy zbiorem ciągłości miary probabilistycznej  $\mathbf{P}$ , jeżeli  $\mathbf{P}(\partial A) = 0$ .

**Twierdzenie 2.16** (Twierdzenie Portmanteau)

Niech  $\mathbf{P}, \mathbf{P}_n$  będą miarami probabilistycznymi na  $(S, \Sigma)$ . Wówczas następujące warunki są równoważne:

- (i)  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ ;
- (ii)  $\mathbf{P}_n(f) \rightarrow \mathbf{P}(f)$  dla każdej jednostajnie ciągłej  $f \in C_b(S)$ ;
- (iii)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[F] \leq \mathbf{P}[F]$  dla każdego domkniętego  $F \in \Sigma$ ;
- (iv)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[G] \geq \mathbf{P}[G]$  dla każdego otwartego  $G \in \Sigma$ .
- (v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[A] = \mathbf{P}[A]$  dla każdego  $A$  będącego zbiorem ciągłości  $\mathbf{P}$ .

*Dowód.* Implikacja (i)  $\Rightarrow$  (ii): wynika z definicji.

Implikacja (ii)  $\Rightarrow$  (iii) Dla ustalonego  $F$  i ustalonego  $\varepsilon > 0$  rozważmy funkcję  $f: S \rightarrow [0, 1]$  zadaną przez  $f(x) = (1 - \rho(x, F)/\varepsilon)_+$ . Przypomnijmy, że przez  $F^\varepsilon$  oznaczamy  $\varepsilon$  otoczenie zbioru  $F$  dane przez

$$F^\varepsilon = \{y \in S : \rho(y, F) < \varepsilon\}.$$

Przypomnijmy, że jeżeli  $x \in F$ , to  $f(x) = 1$  oraz jeżeli  $x \notin F^\varepsilon$ , to  $f(x) = 0$ . Stąd mamy nierówności

$$\mathbb{1}_F(x) \leq f(x) = (1 - \rho(x, F)/\varepsilon)_+ \leq \mathbb{1}_{F^\varepsilon}(x).$$

Całkując względem miary  $\mathbf{P}_n$  otrzymujemy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[F] \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[f] = \mathbf{P}[f] \leq \mathbf{P}[F^\varepsilon].$$

Przypomnijmy, że

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} F^\varepsilon = \text{cl}(F) = F.$$

Po przejściu granicznym  $\varepsilon \rightarrow 0$  z ciągłości miary  $\mathbf{P}$  otrzymujemy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[F] \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{P}[F^\varepsilon] = \mathbf{P}[F].$$

Równoważność (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) wynika z tego, że dopełnienie zbioru domkniętego (otwartego) jest zbiorem otwartym (domkniętym) oraz z

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[F^c] = 1 - \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[F].$$

Implikacja (iii)&(iv)  $\Rightarrow$  (v). Wybierzmy  $A \in \Sigma$  będący zbiorem ciągłości  $\mathbf{P}$ . Mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\text{cl}(A)] &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[\text{cl}(A)] \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[A] \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[A] \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[\text{int}(A)] \geq \mathbf{P}[\text{int}(A)] = \mathbf{P}[\text{cl}(A)]. \end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość wynika z  $0 = \mathbf{P}[\partial A] = \mathbf{P}[\text{cl}(A)] - \mathbf{P}[\text{int}(A)]$ .

Implikacja (v)  $\Rightarrow$  (i): Wybierzmy  $f \in C_b(S)$ . Z liniowości całki bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że  $0 < f < 1$ . Wówczas

$$\mathbf{P}(f) = \int_S f(x) \mathbf{P}(dx) = \int_S \int_0^1 \mathbb{1}_{\{f(x) > t\}} dt \mathbf{P}(dx) = \int_0^1 \mathbf{P}[x : f(x) > t] dt.$$

Zauważmy, że z ciągłości  $f$ ,

$$\text{cl}\{x : f(x) > t\} \subseteq \{x : f(x) \geq t\}$$

oraz, skoro przeciwobrazy przez  $f$  zbiorów otwartych są otwarte

$$\text{int}\{x : f(x) > t\} = \{x : f(x) > t\}.$$

Stąd

$$\partial\{x : f(x) > t\} \subseteq \{x : f(x) = t\}.$$

Zauważmy, że zbiory  $A_t = \{x : f(x) = t\}$  są parami rozłączne i wypełniają całe  $S$ . Wówczas  $\mathbf{P}[A_t] > 0$  tylko dla przeliczalnie wielu  $t \in \mathbb{R}$  (jest co najwyżej  $n \in \mathbb{N}$  zbiorów postaci  $A_t$  dla których  $\mathbf{P}[A_t] > 1/n$ ). Oznacza to, że  $\{x : f(x) > t\}$  jest zbiorem ciągłości miary  $\mathbf{P}$  dla prawie wszystkich  $t$  (wszystkich poza przeliczalną ilością). Stąd na mocy twierdzenia o zbieżności ograniczonej

$$\mathbf{P}(f) = \int_0^1 \mathbf{P}_n[x : f(x) > t] dt \rightarrow \int_0^1 \mathbf{P}[x : f(x) > t] dt = \mathbf{P}(t).$$

□

### Definicja 2.17

Niech  $\mathcal{A} \subset \Sigma$ . Dla miary probabilistycznej  $\mathbf{P}$  przez  $\mathcal{A}_{\mathbf{P}}$  oznaczać będziemy wszystkie elementy  $\mathcal{A}$  będące zbiorami ciągłości miary  $\mathbf{P}$ , czyli

$$\mathcal{A}_{\mathbf{P}} = \{A \in \mathcal{A} : \mathbf{P}[\partial A] = 0\}.$$

### Twierdzenie 2.18

Niech  $S$  będzie przestrzenią ośrodkową. Załóżmy, że dla  $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$  i miary probabilistycznej  $\mathbf{P}$  zachodzą dwa warunki

- (i)  $\mathcal{A}_{\mathbf{P}}$  jest  $\pi$ -układem;
- (ii) Dla każdego  $x \in S$  i  $\varepsilon > 0$  istnieje  $A \in \mathcal{A}_{\mathbf{P}}$  takie, że

$$x \in \text{int}(A) \subseteq A \subseteq B_{\varepsilon}(x).$$

Wówczas dla dowolnego ciągu miar probabilistycznych  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  warunk

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[A] = \mathbf{P}[A]$$

dla każdego  $A \in \mathcal{A}_{\mathbf{P}}$  pociąga  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ .

*Dowód. Krok 1:* Zbieżność na skończonych sumach z  $\mathcal{A}_{\mathbf{P}}$

Przypomnijmy, że dla  $A, B \subseteq S$ ,  $\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B$ . Stąd dla  $A_1, A_2, \dots, A_l \in \mathcal{A}_{\mathbf{P}}$  wszystkie ich skończone przekroje są w  $\mathcal{A}_{\mathbf{P}}$ . Korzystając zatem ze wzoru włączeń i wyłączeń otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n \left[ \bigcup_{k=1}^l A_k \right] &= \sum_{I \subseteq [l]} (-1)^{|I|+1} \mathbf{P}_n \left[ \bigcap_{j \in I} A_j \right] \\ &\rightarrow \sum_{I \subseteq [l]} (-1)^{|I|+1} \mathbf{P} \left[ \bigcap_{j \in I} A_j \right] = \mathbf{P} \left[ \bigcup_{k=1}^l A_k \right], \end{aligned}$$

gdzie  $[l] = \{1, 2, \dots, l\}$ .

**Krok 2:** Każdy zbiór otwarty jest przeliczalną sumą zbiorów z  $\mathcal{A}_{\mathbf{P}}$

Założenia pociągają, że dla każdego otwartego  $G$  i każdego  $x \in G$  istnieje zbiór  $A_x \in \mathcal{A}_{\mathbf{P}}$  taki, że

$$x \in \text{int}(A_x) \subseteq A_x \subseteq G.$$

Skoro  $S$  jest ośrodkowa, to istnieje ciąg  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq G$  taki, że  $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{int}(A_{x_k})$ .

**Krok 3:** Konkluzja

Niech teraz  $G$  będzie otwartym podzbiorem  $S$ . Wówczas  $G = \bigcup_{k \geq 1} A_k$  dla pewnych  $A \in \mathcal{A}_{\mathbf{P}}$ . Dla dowolnego  $\varepsilon > 0$ , z ciągłości miary, istnieje takie naturalne  $l$ , że

$$\mathbf{P}[G] \leq \mathbf{P} \left[ \bigcup_{k=1}^l A_k \right] + \varepsilon.$$

Wówczas

$$\mathbf{P}[G] - \varepsilon \leq \mathbf{P} \left[ \bigcup_{k=1}^l A_k \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n \left[ \bigcup_{k=1}^l A_k \right] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[G].$$

Skoro  $\varepsilon$  jest dowolny otrzymujemy

$$\mathbf{P}[G] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[G].$$

Czyli  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ .

□

**Definicja 2.19**

Niech  $\mathcal{A} \subset \Sigma$ . Powiemy, że  $\mathcal{A}$  jest klasą testującą słabą zbieżność, jeżeli dla każdego  $\mathbf{P}$  i każdego ciągu miar probabilistycznych  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  warunek

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[A] = \mathbf{P}[A]$$

pociąga  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ .

**Przykład 2.20**

Niech  $S = \mathbb{R}$  przypomnijmy, że  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$F_{\mathbf{P}_n}(t) = \mathbf{P}_n[(-\infty, t]] \rightarrow F_{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}[(-\infty, t]]$$

dla każdego  $t$  będącym punktem ciągłości dystrybuanty granicznej  $F_{\mathbf{P}}$ . Zauważmy, że  $t$  jest punktem ciągłości  $F_{\mathbf{P}}$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$0 = F_{\mathbf{P}}(t) - F_{\mathbf{P}}(t^-) = \mathbf{P}(-\infty, t] - \mathbf{P}(-\infty, t) = \mathbf{P}[\{t\}] = \mathbf{P}[\partial(-\infty, t]].$$

Oznacza to, że

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}$$

jest klasą testującą zbieżność.

Przypomnijmy, że klasa  $\mathcal{A}$  z powyższego przykładu jest też klasą rozróżniającą. Jest to ogólny fakt. Każda klasa testująca zbieżność jest klasą rozróżniającą.

**Przykład 2.21**

Niech  $S = \mathbb{R}^k$  dla pewnego  $k \in \mathbb{N}$ . Dla  $x \in \mathbb{R}^k$  rozważmy

$$Q_x = \{y \in \mathbb{R}^k : y_i \leq x_i, i \leq k\}.$$

Wówczas rodzina zbiorów  $\mathcal{A} = \{Q_x : x \in \mathbb{R}^k\}$  jest klasą testującą zbieżność. Zauważmy, że funkcja  $x \mapsto \mathbf{P}[Q_x]$  jest  $k$ -wymiarowym odpowiednikiem dystrybuanty. Niech  $\mathcal{B}$  będzie klasą wszystkich prostokątów postaci

$$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_k, b_k], \quad a_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}.$$

Niech dla  $i \leq k$ ,  $E_i$  będzie zbiorem tych  $t$  dla których  $\mathbf{P}[y \in \mathbb{R}^k : y_i = t] > 0$ . Wówczas  $E_i$  jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Stąd  $D = (\bigcup_{i=1}^k E_i)^c$  jest zbiorem gęstym. Z definicji  $\mathcal{B}_{\mathbf{P}}$  zawiera wszystkie prostokąty postaci

$$A = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_k, b_k], \quad a_1, \dots, b_k \in D.$$

Założmy, że  $\mathbf{P}_n[Q_x] \rightarrow \mathbf{P}[Q_x]$  dla wszystkich  $x$  takich, że  $\mathbf{P}[\partial Q_x] = 0$ . Niech  $A \in \mathcal{B}_{\mathbf{P}}$  będzie zbiorem postaci jak wyżej. Jeżeli  $x \in \mathbb{R}^k$  jest dowolnym

wierzchołkiem  $A$  ( $x_i \in \{a_i, b_i\}$ ), to na mocy  $\partial Q_x \subseteq \bigcup_i \{y : y_i = x_i\}$  zbiór  $Q_x$  jest zbiorem ciągłości  $\mathbf{P}$ . Ze wzoru włączeń i wyłączeń

$$\mathbf{P}_n[A] = \mathbf{P}_n[(Q_b \setminus Q_a) \cap \dots] = \dots \rightarrow \mathbf{P}[(Q_b \setminus Q_a) \cap \dots] = \mathbf{P}[A].$$

Z gęstości  $D$  spełniony jest warunek (ii) Twierdzenia 2.18. Oznacza to, że  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ .

### Przykład 2.22

Niech  $S = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Pokażemy, że

$$\mathcal{R}_f^{\mathbb{N}} = \{\pi_k^{-1}[H] : k \in \mathbb{N}, H \in \mathcal{Bor}(\mathbb{R}^k)\}$$

jest klasą testującą zbieżność. Dla  $\epsilon > 0$  wybieramy  $k \in \mathbb{N}$  takie, że  $2^{-k} \leq \epsilon/2$ . Dla  $\eta < \epsilon/2$  i  $x \in S$  rozważmy zbiory

$$A_{\eta,x} = \{y \in S : |x_i - y_i| < \eta, i \leq k\}.$$

Wówczas z doboru  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$x \in \text{int}(A_{\eta,x}) \subseteq A_{\eta,x} \subseteq B_{\epsilon}(x).$$

Zauważmy, że

$$\partial A_{\eta,x} = \bigcup_{i \leq k} \{y \in S : |y_i - x_i| = \eta, |x_j - y_j| \leq \eta\}$$

Niech teraz dane będą  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i  $\mathbf{P}$ . Skoro zbiory  $\partial A_{\eta,x}$  są rozłączne dla różnych  $\eta$  musi istnieć jedna  $\eta_0$  taka, że  $\mathbf{P}[\partial A_{\eta_0,x}] = 0$  (jest tylko przeliczalnie wiele  $\eta$ , gdzie  $\mathbf{P}[\partial A_{x,\eta}] > 0$ ). Spełnione są zatem warunki Twierdzenia 2.18, ponieważ

$$x \in \text{int}(A_{\eta_0,x}) \subseteq A_{\eta_0,x} \subseteq B_{\epsilon}(x).$$

### Przykład 2.23

$\mathcal{C}_f$  nie jest klasą testującą zbieżność w  $C[0,1]$ . Niech

$$z_n(t) = nt \mathbb{1}_{[0,1/n]}(t) + (2 - nt) \mathbb{1}_{[1/n,2/n]}(t).$$

Wówczas  $z_n$  nie jest zbieżne do 0 w  $C[0,1]$ . Stąd  $\mathbf{P}_n = \delta_{z_n}$  nie jest zbieżne słabo do  $\mathbf{P} = \delta_0$ . Jednak dla każdego zbioru  $A \in \mathcal{C}_f$ ,  $\mathbf{P}_n[A] = \mathbf{P}[A] = \mathbb{1}_{\{0 \in A\}}$ .

## 2.2 Miary ciasne\*

Jak już wspomnieliśmy jesteśmy w stanie aproksymować prawdopodobieństwa zdarzeń przez prawdopodobieństwa zbiorów domkniętych. W praktyce niekiedy wygodniej jest korzystać z aproksymacji przez zbiory zwarte. Zanim do tego przejdziemy przypomnijmy pojęcie zupełności przestrzeni metrycznej.

**Definicja 2.24**

Przestrzeń metryczna  $(S, \rho)$  nazywana jest zupełną, jeżeli dla każdego ciągu  $x_n \in S$  spełniającego warunek Cauchy'ego

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$$

istnieje  $x \in S$  taki, że  $x_n \rightarrow x$  w  $S$ .

**Przykład 2.25**

Przestrzenie  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^k$ ,  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $C[0, 1]$  są zupełne.

**Definicja 2.26**

Powiemy, że miara probabilistyczna  $\mathbf{P}$  na  $(X, \Sigma)$  jest *ciasna* jeżeli dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje zbiór zwarty  $K \subset X$  taki, że  $\mathbf{P}[K] \geq 1 - \varepsilon$ .

**Twierdzenie 2.27**

Jeżeli  $X$  jest ośrodkowa i zupełna, to każda miara probabilistyczna na  $(X, \Sigma)$  jest ciasna.

**Lemat 2.28**

Każdy całkowicie ograniczony podzbiór przestrzeni zupełnej ma zwarte domknięcie.

Przypomnijmy, że  $A \subseteq S$  nazywamy całkowicie ograniczonym, jeżeli dla każdego  $\varepsilon$ , istnieje skończone pokrycie kulami otwartymi o promieniu  $\varepsilon$ .

*Dowód.* Pokażemy, że dowolny ciąg elementów z  $\text{cl}(A)$  można wybrać podciąg zbieżny. Dla  $n \in \mathbb{N}$  niech  $\{B_{n,j}\}$  będzie skończonym pokryciem  $A$  kulami o promieniu  $1/n$ . Zauważmy, że wówczas (ze skończoności)  $\{B_{n,j}\}$  jest pokryciem  $\text{cl}(A)$ . Niech  $x_m$  będzie dowolnym ciągiem elementów  $\text{cl}(A)$ . Ponownie powołując się na skończoność pokryć pokazujemy, istnieje  $k_n$  taki, że  $B_{n+1, k_{n+1}} \subseteq B_{n, k_n}$  oraz  $B_{n, k_n}$  zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu  $\{x_m\}$ . Wybieramy teraz podciąg  $x_{m_n} \in B_{n, k_n}$  z konstrukcji jest to ciąg Cauchy'ego ( $\{x_{m_k}\}_{k \geq n} \subseteq B_{n, k_n}$ ), który jest zbieżny z założenia o zupełności.  $\square$

*Dowód Twierdzenia 2.27.* Skoro  $S$  jest ośrodkowa, to dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  istnieje przeliczalne pokrycie  $S$  kulami  $\{A_{k,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  o promieniu  $1/k$ . Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Dla każdego ustalonego  $k$  niech  $n_k \in \mathbb{N}$  będzie na tyle duże aby

$$\mathbf{P} \left[ \bigcup_{j \geq n_k} A_{k,j} \right] > 1 - \varepsilon 2^{-k}.$$

Zbiór

$$A = \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{j \leq n_k} A_{k,j}$$

jest całkowicie ograniczony. Z zupełności  $S$ , domknięcie  $\text{cl}(A) = K$  jest zbiorem zwartym. Z konstrukcji wynika, że

$$\mathbf{P}[S \setminus K] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P} \left[ S \setminus \bigcup_{j \leq n_k} A_{k,j} \right] \leq \varepsilon.$$

□

### Wniosek 2.29

Jeżeli  $S$  jest ośrodkowa i zupełna, to zwarte podzbiory  $S$  tworzą klasę rozróżniającą.

## 2.3 Odwzorowania ciągłe

### Definicja 2.30

Niech  $h: (S, \Sigma) \rightarrow (S', \Sigma')$  będzie odwzorowaniem mierzalnym. Dla miary probabilistycznej  $\mathbf{P}$  na  $(S, \Sigma)$  definiujemy miarę  $h^*\mathbf{P}$  na  $(S', \Sigma')$  poprzez

$$h^*\mathbf{P}[A] = \mathbf{P}[h^{-1}[A]].$$

Jeżeli  $h: (S, \Sigma) \rightarrow (S', \Sigma')$  jest ciągłe, to dla dowolnej funkcji  $f \in C_b(S')$ ,  $f \circ h \in C_b(S)$  oraz

$$h^*\mathbf{P}(f) = \int_{S'} f(x) h^*\mathbf{P}(dx) = \int_S f(h(x)) \mathbf{P}(dx) = \mathbf{P}(f \circ h).$$

Jeżeli  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$  to wówczas

$$h^*\mathbf{P}_n(f) = \mathbf{P}_n(f \circ h) \rightarrow \mathbf{P}(f \circ h) = h^*\mathbf{P}(f).$$

Innymi słowy  $h^*\mathbf{P}_n \Rightarrow h^*\mathbf{P}$ .

### Przykład 2.31

Projekcja  $\pi_k: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^k$  jest odwzorowaniem ciągłym. Jeżeli  $x^n \rightarrow x$  w  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  to  $x_i^n \rightarrow x_i$  dla każdego  $i \in \mathbb{N}$ . W szczególności więc  $x_i^n \rightarrow x_i$  dla każdego  $i \leq k$ , czyli

$$\pi_k(x^n) = (x_1^n, \dots, x_k^n) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_k) = \pi_k(x).$$

Oznacza to, że jeżeli  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ , to  $\pi_k^* \mathbf{P}_n \Rightarrow \pi_k^* \mathbf{P}$ . Okazuje się, że to wynika nie można odwrócić. Niech  $h \in \mathcal{Bor}(\mathbb{R}^k)$ . Z ciągłości  $\pi_k$ ,  $\partial\pi_k^{-1}[H] \subseteq \pi_k^{-1}[\partial H]$ . Okazuje się, że w przypadku rzutów ostatnie inkluzja jest równością. Niech  $x \in \pi_k^{-1}[\partial H]$ . Wtedy  $\pi_k(x) \in \partial H$ . Oznacza to, że są ciągi  $\{y^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H$  oraz  $\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H^c$  takie, że  $y^n \rightarrow \pi_k x$  oraz  $z^n \rightarrow \pi_k x$  w  $\mathbb{R}^k$ . Zauważmy teraz, że  $(y_1^n, y_2^n, \dots, y_k^n, x_{k+1}, \dots) \in \pi_k^{-1}[H]$  zbiega do  $x$  w  $\mathbb{R}^N$  oraz  $(z_1^n, z_2^n, \dots, z_k^n, x_{k+1}, \dots) \in (\pi_k^{-1}[H])^c$  zbiega do  $x$  w  $\mathbb{R}^N$ . Stąd  $x \in \partial\pi_k^{-1}[H]$ .

Założmy teraz, że  $\pi_k^* \mathbf{P}_n \Rightarrow \pi_k^* \mathbf{P}$  dla każdego  $k$ . Niech  $A = \pi_k^{-1}[H]$  będzie dowolnym elementem  $\mathcal{R}_f$ . Jeżeli  $A$  jest zbiorem ciągłości miary  $\mathbf{P}$ , to

$$\pi_k^* \mathbf{P}[\partial H] = \mathbf{P}[\pi_k^{-1} \partial H] = \mathbf{P}[\partial \pi_k^{-1} H] = \mathbf{P}[\partial A] = 0.$$

Oznacza to, że

$$\mathbf{P}_n[A] = \mathbf{P}_n[\pi_k^{-1} H] = \pi_k^* \mathbf{P}_n[H] \rightarrow \pi_k^* \mathbf{P}[H] = \mathbf{P}[\pi_k^{-1} H] = \mathbf{P}[A],$$

czyli  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ .

Niech teraz  $h: (S, \Sigma) \rightarrow (S', \Sigma')$  będzie mierzalne. Niech

$$D_h = \{x \in S : h \text{ nie jest ciągła w } x\}.$$

Z mierzalności  $h$ ,  $D_h \in \Sigma$ .

### Twierdzenie 2.32

Jeżeli  $\mathbb{P} \Rightarrow \mathbb{P}$  oraz  $\mathbb{P}[D_h] = 0$ , to  $h^* \mathbb{P}_n \Rightarrow h^* \mathbb{P}$ .

*Dowód.* Niech  $F$  będzie domknięty w  $S'$ . Jeżeli  $x \in \text{cl}(h^{-1}[F])$ , to istnieje ciąg  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  taki, że  $x_n \rightarrow x$  w  $S$  oraz  $h(x_n) \in F$ . Jeżeli  $x \notin D_h$ , to  $h$  jest ciągłe w  $x$ ,  $h(x) \in F$ . Stąd

$$D_h^c \cap \text{cl}(h^{-1}[F]) \subseteq h^{-1}[F].$$

Stąd

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[h^{-1}[F]] &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[\text{cl}(h^{-1}[F])] \\ &\leq \mathbf{P}[\text{cl}(h^{-1}[F])] = \mathbf{P}[D_h^c \cap \text{cl}(h^{-1}[F])] \leq \mathbf{P}[h^{-1}[F]]. \end{aligned}$$

□

### Przykład 2.33

$\mathcal{C}_f$  nie jest klasą testującą zbieżność na  $C[0, 1]$ .

**Definicja 2.34**

Powiemy, że rodzina miar  $\{\mathbf{P}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  jest warunkowo zwarta, jeżeli z każdego ciągu jej elementów można wybrać podciąg słabo zbieżny.

**Przykład 2.35**

Założmy, że dla miar probabilistycznych  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathbf{P}$  na  $C[0, 1]$ :

- Rodzina  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest warunkowo zwarta
- Dla każdego  $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ ,  $\pi_t^* \mathbf{P}_n \Rightarrow \pi_t^* \mathbf{P}$

Z dowolnego ciągu  $\{\mathbf{P}_{n_k}\}$  możemy wybrać podciąg  $\{\mathbf{P}_{n_{k_j}}\}$  słabo zbieżny do pewnej miary probabilistycznej  $\mathbf{Q}$ . Z ciągłości rzutu  $\pi_t^* \mathbf{P}_{n_{k_j}} \Rightarrow \pi_t^* \mathbf{Q}$ . Wobec założenia  $\pi_t^* \mathbf{Q} = \pi_t^* \mathbf{P}$  skoro  $C_f$  jest klasą rozróżniającą, to  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}$ . Oznacza to, że wówczas  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ .

**Definicja 2.36**

Powiemy, że rodzina miar  $\{\mathbf{P}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  jest ciasna, jeżeli dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje zwarty  $K \subseteq S$  taki, że

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{P}_\gamma[K] > 1 - \epsilon.$$

**Twierdzenie 2.37 (Prohorov)**

Niech  $(S, \rho)$  będzie ośrodkowa i zupełna. Wówczas rodzina miar  $\{\mathbf{P}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  jest warunkowo zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciasna.

## Elementy losowe

Podstawowym obiektem naszych badań, poza miarami probabilistycznymi na przestrzeniach metrycznych, będą *elementy losowe*. Przypomnijmy, że  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  jest rozważaną przez nas przestrzenią probabilistyczną.

**Definicja 2.38**

Elementem losowym w przestrzeni  $(S, \rho)$  nazywamy mierzalne odwzorowanie  $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (S, \Sigma)$ .

**Przykład 2.39**

Niech  $S = \mathbb{R}$ . Wówczas, wprost z definicji,  $X$  jest elementem losowym  $\mathbb{R}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $X$  jest zmienną losową.

**Przykład 2.40**

Niech  $S = \mathbb{R}^k$ . Wówczas  $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ , na mocy lematu o  $\pi - \lambda$  układach jest losowym elementem  $\mathbb{R}^k$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $X_j$  jest zmienną losową dla każdego  $j \leq k$ . Losowe elementy  $\mathbb{R}^k$  nazywamy wektorami losowymi.

**Przykład 2.41**

Niech  $S = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Wówczas  $X = (X_1, X_2, \dots)$ , na mocy lematu o  $\pi - \lambda$  układach jest losowym elementem  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $X_j$  jest zmienną losową dla każdego  $j \in \mathbb{N}$ . Losowe elementy  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  nazywamy ciągami losowymi.

**Przykład 2.42**

$S = C[0, 1]$  Wówczas  $X$  jest elementem losowym  $C[0, 1]$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $t \in [0, 1]$ ,  $X(t)$  jest zmienną losową.

**Definicja 2.43**

Powiemy, że elementy losowe  $X_n$  przestrzeni  $(S, \Sigma)$  są zbieżne według prawdopodobieństwa do elementu losowego  $X$ , jeżeli dla każdego  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbb{P}[\rho(X, X_n) > \varepsilon] \rightarrow 0.$$

**Definicja 2.44**

Rozkładem elementu losowego nazywamy miarę probabilistyczną na  $S$  zadaną przez  $\mathbf{P} = X^*\mathbb{P}$ , czyli

$$\mathbf{P}[A] = \mathbb{P}[X \in A] = \mathbb{P}[X^{-1}[A]].$$

Podobnie jak ma to miejsce dla zmiennych losowych Rozkład  $X^* \mathbb{P}$  elementu losowego  $X$  zawiera wszystkie kluczowe informacje o  $X$ . Przykładowo, dla dowolnej nieujemnej funkcji mierzalnej  $f: (S, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\Omega} f(X(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_S f(x) \mathbf{P}(dx).$$

**Definicja 2.45**

Powiemy, że ciąg elementów losowych  $\{X_n\}$  przestrzeni  $(S, \Sigma)$  zbiega według rozkładu do elementu losowego  $X$  przestrzeni  $(S, \Sigma)$ , jeżeli  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ , gdzie odpowiednio  $\mathbf{P}_n$  i  $\mathbf{P}$  to rozkłady  $X_n$  i  $X$ .

**Twierdzenie 2.46**

Założmy, że  $S$  jest ośrodkowa. Jeżeli  $\rho(X_n, Y_n) \rightarrow^{\mathbb{P}}$ , i  $X_n \Rightarrow X_\infty$ , to  $Y_n \rightarrow X_\infty$ .

*Dowód.* Niech  $F$  będzie zbiorem domkniętym. Niech  $F_\epsilon$  będzie domkniętym  $\epsilon$  otoczeniem  $F$  zadany przez

$$F_\epsilon = \{y : \rho(y, F) \leq \epsilon\}$$

Rozważmy

$$\mathbb{P}[Y_n \in F] \leq \mathbb{P}[\rho(X_n, Y_n) > \epsilon] + \mathbb{P}[X_n \in F_\epsilon]$$

Stąd

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Y_n \in F] \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n \in F_\epsilon] \leq \mathbb{P}[X_\infty \in F_\epsilon]$$

Przechodząc z  $\epsilon \rightarrow 0$  i korzystając tego, że  $F$  jest domknięty

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[Y_n \in F] \leq \mathbb{P}[X_\infty \in F]$$

□

**Twierdzenie 2.47**

Założmy, że  $S$  jest ośrodkowa. Założmy, że mamy macierz elementów losowych  $\{X_{k,n}\}$  i ciąg  $\{X_n\}$  takie, że  $X_{k,n} \Rightarrow_n Z_k \Rightarrow_k X$  oraz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\rho(X_{k,n}, X_n) \geq \epsilon] = 0$$

dla każdego  $\epsilon > 0$ . Wówczas  $X_n \Rightarrow X$ .

*Dowód.* Niech  $F$  i  $F_\epsilon$  będą jak wcześniej. Wówczas

$$\mathbb{P}[X_n \in F] \leq \mathbb{P}[\rho(X_{k,n}, X_n) > \epsilon] + \mathbb{P}[X_{k,n} \in F_\epsilon]$$

Stąd przy  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n \in F] \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\rho(X_{k,n}, X_n) > \epsilon] + \mathbb{P}[Z_k \in F_\epsilon]$$

Biorąc teraz  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n \in F] \leq \mathbb{P}[X \in F_\epsilon]$$

i wreszcie  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n \in F] \leq \mathbb{P}[X \in F]$$

□

## 2.4 Długie cykle

Niech  $\Pi_n$  będzie jednostajnie wybraną permutacją liczb  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Wówczas  $\Pi_n$  posiada jednoznaczny rozkład na cykle. Niech  $\{C_k^n\}_{k \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem opisującym długości cykli. Dokładniej, niech  $C_1^n$  będzie długością cyklu zawierającego 1. Dla  $k \geq 2$  niech  $C_k^n$  będzie długością cyklu zawierającego najmniejszy element  $[n]$  nie należący do pierwszych  $k-1$  cykli (jeżeli wyczerpaliśmy wszystkie elementy  $[n]$ , to kładziemy  $C_k^n = 0$ ). Wówczas  $C^n = \{C_k^n\}_{k \in \mathbb{N}}$  jest losowym elementem  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

Mamy

$$\mathbb{P}[C_1^n = j] = 1/n, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Zauważmy, że pod warunkiem  $C_1^n = j$  zmienna losowa  $C_2^n$  ma ten sam rozkład co  $C_1^{n-j}$  i stąd

$$\mathbb{P}[C_1^n = j, C_2^n = k] = \frac{1}{n(n-j)}, \quad 2 \leq j+k \leq n.$$

i ogólnie dla  $m \in \mathbb{N}$  i liczb  $j_1, \dots, j_m \geq 1$  takich, że  $\sum_{i=1}^m j_i \leq n$ ,

$$\mathbb{P}[C_1^n = j_1, \dots, C_m^n = j_m] = \frac{1}{n} \prod_{k=2}^{m-1} \frac{1}{1 - j_1 - j_2 \dots - j_{k-1}}.$$

Przypomnijmy, że słaba zbieżność w  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  jest równoważna zbieżności rozkładów skończenie wymiarowych. Zauważmy też, że zmienna  $C_1^n$  ma rozkład jednostajny na  $[n]$  stąd

$$L_1^n = C_1^n/n \Rightarrow B_1$$

słabo w  $\mathbb{R}$ , gdzie  $B_1$  ma rozkład jednostajny na  $[0, 1]$ . Rzeczywiście, dla ciągłej i ograniczonej  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{E}[f(L_1^n)] = \sum_{k=1}^n f(k/n)/n \rightarrow \int_0^1 f(x)dx.$$

Skoro pod warunkiem  $C_1^n$  zmienna  $C_2^n$  ma rozkład jednostajny na  $\{1, \dots, n - C_1^n\}$ , to pod warunkiem  $C_1^n$ ,

$$\frac{C_2^n}{n - C_1^n} \Rightarrow B_2,$$

gdzie  $B_2$  jest niezależną kopią  $B_1$ . Uściślając niech  $L_2^n = C_2^n/n$ . Dla ciągłej i ograniczonej  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ f \left( L_1^n, \frac{L_2^n}{1 - L_1^n} \right) \right] &= \frac{1}{n^2} \sum_{i+j \leq n} \frac{1}{1 - i/n} f \left( i/n, \frac{j/n}{1 - i/n} \right) \\ &\rightarrow \int_{x_1+x_2 \leq 1} \frac{1}{1 - x_1} f \left( x_1, \frac{x_2}{1 - x_1} \right) dx_1 dx_2 = \int f(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

To pokazuje, że

$$(L_1^n, L_2^n / (1 - L_1^n)) \Rightarrow (B_1, B_2)$$

słabo w  $\mathbb{R}^2$ . Z twierdzenia o odwzorowaniu ciągłym

$$(L_1^n, L_2^n) \Rightarrow (B_1, (1 - B_1)B_2)$$

słabo w  $\mathbb{R}^2$ . W podobny sposób pokazujemy, że dla  $L_3^n = C_3^n/n$  mamy

$$(L_1^n, L_2^n / (1 - L_1^n), L_3^n / (1 - L_1^n - L_2^n)) \Rightarrow (B_1, B_2, B_3)$$

słabo w  $\mathbb{R}^3$ , gdzie  $B_3$  jest kolejną niezależną kopią  $B_1$ . To z kolei daje

$$(L_1^n, L_2^n, L_3^n) \Rightarrow (B_1, (1 - B_1)B_2, (1 - B_1)(1 - B_2)B_3)$$

słabo w  $\mathbb{R}^2$ . Powyższy argument uogólnia się dla  $L_k^n = C_k^n/n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Skoro zbieżność w  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  jest równoważna zbieżności rozkładów skończenie wymiarowych otrzymujemy twierdzenie graniczne w  $\mathbb{R}^n$  dla  $C^n$ . Niech  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych o rozkładzie jednostajnym na  $[0, 1]$ . Definiujemy  $G_1 = B_1$  oraz dla  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$  definiujemy

$$G_k = B_k \prod_{j=1}^{k-1} (1 - B_j).$$

Niech  $G = (G_1, G_2, \dots)$  będzie losowym elementem  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Wówczas

$$L^n \Rightarrow G$$

słabo w  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Pokażemy teraz jak z powyższej zbieżności wywnioskować twierdzenie o zbieżności najdłuższego cyklu z losowej permutacji. Niech

$$M_n = \max_{k \in \mathbb{N}} C_k^n$$

będzie badaną przez nas długością najdłuższego cyklu. W naturalny sposób nasuwa się zastosowanie odwzorowania

$$m: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad m(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} x_k$$

i zastosowaniu twierdzenia o funkcji ciągłej. Jednakże tak zdefiniowane odwzorowanie nie jest ciągłe w punktach dla których  $m(x) < \infty$ . Aby obejść tę trudność rozważmy podzbiór  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  dany przez

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_k \in [0, 1], k \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^{\infty} x_j = 1 \right\}.$$

Elementy  $\Delta$  możemy interpretować jako długości odcinków w partycji  $[0, 1]$ . Na  $\Delta$  rozważamy topologię odziedziczoną z  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  (czyli z tą samą metryką). Zbiory otwarte w  $\Delta$  są postaci  $U \cap \Delta$ , gdzie  $U$  jest otwarty w  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Podobnie  $\Sigma_{\Delta}$  jest postaci

$$\Sigma_{\Delta} = \{A \cap \Delta : A \in \Sigma\}.$$

Zauważmy, że  $L^n, G \in \Delta$  p.w. Istotnie dla  $L^n$  jest to jasne, bo suma długości wszystkich cykli w permutacji na  $n$  elementach wynosi właśnie  $n$ . Dla dowolnego  $k$  mamy

$$1 - \sum_{j=1}^k G_j = \prod_{j=1}^k (1 - B_j) \rightarrow 0$$

przy  $k \rightarrow \infty$  na mocy mocnego prawa wielkich liczb. Skoro  $L^n, G \in \Delta$  p.w, to

$$\mathbb{P}[L^n \in U \cap \Delta] = \mathbb{P}[L^n \in U], \quad \mathbb{P}[G \in U \cap \Delta] = \mathbb{P}[G \in U].$$

Oznacza to, że  $L^n \Rightarrow G$  słabo w  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  jest równoważne temu, że  $L^n \Rightarrow G$  słabo w  $\Delta$ .

### Uwaga 2.48

Powyższe rozumowanie zachodzi dla dowolnej przestrzeni metrycznej  $S$  i podprzestrzeni  $S_0 \subseteq S$ . Jeżeli  $X, X_n \Omega \rightarrow S$  są elementami losowymi w  $S$  takimi, że

$$\mathbb{P}[X_n \in S_0] = \mathbb{P}[X \in S_0] = 1,$$

to  $X_n \Rightarrow X$  słabo w  $S$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $X_n \Rightarrow X$  słabo w  $S_0$ .

Zauważmy, że dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,

$$m(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} x_k \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} y_k + |y_k - x_k| \leq m(y) + \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|.$$

Co przez symetrię daje

$$|m(x) - m(y)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|. \quad (2.1)$$

Korzyść z rozważania  $L^n$  i  $G$  jako elementów  $\Delta$  bierze się z tego, że odwzorowanie  $m|_{\Delta}$  jest ciągle. Rzeczywiście, niech  $x^n, x \in \Delta$  będą takie, że  $x^n \rightarrow x$  w  $(\Delta, \rho)$ . Wówczas z lematu Scheffego,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^n - x_j| \rightarrow 0.$$

Z nierówności (2.1) wynika wówczas, że  $m(x^n) \rightarrow m(x)$ . Z twierdzenia o odwzorowaniu ciągłym

$$M_n/n \Rightarrow m(G) = \max_{k \in \mathbb{N}} B_k \prod_{j=1}^{k-1} (1 - B_j) = M$$

słabo w  $\mathbb{R}$ . Rozkład graniczny można scharakteryzować równaniem

$$M \stackrel{d}{=} B_1 \vee (1 - B_1) \max_{k \geq 2} B_k \prod_{j=2}^{k-1} (1 - B_j) \stackrel{d}{=} B_1 \vee (1 - B_1) M',$$

gdzie  $M'$  jest zmienną niezależną od  $B_1$  o tym samym rozkładzie co  $M$ . Z powyższego można wyznaczyć dokładny wzór na gęstość rozkładu  $M$ . Dajemy sobie jednak przyjemność jej wyznaczania. Zmienna  $M$  ma rozkład o gęstości

$$f(x) = e^{\gamma} p(1/x),$$

gdzie  $p$  jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$xp'(x) + p(x-1) = 0.$$

## 2.5 Losowe partycje

Partycją zbioru  $E$  nazywamy dowolną kolekcję rozłącznych podzbiorów  $E$ , których suma jest równa  $E$ .

### Definicja 2.49

Partycją nazywamy ciąg

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots)$$

taki, że

$$s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots, \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=1}^{\infty} s_k \leq 1.$$

Przestrzeń wszystkich partycji będziemy oznaczać przez  $\mathcal{P}_m$ .

**Fakt 2.50**

$\mathcal{P}_m$  jest zwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**Definicja 2.51**

$\vartheta$  i  $\mathcal{P}_I$ .

$$\chi_{\vartheta}(x) = \max\{|x - y| : y \notin \vartheta\}.$$

$$\rho_I(\vartheta, \vartheta') = \|\chi_{\vartheta} - \chi_{\vartheta'}\|_{\infty} = \max\{|\chi_{\vartheta}(x) - \chi_{\vartheta'}(x)| : x \in [0, 1]\}.$$

**Twierdzenie 2.52**

Przestrzeń  $(\mathcal{P}_I, \rho_I)$  jest zwarta. Funkcja  $\vartheta \mapsto |\vartheta|^{\downarrow}$  jest ciągłym odwzorowaniem między  $\mathcal{P}_m$  a  $\mathcal{P}_I$ .

## Funkcje ciągłe

**Streszczenie** Miara Wienera, Twierdzenie Donskera i drzewa losowe

Przez  $\mathcal{C}$  oznaczać będziemy  $\sigma$ -ciało zbiorów borelowskich  $C[0, 1]$ . Przypomnijmy, że dla  $k \in \mathbb{N}$  i  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$  definiujemy rzut  $\pi_{\mathbf{t}}: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$  przez

$$\pi_{\mathbf{t}}(f) = (f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_k)).$$

Przypomnijmy, że wówczas  $\pi_{\mathbf{t}}$  jest funkcją ciągłą dla każdego  $\mathbf{t}$ .

### Definicja 3.1

Niech  $\mathbf{P}$ ,  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  będą miarami probabilistycznymi na  $(C[0, 1], \mathcal{C})$ . Powiemy, że  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  zbiegają do  $\mathbf{P}$  w sensie zbieżności rozkładów skończenie wymiarowych, jeżeli dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  i każdego  $\mathbf{t} \in [0, 1]^k$ ,

$$\pi_{\mathbf{t}}^* \mathbf{P}_n \Rightarrow \pi_{\mathbf{t}}^* \mathbf{P}$$

słabo w  $\mathbb{R}^k$ .

### Twierdzenie 3.2

Jeżeli  $\{\mathbf{P}_n\}_n$  jest warunkowo zwarta i rozkłady skończenie wymiarowe  $\mathbf{P}_n$  zbiegają do rozkładów skończenie wymiarowych  $\mathbf{P}$ , to  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ .

Z twierdzenia Prohorova wiemy, że rodziny warunkowo zwarte, to dokładnie te, które koncentrują się na zbiorach zwartych (rodziny ciasne). Aby móc je scharakteryzować w pierwszym kroku przypomnijmy jak wyglądają zwarte podzbiory  $C[0, 1]$ .

### 3.1 Zbiory zwarte w $C[0, 1]$

Twierdzenie Arzeli-Ascoliego, które za chwilę przytoczymy traktuje o funkcjach jednakowo ciągłych. Jednym ze sposobów wyrażenia tej własności jest odwołanie się do modułu ciągłości funkcji. Dla  $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  i  $\delta > 0$  definiujemy

$$\omega_x(\delta) = \omega(x, \delta) = \sup\{|x(t) - x(s)| : |s - t| \leq \delta, s, t \in [0, 1]\}.$$

Zauważmy, że  $x$  jest jednostajnie ciągła na  $[0, 1]$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\omega_x(\delta) \rightarrow 0$  przy  $\delta \rightarrow 0^+$ . Zauważmy też, że dla  $x, y \in C[0, 1]$ ,

$$|\omega_x(\delta) - \omega_y(\delta)| \leq 2\|x - y\|_\infty.$$

Stąd  $x \mapsto \omega_x(\delta)$  jest funkcją ciągłą na  $C[0, 1]$  dla każdej  $\delta > 0$ .

#### Twierdzenie 3.3 (Arzeli-Ascoliego)

Zbiór  $A \subset C[0, 1]$  jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_{f \in A} |f(0)| < \infty \quad \text{oraz} \quad \limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{f \in A} \omega_f(\delta) = 0.$$

*Dowód.* Załóżmy najpierw, że  $\text{cl}(A)$  jest zwartym podzbiorem  $C[0, 1]$ . Wówczas  $\sup_{f \in A} |f(0)| < \infty$  ponieważ odwzorowanie  $f \mapsto f(0)$  jest ciągłe. Aby sprawdzić drugi warunek przypomnijmy, że dla każdego  $f \in A$ ,  $\omega_f(\delta) \rightarrow 0$ . Ustalmy  $\epsilon$ . Dla każdego  $f$  istnieje  $\delta = \delta(f, \epsilon)$  taka, że  $\omega_f(\delta) < \epsilon$ . Z ciągłości  $\omega(\delta)$  wynika, że jeżeli  $\omega_f(\delta) < \epsilon$ , to istnieje  $\epsilon_1 = \epsilon_1(\delta, f, \epsilon)$  taki, że  $\omega_g(\delta) < 2\epsilon$  o ile  $\|f - g\|_\infty \leq \epsilon_1$ . Zauważmy, że  $B_f(\epsilon_1(f))$  dla  $f \in \text{cl}(A)$  stanowi otwarte pokrycie  $\text{cl}(A)$ . Istnieje zatem skończony podzbiór  $A_0 \subseteq A$  taki, że  $\text{cl}(A) \subseteq \bigcup_{f \in A_0} B_{\epsilon_1}(f)$ . Niech  $\delta_0 = \min_{f \in A_0} \delta(f)$ . Z konstrukcji wynika, że  $\sup_{f \in A} \omega_f(\delta) < 2\epsilon$ .

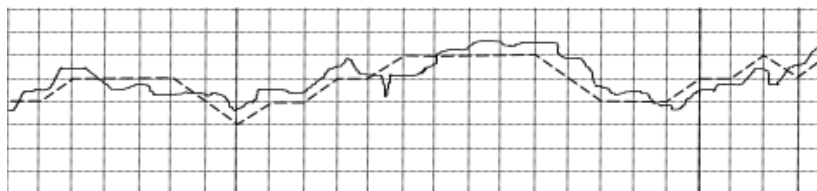
Założmy teraz, że  $A$  spełnia podane w twierdzeniu warunki. Pokażemy, że  $A$  jest całkowicie ograniczony. Skoro przestrzeń  $C[0, 1]$  jest zupełna, to pokaże, że  $\text{cl}(A)$  jest zwarty. Ustalmy Wybierzmy tak duże  $k \in \mathbb{N}$  aby

$$\sup_{f \in A} \omega_f(1/k) < \infty.$$

Wówczas z nierówności

$$|f(t)| \leq |f(0)| + \sum_{j=1}^k |f(jt/k) - f((j+1)t/k)| \leq |f(0)| + k\omega_f(1/k).$$

dla  $t \in [0, 1]$  wynika, że



Rysunek 3.1. Konstrukcja  $2\epsilon$ -sieci w dowodzie twierdzenia Arzeli-Ascoliego

$$\alpha = \sup_{t \in [0,1]} \sup_{f \in A} |f(t)| < \infty.$$

Ustalmy  $\epsilon > 0$ . Niech  $H$  będzie skończoną  $\epsilon$ -siecią odcinka  $[-\alpha, \alpha]$  w  $\mathbb{R}$  (dowolnym skończonym podzbiorem  $[-\alpha, \alpha]$  takim, że  $\rho(x, H) < \epsilon$  dla każdego  $x \in [-\alpha, \alpha]$ ). Niech  $k$  będzie teraz tak duże by

$$\sup_{f \in A} \omega_f(1/k) < \epsilon.$$

Rozważmy teraz  $B \subseteq C[0,1]$  składający się z funkcji  $f$ , które są kawałkami linowe na przedziałach  $[(i-1)/k, i/k]$ ,  $i \leq k$  takich, że  $f(i/k) \in H$ . Jeżeli  $x \in A$ , to  $|x(i/k)| \leq \alpha$ . Z wyboru zbioru  $H$  istnieje funkcja  $f_x \in B$  taka, że

$$|x(i/k) - f_x(i/k)| \leq \epsilon.$$

Dla dowolnego  $t \in [0,1]$ , mamy  $t \in [(i-1)/k, i/k]$  dla pewnego  $i$ . Wówczas

$$|x(t) - f_x(i/k)| \leq |x(t) - x(i/k)| + |x(i/k) - f_x(i/k)| \leq 2\epsilon.$$

Pierwszy składnik jest mniejszy niż  $\epsilon$  z wyboru  $k$  i tego, że  $x \in A$ . Zupełnie analogicznie

$$\begin{aligned} |x(t) - f_x((i-1)/k)| &\leq |x(t) - x((i-1)/k)| \\ &\quad + |x((i-1)/k) - f_x((i-1)/k)| \leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Skoro  $f_x(t)$  jest kombinacją wypukłą  $f_x((i-1)/k)$  i  $f_x(i/k)$ , to  $f_x(t) = af_x((i-1)/k) + (1-a)f_x(i/k)$  dla pewnego  $a = a(t) \in [0,1]$  i stąd

$$|x(t) - f_x(t)| \leq a|x(t) - f_x((i-1)/k)| + (1-a)|x(t) - f_x(i/k)| \leq \epsilon.$$

To pokazuje, że  $B$  jest skończoną  $2\epsilon$  siecią  $A$ . □

#### Twierdzenie 3.4

Ciąg  $\{\mathbf{P}_n\}_n$  miar probabilistycznych na  $C[0,1]$  jest ciasny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki

(i) Mamy

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[|x(0)| \geq a] = 0.$$

(ii) Dla każdego  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n[\omega_x(\delta) > \epsilon] = 0.$$

Zauważmy, że warunki sformułowane w powyższym twierdzeniu można sformułować następująco:

(i)' Dla każdego  $\eta > 0$  istnieje  $a > 0$  takie, że dla dostatecznie dużych  $n$ ,

$$\mathbf{P}_n[x : |x(0)| \geq a] < \eta.$$

(ii) Dla każdego  $\epsilon > 0$  i  $\eta$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że dla dostatecznie dużych  $n$ ,

$$\mathbf{P}_n[x : \omega_x(\delta) > \epsilon] < \eta.$$

*Dowód.* Załóżmy, że rodzina  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciasna. Dla ustalonej  $\eta > 0$  wybieramy zbiór zwarty  $K \subseteq C[0, 1]$  taki, że

$$\inf_n \mathbf{P}_n[K] > 1 - \eta.$$

Z Twierdzenia Arzeli-Ascoliego

$$\sup_{f \in K} |f(0)| < \infty \quad \text{oraz} \quad \limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{f \in K} \omega_f(\delta) = 0.$$

Oznacza to, że dla dowolnego  $\epsilon > 0$  istnieją  $a > 0$  i  $\delta > 0$  takie, że

$$K \subseteq \{f : |f(0)| \leq a\} \cap \{f : \omega_f(\delta) \leq \epsilon\}.$$

Wobec wyboru  $K$ ,

$$\mathbf{P}_n[x : |x(0)| \geq a] < \eta.$$

oraz

$$\mathbf{P}_n[x : \omega_x(\delta) > \epsilon] < \eta.$$

### Uwaga 3.5

Zauważmy, że skoro  $C[0, 1]$  jest ośrodkowa i zupełna, to każda miara  $\mathbf{P}$  na  $C[0, 1]$  jest regularna (rodzina jednoelementowa  $\{\mathbf{P}\}$  jest ciasna). Oznacza to, że dla dowolnej  $\eta > 0$  i  $\epsilon > 0$  istnieją  $a$  i  $\delta$  takie, że

$$\mathbf{P}[x : |x(0)| \geq a] < \eta.$$

oraz

$$\mathbf{P}[x : \omega_x(\delta) > \epsilon] < \eta.$$

Oznacza to, że jeżeli warunki (i)' oraz (ii)' są spełnione dla dostatecznie dużych  $n$ , to przez potencjalne zwiększanie  $a$  i zmniejszenie  $\delta$  możemy, bez zmniejszania ogólności zakładać, że warunki (i)' oraz (ii)' są spełnione dla wszystkich  $n$ .

Założmy, że  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  spełnia warunki podane w twierdzeniu. Z powyższej uwagi możemy założyć, że  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  spełnia (i)' oraz (ii)' dla wszystkich  $n$ . Dla ustalonej  $\eta$  wybieramy  $a > 0$  takie, że

$$\mathbf{P}_n[x : |x(0)| \leq a] \geq 1 - \eta$$

dla wszystkich  $n$ . Niech  $B = \{x : |x(0)| \leq a\} \subseteq C[0, 1]$ . Dla  $k \in \mathbb{N}$  niech  $\delta_k$  będzie taka mała, że

$$\mathbf{P}_n[x : \omega_x(\delta_k) < 1/k] \geq 1 - \eta 2^{-k}$$

Niech  $B_k = \{x : \omega_x(\delta_k) < 1/k\}$  Dla wszystkich  $n$ . Jeżeli  $K$  jest domknięciem zbioru  $A = B \cap \bigcap_k B_k$ , to  $\mathbf{P}_n[K] > 1 - \eta$  dla każdego  $n$ . Z twierdzenia Arzeli-Ascoliego zbiór  $K$  jest zwarty. To pokazuje, że rodzina  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciasna.  $\square$

## 3.2 Funkcje losowe

Niech  $X_n, X$  będą losowymi elementami  $C[0, 1]$ . Przez  $\mathbf{P}_n$  i  $\mathbf{P}$  oznaczmy odpowiednio rozkład  $X_n$  i  $X$ . Będziemy mówić, że  $X_n$  zbiega do  $X$  w sensie zbieżności rozkładów skończenie wymiarowych, jeżeli ma to miejsca dla  $\mathbf{P}_n$  i  $\mathbf{P}$ . Dla dowolnych  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in [0, 1]^k$  i  $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^k)$ ,

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbf{t}}^* \mathbf{P}[A] &= \mathbf{P}[\pi_{\mathbf{t}}^{-1}[A]] = \mathbb{P}[X \in \pi_{\mathbf{t}}^{-1}[A]] \\ &= \mathbb{P}[\pi_{\mathbf{t}}(X) \in A] = \mathbb{P}[(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)) \in A]. \end{aligned}$$

Podobnie

$$\pi_{\mathbf{t}}^* \mathbf{P}_n[A] = \mathbb{P}[(X_n(t_1), X_n(t_2), \dots, X_n(t_k)) \in A]$$

Oznacza to, że  $X_n$  zbiega do  $X$  w sensie zbieżności rozkładów skończenie wymiarowych wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  i każdych  $t_j \in [0, 1]$ , przy  $n \rightarrow \infty$ ,

$$(X^n(t_1), X^n(t_2), \dots, X^n(t_k)) \Rightarrow (X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k))$$

w  $\mathbb{R}^k$ .

### Twierdzenie 3.6

Niech  $X_n, X$  będą losowymi funkcjami ciągłymi na  $[0, 1]$ . Jeżeli założymy, że  $X_n$  zbiegają do  $X$  w sensie zbieżności rozkładów skończenie wymiarowych oraz że dla każdego  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\omega_{X^n}(\delta) > \epsilon] = 0,$$

to  $X^n \Rightarrow X$  w  $C[0,1]$ .

*Dowód.* Niech  $\mathbf{P}_n$  i  $\mathbf{P}$  będą rozkładami  $X^n$  oraz  $X$ . Pierwsze założenie mówi, że  $\pi_{\mathbf{t}}^* \mathbf{P}_n \Rightarrow \pi_{\mathbf{t}}^* \mathbf{P}$ , gdzie  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  i  $t_j \in [0,1]$ . Przypomnijmy, że  $\pi_{\mathbf{t}}$  jest rzutem na osie  $\mathbf{t}$  zadany przez  $\pi_{\mathbf{t}}(f) = (f(t_1), \dots, f(t_k))$ . Zauważmy, że skoro  $\pi_0^* \mathbf{P}_n \Rightarrow \pi_0^* \mathbf{P}$ , to rodzina  $\{\pi_0^* \mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciasna. Oznacza to, że dla dowolnego  $\epsilon > 0$  istnieje  $a$  takie, że dla wszystkich  $n$ ,

$$\mathbb{P}[X_n(0) \geq a] = \mathbb{P}[\pi_0(X^n) \geq a] = \mathbf{P}_n[f : \pi_0(f) \geq a] = \pi_0^* \mathbf{P}_n[[-a, a]^c] \leq \epsilon.$$

Oznacza to, że rodzina miar  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  spełnia założenia **Twierdzenia 3.4**. Z warunkowej zwartości  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i zbieżności rozkładów skończenie wymiarowych wynika, że  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$ , czyli  $X^n \Rightarrow X$  w  $C[0,1]$ .  $\square$

### 3.3 Miara Wienera i twierdzenie Camerona-Martina

Niech  $B = (B_t)_{t \in [0,1]}$  będzie ruchem Browna na  $[0,1]$ .

#### Definicja 3.7

Miarą Wienera nazywamy miarę probabilistyczną  $\mathbb{W}$  na  $C[0,1]$  będącą rozkładem ruchu Browna. Dokładniej,

$$\mathbb{W}[C] = \mathbb{P}[B \in C], \quad C \in \mathcal{C}.$$

O funkcji  $f \in C[0,1]$  wylosowanej zgodnie z miarą Wienera  $\mathbb{W}$  można myśleć jak o trajektorii ruchu Browna. Przykładowo, dla każdego  $t \in [0,1]$   $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{W}[\{f \in C[0,1] : f(t) \leq x\}] = \mathbb{P}[B_t \leq x] = \Phi(x/\sqrt{t}),$$

gdzie  $\Phi$  jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy.$$

Podobnie, wykorzystując opis rozkładów skończenie wymiarowych ruchu Browna, możemy opisać miary zbiorów postaci

$$A = \{f \in C[0,1] : f(t_k) \in A_k, k \leq n\}$$

dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{Bor}(\mathbb{R})$  i  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq 1$ . Mamy

$$\mathbb{W}[A] = \mathbb{W}[f : f(t_k) \in A_k, k \leq n] = \mathbb{P}[B_{t_k} \in A_k, k \leq n] = \mathbb{1}_{A_0}(0) \int_{A_1 \times \dots \times A_n} \exp \left\{ - \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})} \right\} \frac{dx_1 \dots dx_n}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}}$$

Zbiory  $A$  tworzą klasę rozróżniającą. Oznacza to, że  $\mathbb{W}$  jest jednoznacznie wyznaczona przez rozkłady skończenie wymiarowe ruchu Browna. Innymi słowy własności (B1)-(B4) definicji ruchu Browna jednoznacznie charakteryzują  $\mathbb{W}$ . Jeżeli więc  $B' = (B'_t)_{t \in [0,1]}$  jest innym ruchem Browna (spełnia własności (B1)-(B4) definicji), to dla dowolnego  $C \in \mathcal{C}$ ,

$$\mathbb{P}[B \in C] = \mathbb{W}[C] = \mathbb{P}[B' \in C].$$

Innymi słowy  $B'$  ma ten sam rozkład na  $C[0,1]$  co  $B$ .

### Uwaga 3.8

Jedno z klasycznych zadań o ruchu Browna jest sprawdzenie, jeżeli  $B = (B_t)_{t \in [0,1]}$  jest ruchem Browna, to proces stochastyczny  $B' = (B'_t)_{t \in [0,1]}$  dany przez  $B'_t = \sqrt{2}B_{t/2}$  jest ruchem Browna. Rozwiązując to zadanie (poprzez skrupulatne sprawdzenie własności (B1)-(B4) definicji ruchu Browna) w istocie sprawdza się, że  $B$  i  $B'$  mają ten sam rozkład na przestrzeni  $C[0,1]$ .

Zauważmy wreszcie, że przy pomocy samej miary  $\mathbb{W}$  jesteśmy w stanie podać przestrzeń probabilistyczną, na której określony jest ruch Browna. Rozważmy

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (C[0,1], \mathcal{C}, \mathbb{W}).$$

Wówczas proces stochastyczny

$$B_t(\omega) = \omega(t), \quad \omega \in \Omega = C[0,1]$$

jest ruchem Browna.

### Przykład 3.9

Dla  $t \in (0,1)$ , funkcja  $\pi_t(f)^2 = f(t)^2$  jest ciągła  $C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Mamy

$$\int_{C[0,1]} \pi_t(f)^2 \mathbb{W}(df) = \int_{C[0,1]} f(t)^2 \mathbb{W}(df) = \mathbb{E}[B_t^2] = t.$$

Dla  $F \in C[0,1]$  rozważmy przesunięcie  $\tau_F: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$  dane wzorem  $\tau_F(g) = g + F$ , czyli

$$\tau_F(g)(t) = g(t) + F(t), \quad t \in [0,1].$$

Takie odwzorowanie jest ciągłe. Naszym kolejnym celem jest zrozumienie miary probabilistycznej na  $(C[0,1], \mathcal{C})$  danej przez

$$\mathbb{W}_F = \tau_F^* \mathbb{W}.$$

Wówczas  $\mathbb{W}_F$  jest rozkładem procesu stochastycznego  $B_t + F(t)$ .

**Przykład 3.10**

Niech

$$C_0[0,1] = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}.$$

Wówczas  $\mathbb{W}[C_0[0,1]] = 1$ . Pokażemy nawet, że  $C_0[0,1]$  jest nośnikiem miary  $\mathbb{W}$ . Czyli dla każdej  $f \in C_0[0,1]$  i każdej  $\delta > 0$ ,

$$\mathbb{W}[B_\delta(f)] = \mathbb{P}[B \in B_\delta(f)] > 0.$$

Jeżeli  $F \in C[0,1]$  jest taka, że  $F(0) \neq 0$  ( $F \notin C_0[0,1]$ ), to  $B(0) + F(0) \neq 0$  p.w. i stąd  $\mathbb{W}_F[C_0[0,1]] = 0$ .

**Przykład 3.11**

Przypomnijmy, że z prawa iterowanego logarytmu

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(1/t)}} = 1 \quad p.w.$$

Jeżeli rozważymy więc

$$A = \left\{ f \in C[0,1] : \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{\sqrt{2t \log \log(1/t)}} = 1 \right\},$$

to  $\mathbb{W}[A] = 1$ . Rozważmy  $F(t) = t^{1/3}$ . Skoro

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t + F(t)}{\sqrt{2t \log \log(1/t)}} = \infty \quad p.w.$$

to  $\mathbb{W}_F[A] = 0$ . Oznacza to, że miary  $\mathbb{W}$  i  $\mathbb{W}_F$  są singularne (skupione na rozłącznych podzbiorach  $C[0,1]$ ).

Aby wyjaśnić dokładniej co się dzieje rozważmy  $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n)$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Wektor losowy

$$B(\mathbf{t}) = (B(t_0), B(t_1), \dots, B(t_n))$$

ma rozkład  $\mu_{B(\mathbf{t})}$  o gęstości

$$f_{B(\mathbf{t})}(x) = \frac{\exp \left\{ - \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})} \right\}}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}}.$$

Podobnie, dla  $F \in C[0,1]$ ,  $F(0) = 0$ , wektor losowy

$$B(\mathbf{t}) + F(\mathbf{t}) = (B(t_0) + F(t_0), B(t_1) + F(t_1), \dots, B(t_n) + F(t_n))$$

ma rozkład  $\mu_{B(\mathbf{t})+F(\mathbf{t})}$  o gęstości

$$f_{B(\mathbf{t})+F(\mathbf{t})}(x) = \frac{\exp \left\{ -\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})} \right\}}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}}.$$

Oznacza to, że dla dowolnego borelowskiego  $F \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} \mu_{B(\mathbf{t})+F(\mathbf{t})}(D) &= \int_D f_{B(\mathbf{t})+F(\mathbf{t})}(x) dx = \\ &= \int_D \frac{f_{B(\mathbf{t})+F(\mathbf{t})}(x)}{f_{B(\mathbf{t})}(x)} f_{B(\mathbf{t})}(x) dx = \int_D \frac{f_{B(\mathbf{t})+F(\mathbf{t})}(x)}{f_{B(\mathbf{t})}(x)} \mu_{B(\mathbf{t})}(dx) \end{aligned}$$

Czyli  $\mu_{B(\mathbf{t})+F(\mathbf{t})}$  jest absolutnie ciągła względem  $\mu_{B(\mathbf{t})}$  z gęstością

$$\begin{aligned} \frac{f_{B(\mathbf{t})+F(\mathbf{t})}(x)}{f_{B(\mathbf{t})}(x)} &= \\ &= \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - x_{k-1})(F(t_k) - F(t_{k-1}))}{(t_k - t_{k-1})} - \sum_{k=1}^n \frac{(F(t_k) - F(t_{k-1}))^2}{2(t_k - t_{k-1})} \right\} \end{aligned}$$

Chcąc przejść od  $\mu_{B(\mathbf{t})}$  i  $\mu_{B(\mathbf{t})+F(\mathbf{t})}$  do odpowiednio  $\mathbb{W}$  o  $\mathbb{W}_F$  chcemy zagęścić nasze obserwacje wektorów losowych  $B(\mathbf{t})$  i  $B(\mathbf{t}) + F(\mathbf{t})$ . Innymi słowy wybierać punkty  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  tak aby  $\max_k(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0$  przy  $n \rightarrow \infty$ . Wówczas spodziewamy się, że

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(F(t_k) - F(t_{k-1}))^2}{2(t_k - t_{k-1})} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{F(t_k) - F(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right)^2 (t_k - t_{k-1}) \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 F'(s)^2 ds. \end{aligned}$$

Chcąc zbadać drugi czynnik we wzorze na  $f_{B(\mathbf{t})+F(\mathbf{t})}(x)/f_{B(\mathbf{t})}(x)$  zauważmy, że losując  $x_1, x_2, \dots, x_n$  z rozkładu  $\mu_{B(\mathbf{t})}$  otrzymujemy wektor o tym samym rozkładzie co  $B(\mathbf{t})$ . Spodziewamy się zatem, że wspomniany czynnik zachowuje się jak

$$\sum_{k=1}^n \frac{(B(t_k) - B(t_{k-1}))(F(t_k) - F(t_{k-1}))}{(t_k - t_{k-1})}.$$

Pokażemy niebawem, że powyższe sumy zbiegają do zmiennej, którą oznaczać będziemy  $\int_0^1 F'(s) dB_s$ .

### Definicja 3.12

Przestrzeń Camerona-Martina  $\mathcal{H}$  nazywać będziemy

$$\mathcal{H} = \left\{ F \in C[0,1] : F(t) = \int_0^t f(s)ds \text{ dla pewnej } f \in L^2[0,1] \right\}.$$

Jeżeli  $F(t) = \int_0^t f(s)ds \in \mathcal{H}$ , to  $f$  jest słabą pochodną  $F$ . Dokładniej dla każdej  $\phi \in C^1[0,1]$  takiej, że  $\phi(0) = \phi(1) = 0$ ,

$$\int_0^1 F(s)\phi'(s)ds = - \int_0^1 f(s)\phi(s)ds.$$

Z tego powodu pozwolimy sobie na notację  $F' = f$ .

Dla  $F \in \mathcal{H}$  położmy

$$Q_n(F) = 2^n \sum_{j=1}^{2^n} \left[ F\left(\frac{j}{2^n}\right) - F\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right]^2.$$

**Lemat 3.13**

Niech  $F \in C[0,1]$  będzie taka, że  $F(0) = 0$ . Wówczas ciąg  $\{Q_n(F)\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest niemalejący oraz

$$F \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} Q_n(F) < \infty.$$

Dodatkowo dla  $F \in \mathcal{H}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(F) = \|F'\|_2^2.$$

*Dowód.* Z nierówności  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left[ F\left(\frac{j}{2^n}\right) - F\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right]^2 &\leq \\ &2 \left[ F\left(\frac{2j}{2^{n+1}}\right) - F\left(\frac{2j-1}{2^{n+1}}\right) \right]^2 + 2 \left[ F\left(\frac{2j-1}{2^{n+1}}\right) - F\left(\frac{2j-2}{2^{n+1}}\right) \right]^2 \end{aligned}$$

sumując stronami po  $j$  otrzymujemy monotoniczność ciągu  $\{Q_n(F)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Założmy, że  $F \in \mathcal{H}$ . Wówczas

$$\begin{aligned} Q_n(F) &= 2^n \sum_{j=1}^{2^n} \left[ F\left(\frac{j}{2^n}\right) - F\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right]^2 = 2^n \sum_{j=1}^{2^n} \left[ \int_{\frac{j-1}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}} F'(s)ds \right]^2 \\ &\leq 2^n \sum_{j=1}^{2^n} \int_{\frac{j-1}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}} F'(s)^2 ds = \|F'\|_2^2. \end{aligned}$$

Założmy teraz, że  $\sup_{n \in \mathbb{N}} Q_n(F) < \infty$ . Rozważmy

$$Y_n(t) = \sum_{j=1}^{2^n} 2^n \int_{\frac{j-1}{2^n}}^{\frac{j}{2^n}} F'(s)^2 ds \mathbb{1}_{\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j-1}{2^n}\right]}(t).$$

Wówczas ciąg  $Y_n$  jest martyngałem na przestrzeni  $([0, 1], \mathcal{B}or[0, 1])$  z miarą Lebesguea względem filtracji

$$\mathcal{F}_n = \sigma \left( \left[ \frac{j}{2^n}, \frac{j-1}{2^n} \right] : 1 \leq j \leq 2^n \right).$$

Dodatkowo

$$\mathbb{E}Y_n^2 = 2^{2n} \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \left[ F \left( \frac{j}{2^n} \right) - F \left( \frac{j-1}{2^n} \right) \right]^2 = Q_n(F).$$

Stąd  $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest martyngałem ograniczonym w  $L^2([0, 1])$ . Istnieje zatem zmienna  $Y \in L^2[0, 1]$  taka, że  $Y_n \rightarrow Y$  p.w. i w  $L^2$ . Zauważmy, że dla dowolnych  $j$  i  $m$ ,

$$F \left( \frac{j}{2^m} \right) = \int_0^{\frac{j}{2^m}} Y_n(t) dt \rightarrow \int_0^{\frac{j}{2^m}} Y(t) dt$$

Z gęstości liczb diadycznych wnioskujemy, że  $Y = F'$  p.w. Ostatni postulat wynika z

$$Q_n(F) = \mathbb{E}Y_n^2 \rightarrow \mathbb{E}Y^2 = \|F'\|_2^2.$$

□

### Lemat 3.14

Niech  $B = (B_t)_{t \in [0, 1]}$  będzie ruchem Browna. Dla  $F \in \mathcal{H}$ , ciąg

$$\xi_n = 2^n \sum_{j=1}^{2^n} \left[ F \left( \frac{j}{2^n} \right) - F \left( \frac{j-1}{2^n} \right) \right] \cdot \left[ B \left( \frac{j}{2^n} \right) - B \left( \frac{j-1}{2^n} \right) \right]$$

jest zbieżny prawie wszędzie i w  $L^2(\Omega)$ . Zmienną graniczną oznaczać będziemy  $\int_0^1 F'(s) dB_s$ .

*Dowód. Zadanie*

□

### Twierdzenie 3.15 (Cameron-Martin 1944)

Niech  $F \in C[0, 1]$  będzie taka, że  $F(0) = 0$ . Wówczas

- (i) Jeżeli  $F \notin \mathcal{H}$ , to  $\mathbb{W}$  i  $\mathbb{W}_F$  są singularne.
- (ii) Jeżeli  $F \in \mathcal{H}$ , to  $\mathbb{W}$  i  $\mathbb{W}_F$  są równoważne oraz

$$\mathbb{W}_F(dw) = \exp \left\{ \int_0^1 F'(s)dw(s) - \int_0^1 F'(s)^2 ds/2 \right\} \mathbb{W}(dw).$$

**Uwaga 3.16**

Miara  $\mathbb{W}$  skoncentrowana jest na trajektoriach ruchu Browna  $B$ . Całka  $\int_0^1 F'(s)dw(s)$  pojawiająca się w powyższym wzorze jest więc całką stochastyczną z ruchu Browna. W tym szczególnym przypadku (całkowania funkcji deterministycznych) możliwe jest całki  $\int_0^1 F'(s)dB_s$  dla każdej trajektorii (każdej  $\omega$ ).

*Dowód.* Niech  $\mathbf{t}_n = \{j2^{-n} : j = 0, 1, \dots, 2^n\}$  będzie partycją diadyczną odcinka  $[0, 1]$ . Niech  $\mathcal{F}_n = \sigma(\pi_{\mathbf{t}_n})$  będzie najmniejszym  $\sigma$ -ciałem podzbiorów  $C[0, 1]$  względem którego  $\pi_{\mathbf{t}_n}$  jest mierzalne. Innymi słowy  $\mathcal{F}_n$  generowane jest przez zbiory postaci

$$A = \{x \in C[0, 1] : x(j2^{-n}) \in A_j, 0 \leq j \leq 2^n\}$$

dla  $A_j \in \text{Bor}(\mathbb{R})$ . Zauważmy, że

$$\mathbb{W}[A] = \mathbb{P}[B(j2^{-n}) \in A_j] = \int_{A_1 \times \dots \times A_{2^n}} \frac{1}{c_n} e^{-\|\Gamma y\|^2/2} dy$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_F[A] = \mathbb{P}[B(j2^{-n}) + F(j2^{-n}) \in A_j] &= \int_{A_1 \times \dots \times A_{2^n}} \frac{1}{c_n} e^{-\|\Gamma y - m_F\|^2/2} dy \\ &\int_{A_1 \times \dots \times A_{2^n}} \frac{1}{c_n} e^{\langle \Gamma y, m_F \rangle - \|m_F\|^2/2} e^{-\|\Gamma y\|^2/2} dy \end{aligned}$$

Dla  $x \in C[0, 1]$  przyjmować będziemy

$$\nabla_j^{(n)} x = \nabla_j x = x \left( \frac{j}{2^n} \right) - x \left( \frac{j-1}{2^n} \right)$$

oraz

$$H_n(x) = 2^{n-1} \left[ \sum_{j=1}^{2^n} (\nabla_j F)^2 - 2 \sum_{j=1}^{2^n} \nabla_j x \nabla_j F \right]$$

$$\frac{d\mathbb{W}_{F|\mathcal{F}_n}}{d\mathbb{W}_{|\mathcal{F}_n}}(x) = \prod_{j=1}^{2^n} \exp \left\{ -2^{n-1} (\nabla_j x - \nabla_j F) \right\} \exp \left\{ 2^{n-1} (\nabla x)^2 \right\} = e^{-H_n(x)}$$

Ciąg zmiennych losowych  $e^{-H_n} : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jest więc nieujemnym martingaleem względem  $\mathbb{W}$ . Ciąg  $H_n$  jest zatem zbieżny  $\mathbb{W}$ -p.w. (być może do granicy niewłaściwej  $+\infty$ ). Mamy

$$\mathbb{E}_{\mathbb{W}} H_n = \int_{C[0,1]} H_n(f) \mathbb{W}(df) = Q_n(F)/2$$

oraz

$$\text{Var}_{\mathbb{W}}[H_n] = Q_n(F).$$

Z nierówności Czebyszewa

$$\mathbb{W}[f : H_n(f) \leq Q_n(F)/4] \leq \frac{16}{Q_n(F)}$$

Jeżeli  $F \notin \mathcal{H}$ , to  $H_n \rightarrow \infty$  a co za tym idzie

$$\frac{d\mathbb{W}_{F|\mathcal{F}_n}}{d\mathbb{W}_{|\mathcal{F}_n}} = e^{-H_n} \rightarrow 0 \quad \mathbb{W} - p.w.$$

Jeżeli natomiast  $F \in \mathcal{H}$ , to

$$H_n(x) \rightarrow \frac{1}{2} \|F\|_2^2 - \int_0^1 F'(s) dB_s.$$

□

Niech  $B = (B_t)_{t \in [0, +\infty)}$  będzie ruchem Browna na  $[0, +\infty)$ . Rozważmy pierwszy czas przejścia dla  $B$  z dryfem  $\mu < 0$  zadany wzorem

$$\tau_a(\mu) = \inf\{s > 0 : B_s + \mu s > a\}.$$

Szukamy  $\mathbb{P}[\tau_a(\mu) < \infty]$ . Zauważmy najpierw, że z ciągłości miary

$$\mathbb{P}[\tau_a(\mu) < \infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\tau_a(\mu) \leq n].$$

Dla dowolnego  $c > 0$ ,

$$\begin{aligned} \tau_a(\mu) &= \inf\{cs > 0 : B_{cs} + \mu cs > a\} \\ &= c \inf\left\{s > 0 : \frac{1}{\sqrt{c}} B_{cs} + \mu \sqrt{cs} > \frac{a}{\sqrt{c}}\right\} \\ &\stackrel{d}{=} c \tau_{a/\sqrt{c}}(\sqrt{c}\mu). \end{aligned}$$

Stąd

$$\mathbb{P}[\tau_a(\mu) \leq n] = \mathbb{P}\left[\tau_{a/\sqrt{n}}(\sqrt{n}\mu) \leq 1\right].$$

Oznaczmy  $a_n = a/\sqrt{n}$  oraz  $\mu_n = \sqrt{n}\mu$ . Dla  $F(s) = \mu_n s$  mamy

$$\int_0^1 F'(s) dB_s = \mu_n B(1).$$

Mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left[ \tau_{a/\sqrt{n}}(\sqrt{n}\mu) \leq 1 \right] &= \mathbb{W} \left[ \left\{ f : \sup_{s \in [0,1]} (f(s) + \mu_n s) \geq a_n \right\} \right] \\
&= \mathbb{W}_F \left[ \left\{ f : \sup_{s \in [0,1]} f(s) \geq a_n \right\} \right] \\
&= \int_{\{f : \sup_{s \in [0,1]} f(s) \geq a_n\}} e^{\mu_n f(1) - \mu_n^2/2} \mathbb{W}(df) \\
&= \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{\sup_{s \in [0,1]} B_s \geq a_n\}} e^{\mu_n B_1 - \mu_n^2/2} \right].
\end{aligned}$$

Przypomnijmy, że z zasady odbicia proces

$$\widehat{B}_t = \begin{cases} B_t & t \leq \tau_{a_n}(0) \\ 2a_n - B_t & t \geq \tau_{a_n}(0) \end{cases}$$

jest ruchem Browna. Stąd

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{\sup_{s \in [0,1]} B_s \geq a_n\}} e^{\mu_n B_1 - \mu_n^2/2} \right] &= \\
\mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{\sup_{s \in [0,1]} \widehat{B}_s \geq a_n\}} e^{\mu_n \widehat{B}_1 - \mu_n^2/2} \right] &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{\sup_{s \in [0,1]} B_s \geq a_n\}} e^{\mu_n (2a_n - B_1) - \mu_n^2/2} \right] = \\
&= e^{2a_n \mu_n} \left( 1 - \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{\sup_{s \in [0,1]} B_s \leq a_n\}} e^{-\mu_n B_1 - \mu_n^2/2} \right] \right).
\end{aligned}$$

Wyrażenie pod wartością oczekiwaną jest ograniczone przez

$$e^{-\mu a - \mu^2 n/2}.$$

Ostatecznie

$$\mathbb{P}[\tau_a(\mu) < \infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\tau_a(\mu) \leq n] = e^{2\mu a}.$$

### 3.4 Twierdzenie Donskera

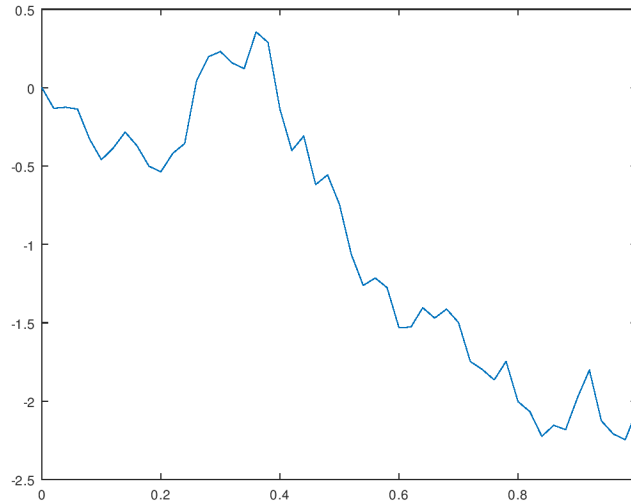
Niech  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że

$$\mathbb{E}[X_k] = 0, \quad \sigma^2 = \mathbb{E}[X_k^2] < \infty.$$

Rozważmy spacer losowy generowany przez rozkład  $X$ ,  $S_0 = 0$  i  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Naszym celem jest opis własności asymptotycznych  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , które zależą od całej trajektorii ciągu. Przestrzeń  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  jest w tym celu niewystarczająca, ponieważ topologia produktowa jest zbyt uboga (lub równoważnie jest zbyt dużo ciągów zbieżnych a przez to mało funkcji ciągłych).

Będziemy pracować w przestrzeni  $C[0,1]$ . Dla  $n \in \mathbb{N}$  niech  $Y_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie losową funkcją ciągłą zadaną przez

$$Y_n(t) = \sigma^{-1} n^{-1/2} S_{[tn]} + \{tn\} \sigma^{-1} n^{-1/2} X_{[tn]+1}. \quad (3.1)$$



Rysunek 3.2. losowa funkcja  $Y_n$  dla  $n = 50$

Funkcja  $Y_n(\cdot)$  jest kawałkami liniowa i równa  $n^{-1/2} S_k$  w punkcie  $k/n$ . Rozważany przez nas losowy obiekt  $Y_n$  jest elementem  $C[0,1]$  przestrzeni funkcji ciągłych na odcinku  $[0,1]$ .

**Twierdzenie 3.17** (Donsker)

Niech zmienne losowe  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  będą iid ze średnią 0 i wariancją  $\sigma^2 < \infty$ . Wówczas dla losowych funkcji ciągłych  $Y_n$  zadanym przez (3.1),  $Y_n \Rightarrow B$ , gdzie  $B = (B_t)_{t \in [0,1]}$  jest ruchem Browna na  $[0,1]$ .

*Dowód. Krok 1:* Zbieżność rozkładów skończenie wymiarowych.

W pierwszym kroku uzasadnimy, że dla każdego  $k \in \mathbb{N}$  i każdych  $t_1, t_2, \dots, t_k \in [0,1]^k$ ,

$$(Y_n(t_1), Y_n(t_2), \dots, Y_n(t_k)) \Rightarrow (B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k})$$

słabo w  $\mathbb{R}^k$ . Niech  $s_1 < s_2 < \dots < s_k$  będzie (rosnącą) permutacją liczb  $t_1, \dots, t_k$ . Wówczas powyższa zbieżność jest równoważna

$$(Y_n(s_1), Y_n(s_2), \dots, Y_n(s_k)) \Rightarrow (B_{s_1}, B_{s_2}, \dots, B_{s_k}).$$

Zauważmy wreszcie, że dla  $j < k$ ,

$$Y_n(s_{j+1}) - Y_n(s_j) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=[s_j n]+1}^{[s_{j+1} n]} X_i \Rightarrow B_{s_{j+1}} - B_{s_j}$$

Skoro zmienne  $\{Y_n(t_{j+1}) - Y_n(t_j)\}_{j=0}^{k-1}$  są niezależne, to

$$(Y_n(s_0), Y_n(s_1) - Y_n(s_0), \dots, Y_n(s_k) - Y_n(s_{k-1})) \Rightarrow (B(s_0), B(s_1) - B(s_0), \dots, B(s_k) - B(s_{k-1})).$$

Z twierdzenia o odwzorowaniu ciągłym otrzymujemy

$$(Y_n(s_1), Y_n(s_2), \dots, Y_n(s_k)) \Rightarrow (B_{s_1}, B_{s_2}, \dots, B_{s_k}).$$

**Krok 2:** Testowanie modułu ciągłości. Ustalmy  $\delta > 0$ . Dla  $n > [1/\delta] = n_\delta$  rozważmy  $t_j = j\delta$  dla  $j = 0, 1, \dots, n_\delta$ . Wówczas dla każdego  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\omega_{Y_n}(\delta) > 3\epsilon] &\leq \sum_{j=1}^{n_\delta} \mathbb{P} \left[ \sup_{s \in [t_{j-1}, t_j]} |X_n(s) - X_n(t_{j-1})| \geq \epsilon \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n_\delta} \mathbb{P} \left[ \max_{(j-1)\delta n \leq k \leq nj\delta} |S_k - S_{(j-1)n\delta}| > \epsilon\sigma\sqrt{n} \right] \\ &= n_\delta \mathbb{P} \left[ \max_{k \leq \delta n} |S_k| > \epsilon\sigma\sqrt{n} \right]. \end{aligned}$$

Aby dokończyć szacowanie zastosujemy nierówność Etemendiego

$$\mathbb{P} \left[ \max_{k \leq n} |S_k| > 2\alpha \right] \leq 2 \max_{k \leq n} \mathbb{P}[|S_k| > \alpha]$$

aby otrzymać

$$\mathbb{P}[\omega_{Y_n}(\delta) > 3\epsilon] \leq \frac{2}{\delta} \max_{k \leq \delta n} \mathbb{P}[|S_k| > \epsilon\sigma\sqrt{n}/2]$$

Z centralnego twierdzenia granicznego, dla każdego  $x \in \mathbb{R}$  istnieje takie  $k(x)$ , że dla  $k \geq k(x)$ ,

$$\mathbb{P}[|S_k| > x\sigma\sqrt{k}] \leq 4(1 - \Phi(x)) \leq 6e^{-x^2/2}.$$

Biorąc  $x = \epsilon/(2\sqrt{\delta})$  otrzymujemy, dla pewnego  $k_\delta$ ,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\delta} \max_{k_\delta < k \leq \delta n} \mathbb{P}[|S_k| > \epsilon\sigma\sqrt{n}/2] \\ \leq \frac{2}{\delta} \max_{k_\delta < k \leq \delta n} \mathbb{P}[|S_k| > \epsilon\sigma\sqrt{k}/(2\sqrt{\delta})] \leq \frac{2}{\delta} e^{-\epsilon^2/(4\delta)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

przy  $\delta \rightarrow 0^+$ . Z drugiej strony dla każdej ustalonej  $\delta$ ,

$$\frac{1}{\delta} \max_{k \leq k_\delta} \mathbb{P}[|S_k| > \epsilon \sigma \sqrt{n}/2] \leq \frac{4k_\delta}{\delta \epsilon^2 n} \rightarrow 0$$

przy  $n \rightarrow \infty$ . Powyższe argumenty dają

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\omega_{Y_n}(\delta) > 3\epsilon] = 0.$$

Ciąg rozkładów  $Y_n$  na  $C[0, 1]$  jest więc ciasny.  $\square$

### Lemat 3.18

Rozważmy zmienne iid  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Wówczas dla spaceru losowego zadanego przez  $S_0 = 0$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  oraz dowolnej  $\alpha > 0$  zachodzi

$$\mathbb{P} \left[ \max_{k \leq n} |S_k| > 2\alpha \right] \leq 2 \max_{k \leq n} \mathbb{P}[|S_k| > \alpha].$$

*Dowód.* Niech  $\tau = \inf\{k : |S_k| > 2\alpha\}$ . Mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \max_{k \leq n} |S_k| > 2\alpha \right] &= \mathbb{P}[S_n > \alpha] + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[\tau = k, |S_n| \leq \alpha] \\ &\leq \mathbb{P}[S_n > \alpha] + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}[\tau = k, |S_n - S_k| \geq \alpha] \\ &\leq \mathbb{P}[S_n > \alpha] + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}[\tau = k] \mathbb{P}[|S_{n-k}| \geq \alpha] \\ &\leq \mathbb{P}[S_n > \alpha] + \max_{j \leq n} \mathbb{P}[|S_{n-j}| \geq \alpha] \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[\tau = k] \\ &\leq \mathbb{P}[S_n > \alpha] + \max_{j \leq n} \mathbb{P}[|S_{n-j}| \geq \alpha] \end{aligned}$$

$\square$

### Przykład 3.19

Niech  $S_0 = 0$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  dla niezależnych zmiennych o jednokowym rozkładzie takim, że  $\mathbb{E}[X_1] = 0$  oraz  $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$ . Rozważmy ciąg zmiennych losowych  $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} S_k$ . Korzystając z twierdzenia Donskera pokażemy, że

$$M_n / \sqrt{n} \Rightarrow |N|,$$

w  $\mathbb{R}$ , gdzie  $N$  ma standardowy rozkład normalny. Rozważmy w tym celu funkcje  $Y_n$  zadane przez (3.1). Wówczas

$$M_n / \sqrt{n} = \max_{1 \leq k \leq n} S_k / \sqrt{n} = \max_{t \in [0, 1]} Y_n(t).$$

Funkcja  $m: C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  zadana przez  $(h) = \sup_{t \in [0,1]} h(t)$  jest ciągła. Skoro  $Y_n \Rightarrow B = (B_t)_{t \in [0,1]}$  to z twierdzenia o odwzorowaniu ciągłym

$$M_n / \sqrt{n} = \max_{t \in [0,1]} Y_n(t) = m(Y_n) \Rightarrow m(B) = \sup_{t \in [0,1]} B_t.$$

Z zasady odbicia wiemy, że ostatnia zmienna ma ten sam rozkład co  $|N|$ .

### 3.5 Most Browna

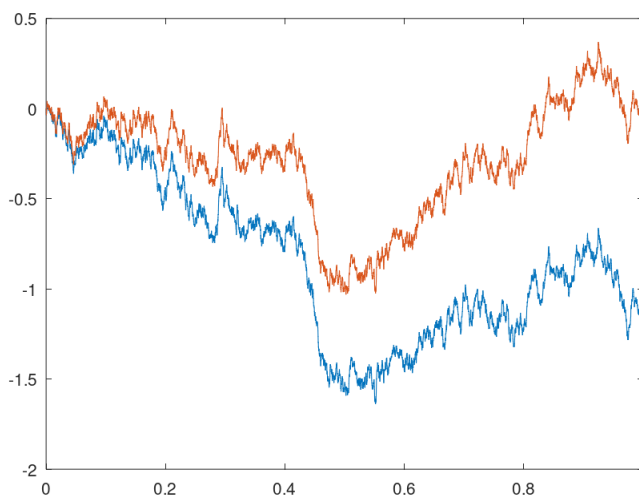
Niech  $B = (B_t)_{t \in [0,1]}$  będzie ruchem Browna na odcinku  $[0,1]$ .

#### Definicja 3.20

Mostem Browna nazywamy proces stochastyczny  $B^\circ = (B_t^\circ)_{t \in [0,1]}$  zadany przez

$$B_t^\circ = B_t - tB_1, \quad t \in [0,1].$$

Most Browna jest procesem gaussowskim (rozkłady skończenie wymiarowe są gaussowskie) takim, że  $\mathbb{E}[B_t^\circ B_s^\circ] = s(1-t)$  dla  $s \leq t$  (zadanie).



**Rysunek 3.3.** Trajektorie ruchu Browna (niebieska) i otrzymana z niej trajektoria mostu Browna (pomarańczowa)

Zauważmy, że  $B_1^\circ = 0$  p.w. Most Browna interpretować można jako ruch Browna na  $[0,1]$  pod warunkiem  $B_1 = 0$ :

$$(B_t^\circ)_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} (B_t)_{t \in [0,1]} | B_1 = 0.$$

Zdarzenie  $\{B_1 = 0\}$  ma zerowe prawdopodobieństwo, więc nadanie matematycznego sensu powyższej interpretacji wymaga odrobiny pracy. Oznaczmy przez  $\mathbb{W}^\circ$  rozkład  $B^\circ$  na  $C[0,1]$ .

**Twierdzenie 3.21**

Dla  $\epsilon > 0$  rozważmy miarę probabilistyczną  $\mathbf{P}_\epsilon$  na  $C[0,1]$  zadaną przez

$$\mathbf{P}_\epsilon[A] = \mathbb{P}[B \in A \mid B_1 \in [0, \epsilon]], A \in \mathcal{C}.$$

Wówczas  $\mathbf{P}_\epsilon \Rightarrow \mathbb{W}^\circ$  przy  $\epsilon \rightarrow 0$ .

*Dowód.* Pokażemy, że dla każdego domkniętego  $F \in \mathcal{C}$ ,

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}_\epsilon[F] \leq \mathbb{W}^\circ[F].$$

Zauważmy najpierw, że  $\mathbb{E}[B_t^\circ B_1] = 0$ . Skoro wektory losowe postaci

$$(B_{t_1}^\circ, B_{t_2}^\circ, \dots, B_{t_n}^\circ, B_1)$$

są normalne, to zmienna  $B_1$  jest niezależna od wektora losowego  $(B_{t_1}^\circ, B_{t_2}^\circ, \dots, B_{t_n}^\circ)$ . Oznacza to, że dla każdego  $A \in \mathcal{C}_f$  (zbiory skończenie wymiarowe) i każdego  $D \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$ ,

$$\mathbb{P}[B^\circ \in A, B_1 \in D] = \mathbb{P}[B^\circ \in A] \mathbb{P}[B_1 \in D].$$

Skoro  $\mathcal{C}_f$  jest klasą rozróżniająca, to powyższa równość zachodzi dla każdego  $A \in \mathcal{C}$ . Biorąc  $D = [0, \epsilon]$  otrzymujemy

$$\mathbb{P}[B^\circ \in A | B_1 \in [0, \epsilon]] = \mathbb{P}[B^\circ \in A]$$

dla dowolnego  $A \in \mathcal{C}$  i  $\epsilon > 0$ . Zauważmy, że  $\|B - B^\circ\|_\infty = |B_1|$ . Jeżeli więc przez  $F^\delta$  oznaczymy domkniętą otoczkę  $F$ ,

$$F^\delta = \{f \in C[0,1] : \rho(f, F) \leq \delta\},$$

to

$$\{|B_1| \leq \delta\} \cap \{B \in F\} \subseteq \{B^\circ \in F^\delta\}.$$

Stąd dla  $\epsilon < \delta$ ,

$$\mathbb{P}[B \in F | B_1 \in [0, \epsilon]] \leq \mathbb{P}[B^\circ \in F^\delta | B_1 \in [0, 1]] = \mathbb{P}[B^\circ \in F^\delta].$$

Przechodząc najpierw z  $\epsilon \rightarrow 0$  a następnie z  $\delta \rightarrow 0$  i powołując się na to, że  $F$  jest domkniętą otrzymujemy tezę.  $\square$

**Przykład 3.22**

Znajdziemy rozkład  $\sup_{t \in [0,1]} B_t^\circ$ . W tym celu przypomnijmy ciągłe odwzorowanie  $m: C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  zadane przez  $m(f) = \sup_{t \in [0,1]} f(t)$ . Wówczas  $m^*W^\circ$  jest rozkładem zmiennej  $\sup_{t \in [0,1]} B_t^\circ$ . Z twierdzenia o odwzorowaniu ciągłym wiemy, że przy  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ,

$$m^*P_\epsilon \Rightarrow m^*W^\circ, \quad (3.2)$$

gdzie  $P_\epsilon[A] = \mathbb{P}[B \in A \mid B_1 \in [0, \epsilon]]$ . Miary  $m^*P_\epsilon$  to po prostu rozkład  $\sup_{t \in [0,1]} B_t$  pod warunkiem  $B_1 \in [0, \epsilon]$ . Zauważmy, że przy  $\epsilon \rightarrow 0^+$  z reguły de l'Hospitala,

$$\frac{1}{\epsilon} \mathbb{P}[B_1 \in [0, \epsilon]] \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Z drugiej strony, dla  $a > 0$  i  $\epsilon < a$  z zasady odbicia (ruch Browna odbity przy pierwszym uderzeniu w  $a$  jest ruchem Browna)

$$\mathbb{P} \left[ \sup_{t \in [0,1]} B_t > a, B_1 \in [0, \epsilon] \right] = \mathbb{P}[B_1 \in [2a, 2a - \epsilon]].$$

Powołując się raz jeszcze na regułę de l'Hospitala,

$$\frac{1}{\epsilon} \mathbb{P}[B_1 \in [2a, 2a - \epsilon]] \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2a^2}.$$

Wracając do (3.2) otrzymujemy dla  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P} \left[ \sup_{t \in [0,1]} B_t^\circ > a \right] = e^{-2a^2}.$$

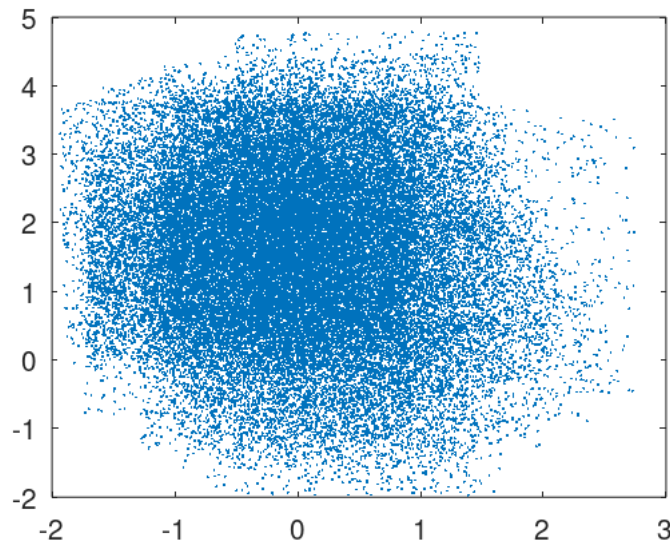
# 4

---

## Miary

**Streszczenie** Zbadamy słabą zbieżność losowych podzbiorów płaszczyzny

Naszym celem jest zbudowanie aparatu pozwalającego na badanie losowych dyskretnych podzbiorów przestrzeni topologicznych. Gdy obserwujemy duży dyskretny zbiór ciężko jest opisać dokładnie konfigurację punktów. Przy bardzo dużych zbiorach na pierwszy rzut oka jesteśmy w stanie jedynie stwierdzić w których miejscach jest większe zagęszczenie punktów.



Rysunek 4.1. Losowy podzbiór płaszczyzny.

Duże losowe podzbiory naturalnie utożsamiamy z miarami. Dokładniej, zbiór dyskretny  $D$  możemy utożsamić z miarą punktową postaci

$$\sum_{x \in D} \delta_x.$$

Ta barokowa wręcz konstrukcja okazuje się wyjątkowo przydatna w analizie. Miary skupiają wokół siebie więcej aparatu matematycznego niż kolekcje podzbiorów.

Rozważać będziemy stosunkowo porządną przestrzeń topologiczną  $E$ . Można myśleć, że  $E$  jest pewnym uzwarceniem podzbiorów  $\mathbb{R}^n$ . Przykładowo  $(-\infty, \infty]$ , w którym do prostej  $\mathbb{R}$  dorzucamy dodatkowy punkty  $\{\infty\}$ . Wówczas bazą otoczeń  $\infty$  są półproste  $(a, \infty)$ . Wówczas  $(-\infty, \infty]$  staje się homeomorficzne z  $(0, 1]$ . Oznacza to w szczególności że zbiór  $[0, +\infty]$  jest zwarty w  $(-\infty, \infty]$ .

Niech  $E$  będzie lokalnie zwartą przestrzenią topologiczną z bazą przeliczalną. Dokładniej  $E$  jest przestrzenią Hausdorffa, gdzie każdy  $x \in E$  ma warunkowo zwarte otoczenie i istnieją zbiory otwarte  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  takie, że każdy otwarty  $G \subseteq E$  zapisuje się w postaci  $G = \bigcup_{k \in I} G_k$  dla pewnego  $I \subseteq \mathbb{N}$ . Przez  $\mathcal{E}$  oznaczają będziemy  $\sigma$ -ciało zbiorów borelowskich na  $E$ .

## 4.1 Procesy punktowe

Przypomnijmy, że dla każdego  $x \in E$  definiujemy miarę  $\delta_x$  na  $E$  skupioną w  $x$  wzorem

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}.$$

Skończone sumy miar powyższej postaci nazywać będziemy miarami punktowymi.

### Definicja 4.1

Miarę  $m$  na  $E$  nazywamy miarą punktową jeżeli  $m$  jest postaci

$$m = \sum_{1 \leq k < N} \delta_{x_k},$$

gdzie  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  i ciąg  $\{x_k\}_{1 \leq k < N}$  nie zawiera podciągu zbieżnego. Przez  $M_p(E)$  oznaczają będziemy przestrzeń wszystkich miar punktowych na  $E$ .

Założenie o baraku podciągu zbieżnego sprawia, że dla każdej  $m \in M_p(E)$  i każdego zwanego  $K \subset E$ ,  $m(K) < \infty$ . Każda miara punktowa jest więc miarą Radona.

W przyszłości rozważać będziemy losowe elementy  $M_p(E)$ . Nie uciekniemy więc od  $\sigma$ -ciał podzbiorów  $M_p(E)$ . Niech  $\mathcal{M}_p(E)$  będzie najmniej-

szym  $\sigma$ -ciałem podzbiorów  $M_p(E)$  zawierającym zbiory postaci

$$\{m \in M_p(E) : m(F) \in B\}$$

dla  $F \in \mathcal{E}$  oraz  $B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$ . Wówczas  $M_p(E)$  jest najmniejszym  $\sigma$ -ciałem podzbiorów  $M_p(E)$  względem którego dla każdego  $F \in \mathcal{E}$  odwzorowanie  $m \mapsto m(F)$  jest mierzalne  $(M_p(E), \mathcal{M}_p(E)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$ .

#### Definicja 4.2

Niech  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  będzie przestrzenią probabilistyczną. Procesem punktowym nazywamy mierzalne odwzorowanie

$$N: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (M_p(E), \mathcal{M}_p(E)).$$

Jeżeli  $N$  jest procesem punktowym, to dla każdej  $\omega \in \Omega$ ,  $N(\omega) \in M_p(E)$ . O  $N$  możemy więc myśleć jak o odwzorowaniu dwóch zmiennych  $N(\omega, A)$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $A \in \mathcal{E}$ .

Należy zauważyć, że w przypadku miar postępujemy inaczej niż w przypadku losowych funkcji czy ciągów. Nie wprowadziliśmy bowiem na  $M_p(E)$  metryki. Uczynimy to w późniejszych podrozdziałach, kiedy będziemy mówili o słabej zbieżności procesów punktowych. Pamiętajmy jednak, że cały aparat przestrzeni metrycznych zgromadzony w rozdziale drugim stosuje się też w przypadku przestrzeni  $M_p(E)$ .

#### Fakt 4.3

$N: \Omega \rightarrow M_p(E)$  jest procesem punktowym wtedy i tylko wtedy, gdy  $N(\cdot, A)$  jest zmienną losową dla każdego  $A \in \mathcal{E}$ .

*Dowód.* Zadanie. □

#### Przykład 4.4

Niech  $E = [0, 1]$  i niech  $U$  będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na  $[0, 1]$ . Wówczas

$$N(\omega, A) = \delta_{U(\omega)}(A)$$

jest procesem punktowym.

Przypomnijmy, że dla procesu punkowego (czyli losowego elementu  $M_p(E)$ ) definiujemy jego rozkład  $\mathbf{P}_N$  wzorem

$$\mathbf{P}_N[\cdot] = N^*\mathbb{P}[\cdot] = \mathbb{P}[N \in \cdot].$$

Wówczas  $\mathbf{P}_N$  jest miarą probabilistyczną na zbiorze miar.

#### Fakt 4.5

Zbiory postaci

$$\{m \in M_p(E) : m(I_k) = n_k, k \leq n\} \subseteq M_p(E)$$

dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\{n_k\}_{k \leq n} \subseteq \mathbb{N}$  i  $I_k \in \mathcal{E}$  tworzą klasę rozróżniającą.

*Dowód.* Wystarczy sprawdzić, że powyższe zbiory stanowią  $\pi$ -układ generujący  $\mathcal{M}_p(E)$ .  $\square$

Powyższy fakt oznacza, że jeżeli dwa procesy punktowe  $N$  i  $M$  spełniają następującą własność: dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  i dowolnych zbiorów  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$  wektory losowe

$$(N(E_1), N(E_2), \dots, N(E_n)) \quad \text{oraz} \quad (M(E_1), M(E_2), \dots, M(E_n))$$

mają ten sam rozkład, to procesy punktowe  $N$  i  $M$  mają ten sam rozkład na  $M_p(E)$ .

Dla zmiennej losowej  $X$  jej wartość oczekiwana  $\mathbb{E}[X]$  stanowi pewnego rodzaju uproszczenie bądź przybliżenie  $X$ . Łatwiej jest bowiem mówić o liczbie rzeczywistej  $\mathbb{E}[X]$  niż o całej funkcji  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Zastosujemy podobny zabieg dla procesów punktowych.

#### Definicja 4.6

Miarą intensywności procesu punktowego  $N$  nazywamy miarę  $\mu_N$  na  $(E, \mathcal{E})$  zadaną przez

$$\mu_N(F) = \mathbb{E}[N(F)].$$

Przeliczalna addytywność  $\mu_N$  wynika z zastosowania twierdzenia o zbieżności monotonicznej.

#### Przykład 4.7

Rozważmy zmienną losową  $P$  o rozkładzie Poissona z parametrem  $\lambda > 0$ . Niech  $E_1, E_2, \dots$  będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym. Rozważmy proces punktowy

$$N = \sum_{k=1}^P \delta_{E_k}.$$

Wówczas  $N$  ma miarę intensywności

$$\mu_N(dx) = \lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$$

#### Przykład 4.8

Miara intensywności nie rozróżnia rozkładów procesów punktowych. Rozważmy zmienną losową  $U$  o rozkładzie jednostajnym na  $[0, 1]$ . Wówczas procesy punktowe

$$N_1 = 2\delta_U, \quad N_2 = \delta_U + \delta_{1-U}$$

mają tę samą miarę intensywności  $\mu(dx) = 2\mathbb{1}_{[0,1]}(x)dx$ .

Przypomnijmy, że dla mierzalnej  $f: E \rightarrow [0 + \infty)$  oraz  $m \in M_p(E)$  postaci

$$m = \sum_{1 \leq k < N} \delta_{x_k},$$

gdzie  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ,  $x_k \in E$ , zachodzi

$$\int_E f(x)m(dx) = \sum_{1 \leq k < N} f(x_k).$$

Poprzez zastosowanie twierdzenia Fubinię, dla procesu punktowego  $N$  o mierze intensywności  $\mu_N$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \int_E f(x)N(dx) \right] = \int_E f(x)\mu_N(dx)$$

dla dowolnej mierzalnej  $f: E \rightarrow [0 + \infty)$ .

#### Przykład 4.9

Niech  $E_1, E_2, \dots$  będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem  $\lambda > 0$ . Dla  $n \in \mathbb{N}$  niech  $S_n = E_1 + \dots + E_n$ . Rozważmy proces punktowy

$$N(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{S_n}(\cdot).$$

W celu zidentyfikowania miary intensywności  $\mu_N$  rozważmy jej transformatę Laplace'a

$$\phi(s) = \int e^{-sx} \mu_N(dx) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \mu_N(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[ e^{-sS_n} \right].$$

Zauważmy, że

$$\varphi(s) = \mathbb{E}[e^{-sE_1}] = \frac{\lambda}{s + \lambda}.$$

Stąd

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[ e^{-sS_n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[ e^{-sE_1} \right]^n = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)} = \frac{\lambda}{s}.$$

Skoro  $\lambda/s$  jest transformatą Laplace'a miary Lebesgue'a przeskalowanej przez  $\lambda$ ,

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \lambda dx = \frac{\lambda}{s} = \phi(s)$$

to ta ostatnia jest miara intensywności  $N$ . Dokładniej

$$\mu_N(dx) = \lambda dx.$$

Proces  $N$  nazywamy procesem punktowym Poissona z intensywnością  $\lambda dx$ .

Okazuje się, że metoda funkcjonału Laplacea jest skuteczna również w kontekście procesów punktowych. Wymagana jest jednak odpowiednia definicja.

#### Definicja 4.10

Dla procesu punkowego  $N$  definiujemy funkcjonał Laplacea  $\psi_N$  wzorem

$$\psi_N(f) = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int f(x) N(dx) \right\} \right],$$

gdzie  $f: E \rightarrow [0, +\infty)$  jest funkcją mierzalną.

#### Przykład 4.11

Niech  $N = \delta_X$  dla pewnej zmiennej losowej  $X$ . Wówczas

$$\psi_N(f) = \mathbb{E} \left[ e^{f(X)} \right].$$

#### Twierdzenie 4.12

Funkcjonał Laplace rozróżnia rozkłady procesów punktowych jako losowych elementów  $\mathcal{M}_p(E)$ . Dokładniej, jeżeli procesy punktowe  $N$  i  $M$  spełniają  $\psi_N(f) = \psi_M(f)$  dla każdej mierzalnej i nieujemnej  $f$ , to  $M$  i  $N$  mają ten sam rozkład, czyli

$$\mathbb{P}[N \in A] = \mathbb{P}[M \in A]$$

dla każdego  $A \in \mathcal{M}_p(E)$ .

*Dowód.* Rozważmy  $f$  postaci

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbb{1}_{E_k}(x)$$

dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_k > 0$  i  $E_k \in \mathcal{E}$ . Wówczas

$$\int f(x) N(dx) = \sum_{k=1}^n \lambda_k N(E_k).$$

Skoro przy ustalonych  $E_k$ ,  $\psi_N(f) = \psi_M(f)$  dla każdych  $\lambda_k$ , to wektory losowe

$$(N(E_k))_{k \leq n} \quad \text{oraz} \quad (M(E_k))_{k \leq n}$$

mają ten sam rozkład. Skoro rozkłady skończenie wymiarowe rozróżniają rozkłady otrzymujemy tezę.  $\square$

### Przykład 4.13

Rozważmy raz jeszcze

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{S_n},$$

gdzie  $S_n = E_1 + E_2 + \dots + E_n$  dla  $E_j$  niezależnych o rozkładzie wykładniczym z parametrem  $\lambda > 0$ . Chcemy znaleźć funkcjonal Laplace'a  $\psi_N$ . Dla uproszczenia jednak ograniczymy się do wyznaczenia wartości  $\psi_N(f)$  dla  $f$  o ograniczonym nośniku, tj takich, że istnieje  $t_0$  takie, że  $f(t) = 0$  dla  $t > t_0$ . Rozważmy funkcję

$$F(y) = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int f(x+y) N(dx) \right\} \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} f(S_n + y) \right\} \right]$$

Zauważmy, że

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} f(S_n + y) \right\} \middle| E_1 \right] = e^{-f(E_1+y)} F(E_1 + y).$$

Stąd otrzymujemy równanie całkowe

$$\begin{aligned} F(y) &= \mathbb{E} \left[ e^{-f(E_1+y)} F(E_1 + y) \right] = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} e^{-f(x+y)} F(x+y) dx \\ &= \lambda e^{\lambda y} \int_y^{\infty} e^{-\lambda x} e^{-f(x)} F(x) dx, \end{aligned}$$

które z kolei prowadzi do równania różniczkowego

$$F'(y) = \lambda^2 e^{\lambda y} \int_y^{\infty} e^{-\lambda x} e^{-f(x)} F(x) dx - \lambda e^{-f(y)} F(y) = \lambda (1 - e^{-f(y)}) F(y).$$

Stosując czynnik całkujący otrzymujemy

$$F(x) = F(0) \exp \left\{ \lambda \int_0^x (1 - e^{-f(y)}) dy \right\}.$$

Wracając do definicji

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} f(S_n + y) \right\} \right] = 1.$$

To oznacza, że

$$F(0) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^\infty (1 - e^{-f(y)}) dy \right\}.$$

Konstatując

$$\begin{aligned} \psi_N(f) &= \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int f(x) N(dx) \right\} \right] = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \sum_{n=1}^\infty f(S_n) \right\} \right] \\ &= F(0) = \exp \left\{ -\lambda \int_0^\infty (1 - e^{-f(y)}) dy \right\}. \end{aligned}$$

## 4.2 Procesy Poissona

Przejdziemy teraz do badania Procesów Poissona. Są to procesy punktowe, które charakteryzują się zupełną losowością. Dokładniej miary rozłącznych zbiorów są od siebie niezależne. Jest to miarowy odpowiednik procesu stochastycznego o niezależnych przyrostach. Jak przekonamy się pod koniec tego rozdziału stanowią one obiekt graniczny dla niezależnych próbek.

### Definicja 4.14

Proces punktowy  $N$  nazywamy procesem punktowym Poissona z miarą intensywności  $\mu$  jeżeli

- Dla każdego  $F \in \mathcal{E}$  zmienna losowa  $N(F)$  ma rozkład Poissona z parametrem  $\mu(F)$  (jeżeli  $\mu(F) = \infty$ , to  $N(F) = \infty$  p.w.)
- Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  i parami rozłącznych zbiorów  $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{E}$  zmienne losowe

$$N(F_1), N(F_2), \dots, N(F_n)$$

są niezależne.

Przypomnijmy, że jeżeli zmienna losowa  $X$  ma rozkład Poissona z parametrem  $\lambda$ , to  $\mathbb{E}[X] = \lambda$ . Jeżeli więc  $N$  jest Procesem punktowym Poissona z miarą intensywności  $\mu$ , to  $\mathbb{E}[N(F)] = \mu(F)$ . Dokładniej  $\mu$  jest też miarą intensywności w sensie Definicji 4.6. Druga własność definiująca proces punktowy Poissona nazywana jest zupełną losowością. Zanim podamy przykłady podamy wzór na funkcjonal Laplacea procesu punkowego Poissona. Skoro funkcjonały te rozróżniają rozkłady procesów punktowych, to posłuży nam on do weryfikacji, czy dany proces punktowy jest procesem Poissona.

**Twierdzenie 4.15** (wzór Campbella)

Niech  $N$  będzie procesem punktowym z miarą intensywności  $\mu$ . Wówczas  $N$  jest Procesem Poissona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\psi_N(f) = \exp \left\{ - \int \left( 1 - e^{-f(x)} \right) \mu(dx) \right\} \quad (4.1)$$

dla każdej mierzalnej  $f: E \rightarrow [0, +\infty)$ .

*Dowód.* Załóżmy najpierw, że  $N$  jest procesem Poissona. Dla funkcji  $f$  postaci

$$f(x) = \sum_{k=1}^n s_k \mathbb{1}_{E_k}(x) \quad (4.2)$$

dla pewnych  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s_k \in \mathbb{R}_+$  oraz  $E_k \in \mathcal{E}$ ,  $k \leq n$ . Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że zbiory  $E_k$  są parami rozłączne. Wówczas zmienne losowe  $N(E_1), N(E_2), \dots, N(E_n)$  są niezależne. Mamy

$$N(f) = \int_E f(x) N(dx) = \sum_{k=1}^n s_k N(E_k).$$

Ze wspomnieniowej niezależności możemy wyrazić funkcjonal Laplacea w punkcie  $f$  jako

$$\psi_N(f) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ e^{-s_k N(E_k)} \right].$$

Dla każdego  $k$  zmienna losowa  $N(E_k)$  ma rozkład Poissona z parametrem  $\mu(E_k)$  i stąd

$$\mathbb{E} \left[ e^{-s_k N(E_k)} \right] = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-s_k j} \frac{\mu(E_k)^j}{j!} e^{-\mu(E_k)} = \exp \left\{ -(1 - e^{-s_k}) \mu(E_k) \right\}.$$

Stąd

$$\psi_N(f) = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^n (1 - e^{-s_k}) \mu(E_k) \right\} = \exp \left\{ - \int \left( 1 - e^{-f(x)} \right) \mu(dx) \right\}.$$

Przypadek ogólny wnioskujemy teraz z przejścia monotonicznego. Jeżeli  $f$  jest dowolną mierzalną, nieujemną funkcją  $E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , to istnieje niemalejący ciąg funkcji prostych zbieżny do  $f$ . Wówczas  $\exp\{-N(f_n)\}$  jest nierosnącym ciągiem zmiennych losowych zbieżnych do  $\exp\{-N(f)\}$ . Z drugiej strony  $1 - e^{-f_n}$  jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do  $1 - e^{-f}$ . Stąd

$$\begin{aligned}\psi_N(f) &= \mathbb{E} \left[ e^{-N(f)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ e^{-N(f_n)} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ - \int \left( 1 - e^{-f_n(x)} \right) \mu(dx) \right\} = \exp \left\{ - \int \left( 1 - e^{-f(x)} \right) \mu(dx) \right\}.\end{aligned}$$

Niech Teraz  $N$  będzie procesem spełniającym (4.1). Dla  $f$  postaci (4.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \sum_{k=1}^n s_k N(E_k) \right\} \right] &= \psi_N(f) = \\ &= \exp \left\{ - \int \left( 1 - e^{-f(x)} \right) \mu(dx) \right\} = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^n (1 - e^{-s_k}) \mu(E_k) \right\}\end{aligned}$$

Podstawiając  $s_2 = s_3 = \dots = s_n = 0$  otrzymujemy

$$\mathbb{E} [\exp \{-s_1 N(E_1)\}] = \exp \{-(1 - e^{-s_1}) \mu(E_1)\}$$

Dla każdego  $E_1$  zmienna  $N(E_1)$  ma rozkład Poissona z parametrem  $\mu(E_1)$ . Proces  $N$  spełnia więc pierwszy postulat definicji procesu Poissona. Wracając teraz do przedostatniego wzoru otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \sum_{k=1}^n s_k N(E_k) \right\} \right] &= \psi_N(f) = \\ &= \exp \left\{ - \sum_{k=1}^n (1 - e^{-s_k}) \mu(E_k) \right\} = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} [\exp \{-s_k N(E_k)\}]\end{aligned}$$

co z kolei implikuje niezależność zmiennych  $N(E_1), N(E_2), \dots, N(E_n)$ .  $\square$

#### Twierdzenie 4.16

Niech  $\mu$  będzie  $\sigma$ -skończoną miarą na  $E$ . Istnieje proces punktowy Poissona z miarą intensywności  $\mu$ .

*Dowód.* Wystarczy, że pokażemy że istnieje proces punktowy którego funkcjonal Laplacea zadaje się wzorem

$$\psi_N(f) = \exp \left\{ \int 1 - e^{-f(x)} \mu(dx) \right\}.$$

Założmy najpierw, że  $0 < \mu(E) < \infty$ . Rozważmy zmienną losową  $P$  z rozkładem Poissona z parametrem  $\mu(E)$  oraz ciąg niezależnych elementów losowych  $X_1, X_2, \dots$  o rozkładzie  $\mu(\cdot)/\mu(E)$ . Pokażemy, że proces punktowy

$$N_0 = \sum_{k=1}^N \delta_{X_k}$$

jest szukanym procesem Poissona. Rozważmy w tym celu jego funkcjonal

$$\psi_{N_0}(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ e^{-f(X)} \right]^j \frac{\mu(E)^j}{j!} e^{-\mu(E)} = \exp \left\{ \mathbb{E} \left[ 1 - e^{-f(X)} \right] \mu(E) \right\}.$$

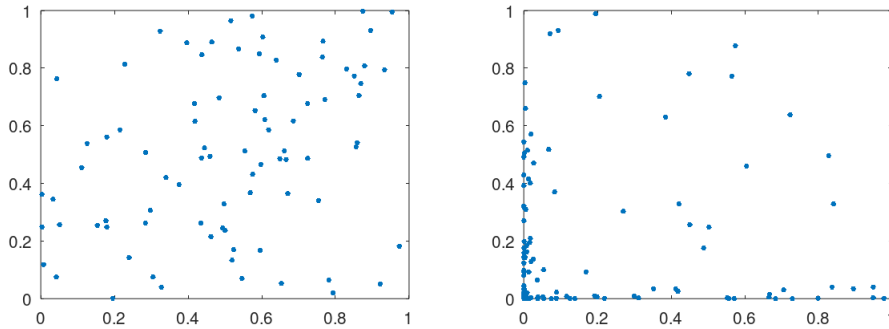
Wystarczy teraz napisać, że

$$\mathbb{E} \left[ 1 - e^{-f(X)} \right] \mu(E) = \int 1 - e^{-f(x)} \mu(dx).$$

Jeżeli natomiast  $\mu$  jest dowolną  $\sigma$ -skończoną miarą, to możemy rozbić  $E$  na przeliczalnie wiele rozłącznych kawałków  $E_k$  o skończonej mierze. Niech  $\mu_k(\cdot) = \mu(\cdot \cap E_k)$ . Dla każdego  $k$  istnieje (niezależny od pozostałych) proces Poissona  $N_k$  o mierze intensywności  $\mu_k$ . Wówczas  $N = \sum_{k=1}^{\infty} N_k$  jest szukanym procesem Poissona ponieważ

$$\begin{aligned} \psi_N(f) &= \prod_{k=1}^{\infty} \psi_{N_k}(f) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ \int 1 - e^{-f(x)} \mu_k(dx) \right\} \\ &= \exp \left\{ \int 1 - e^{-f(x)} \mu(dx) \right\}. \end{aligned}$$

□



**Rysunek 4.2.** Po lewej proces Poissona z intensywnością  $100\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)$ . Po prawej intensywność  $25/4\mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)(xy)^{-3/4}$

**Twierdzenie 4.17**

Jeżeli  $N_1$  i  $N_2$  są niezależnymi procesami Poissona z miarami intensywności odpowiednio  $\mu_1$  i  $\mu_2$ , to  $N_1 + N_2$  jest procesem Poissona z miarą intensywności  $\mu_1 + \mu_2$ .

*Dowód.* Zadanie. □

**Twierdzenie 4.18**

Jeżeli  $N$  będzie procesem punktowym Poissona na  $E$  a miarą intensywności  $\mu$ . Jeżeli  $f: E \rightarrow E'$  jest odwzorowaniem mierzalnym, to  $N' = f^*N$  jest procesem punktowym Poissona z miarą intensywności  $\mu' = f^*\mu$ .

*Dowód.* Zadanie. □

**Twierdzenie 4.19**

Założmy, że

$$N = \sum_k \delta_{X_k}$$

jest procesem punktowym Poissona z miarą intensywności  $\mu$ . Rozważmy ciąg elementów losowych  $Z_1, Z_2, \dots$  przestrzeni  $E'$  o wspólnym rozkładzie  $\nu$ . Wówczas proces punktowy na  $E \times E'$  dany przez

$$\sum_k \delta_{(X_k, Z_k)}$$

jest procesem punktowym Poissona z miarą intensywności  $\mu \otimes \nu$ .

**Twierdzenie 4.20**

Niech  $N$  będzie procesem Punktowym Poissona z intensywnością  $\mu$ . Założmy, że  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  będzie taką funkcją mierzalną, że

$$\int (1 - e^{f(x)}) \mu(dx) < \infty.$$

i rozważmy miarę probabilistyczną  $\hat{\mathbb{P}}$  zadaną przez

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \exp \left\{ N(f) - \mu(1 - e^f) \right\}.$$

Wówczas względem  $\widehat{\mathbb{P}}$  proces punktowy  $N$  jest procesem punktowym Poissona z miarą intensywności  $e^{f(x)}\mu(dx)$ .

*Dowód.* Wystarczy sprawdzić wzór Campbella. Oznaczając przez  $\widehat{\mathbb{E}}$  wartość oczekiwaną otrzymaną z prawdopodobieństwa  $\widehat{\mathbb{P}}$  piszemy

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}}[\exp\{-N(g)\}] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{N(f-g) - \mu\left(1 - e^f\right)\right\}\right] \\ &= \exp\left\{\int 1 - e^{f(x)-g(x)}\mu(dx) - \int 1 - e^{f(x)}\mu(dx)\right\} \\ &\quad \exp\left\{\int \left(1 - e^{-g(x)}\right)e^{f(x)}\mu(dx)\right\}.\end{aligned}$$

□

#### Twierdzenie 4.21 (Wzór Palma)

Rozważmy proces punktowy Poissona  $N$  z intensywnością  $\mu$ . Niech  $G: E \times M_p(E) \rightarrow [0, +\infty)$  będzie funkcją mierzalną. Wówczas dla dowolnej mierzalnej  $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

$$\mathbb{E}\left[\int f(x)G(x, N)N(dx)\right] = \int_E f(x)\mathbb{E}[G(x, \delta_x + N)]\mu(dx).$$

Rozważmy powyższy wzór dla  $f(x) = 1$  oraz  $G(x, m) = \mathbb{1}_{\{x=x_0\}}G_0(m)$ . Wówczas

$$\mathbb{E}[G(N)N(\{x_0\})] = \mathbb{E}[G_0(\delta_{x_0} + N)]\mu(\{x_0\}).$$

Jeżeli  $\mu(\{x_0\}) > 0$  to powyższy wzór oznacza, że względem nowej miary probabilistycznej  $d\widehat{\mathbb{P}} = N(\{x_0\})/\mu(\{x_0\})d\mathbb{P}$  proces  $N$  ma ten sam rozkład co  $N + \delta_{x_0}$  względem wyjściowej miary  $\mathbb{P}$ . Jeżeli natomiast  $\mu(\{x_0\}) = 0$ , to można pokazać, że  $\mathbb{P}[N(x_0) \leq 1] = 1$  (zadanie). Wówczas powyższy wzór jest interpretowany jako rozkład warunkowy  $N$  pod warunkiem, że  $N(x_0) = 0$ . Dokładniej

$$\mathbb{E}[G_0(N) \mid N(x_0) = 1] = \mathbb{E}[G_0(\delta_{x_0} + N)].$$

*Dowód.* Wystarczy uzasadnić wzór dla  $f = 1$  oraz  $G$  postaci

$$G(m) = \exp\left\{-\int_E g(x)m(dx)\right\}$$

dla pewnej mierzalnej  $g: E \rightarrow [0, +\infty)$ . Dokładne uzasadnienie, że wystarczają funkcje powyższej postaci wymaga nieco pracy. Można myśleć, że algebra w  $C(M_p)$  generowana przez powyższe funkcje rozdziały punkty i

ma miejsce zastosowanie wersja twierdzenia Stona-Weierstrassa (co formalnie nie jest prawdą, bo  $M_p$  nie jest zwarta).

Ze wzoru Campbella, dla każdego  $q > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ -q \int f(x) N(dx) \right\} G(N) \right] &= \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ - \int qf(x) + g(x) N(dx) \right\} \right] \\ &= \exp \left\{ - \int 1 - e^{-qf(x) - g(x)} \mu(dx) \right\}. \end{aligned}$$

Różniczkując względem  $q > 0$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int f(y) N(dy) \exp \left\{ -q \int f(x) N(dx) \right\} G(N) \right] \\ = \int f(x) e^{-qf(x) - g(x)} \mu(dx) \exp \left\{ - \int 1 - e^{-qf(x) - g(x)} \mu(dx) \right\}. \end{aligned}$$

Przechodząc teraz z  $q \rightarrow 0^+$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int f(y) N(dy) G(N) \right] \\ = \int f(x) e^{-g(x)} \mu(dx) \exp \left\{ - \int 1 - e^{-g(x)} \mu(dx) \right\}. \end{aligned}$$

Powołując się raz jeszcze na wzór Campbella widzimy, że prawa strona powyższego wzoru jest równa

$$\begin{aligned} \int f(x) e^{-g(x)} \mu(dx) \mathbb{E} [G(N)] &= \int f(x) e^{-g(x)} \mu(dx) \mathbb{E} \left[ e^{-\int g(y) N(dy)} \right] = \\ &= \int f(x) \mathbb{E} \left[ e^{-\int g(y) (N + \delta_x)(dy)} \right] \mu(dx) = \int f(x) \mathbb{E} [G(\delta_x + N)] \mu(dx). \end{aligned}$$

□

### 4.3 Procesy punktowe i losowe partycje

### 4.4 $\nu$ -topologia

Chcemy zbadać miary punktowe z punktu widzenia ich zbieżności. Przypomnijmy, że dla funkcji  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  jej nośnik definiujemy jako

$$\text{supp}(f) = \text{cl}\{x \in E : f(x) \neq 0\}.$$

**Definicja 4.22**

Dla przestrzeni topologicznej  $E$  oznaczają będziemy

$$C_K^+(E) = \{f: E \rightarrow \mathbb{R}_+ : f \text{ jest ciągła i ma zwarty nośnik}\}.$$

Funkcje z  $C_K^+(E)$  posłużą nam do testowania zbieżności miar punktowych.

**Definicja 4.23**

Powiemy, że ciąg  $\mu_n \in M_p(E)$  zbiega w  $v$  topologii do  $\mu \in M_p(E)$ , jeżeli dla każdej  $f \in C_K^+(E)$ ,

$$\int f(x)\mu_n(dx) \rightarrow \int f(x)\mu(dx).$$

Piszemy wówczas  $\mu_n \rightarrow^v \mu$ .

**Przykład 4.24**

Jeżeli  $\mu_n = \delta_{x_n}$  i  $\mu = \delta_x$ , to  $\mu_n \rightarrow^v \mu$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_n \rightarrow x$  w  $E$ .

**Lemat 4.25** (a) Niech  $K \subseteq E$  będzie zbiorem zwartym. Istnieje ciąg zbiorów zwartych  $K_n \downarrow K$  oraz nierosnący ciąg  $f_n \in C_K^+(E)$  taki, że

$$\mathbb{1}_K \leq f_n \leq \mathbb{1}_{K_n} \downarrow \mathbb{1}_K.$$

(b) Jeżeli  $G$  jest otwartym zbiorem warunkowo zwartym, to istnieją warunkowo zwarte otwarte zbiory  $G_n \uparrow G$  oraz funkcje  $f_n \in C_K^+(E)$  takie, że

$$\mathbb{1}_G \geq f_n \geq \mathbb{1}_{G_n} \uparrow \mathbb{1}_G.$$

*Dowód.* W dowodzie wykorzystamy fakt, że  $E$  jako lokalnie zwarta z przeliczalną bazą jest metryzowalna w sposób zupełny. Oznaczmy przez  $\rho$  wspomnianą metrykę. Niech  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  będą otwartymi, warunkowo zwartymi zbiorami takimi, że  $B_k \uparrow E$ . Jeżeli  $K$  jest zwartym podzbiorem  $E$ , to  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  stanowi jego otwarte pokrycie. Stąd istnieje  $k_0 \in \mathbb{N}$  takie, że  $K \subseteq B_{k_0}$ . Dodatkowo  $\rho(K, B_{k_0}^c) > 0$ . Niech  $\epsilon \in (0, \rho(K, B_{k_0}^c))$ . Dla  $\delta > 0$  rozważmy domkniętą  $\delta$ -otoczkę  $K$  daną przez

$$K^\delta = \{y \in E : \rho(K, y) \leq \delta\}.$$

Dla  $n \in \mathbb{N}$  takich, że  $1/n < \epsilon$  niech  $K_n = K^{1/n}$ . Zauważmy, że

$$K_n \subseteq B_{k_0} \subseteq \text{cl}(B_{k_0}).$$

Skoro ostatni zbiór jest zwarty, bo  $K_n$  jako jego domknięty podzbiór również. Dodatkowo  $K_n \downarrow K$ .

Rozważmy funkcję  $f_n$  daną przez

$$f_n(x) = 1 - (n\rho(K, x)) \wedge 1.$$

Wówczas  $0 \leq f_n \leq 1$  oraz  $\text{supp}(f) = K_n$  a co za tym idzie  $f_n \in C_K^+(E)$ . To w szczególności pokazuje, że  $f_n \leq \mathbb{1}_{K_n}$ . Aby pokazać, że  $\mathbb{1}_K \leq f_n$  wystarczy zauważyć, że dla  $x \in K$ ,  $f_n(x) = 1$ .

Jeżeli  $G$  jest otwarty i warunkowo zwarty, to rozważamy

$$G_n = \dots$$

□

Przy pomocy powyższego lematu można uzasadnić wersję Twierdzenia Portmantou dla  $v$ -zbieżności

#### Twierdzenie 4.26

Niech  $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$  będzie ciągiem z  $M_p(E)$ . Wówczas następujące warunki są równoważne

- (i)  $\mu_n \rightarrow^v \mu$
- (ii)  $\mu_n(B) \rightarrow \mu(B)$  dla wszystkich warunkowo zwartych  $B$  takich, że  $\mu(\partial B) = 0$ .
- (iii) Dla wszystkich zwartych  $K$  i otwartych, warunkowo zwartych  $G$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(K) \leq \mu(K), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G).$$

*Dowód.* (i)  $\rightarrow$  (iii) Jeżeli  $K$  jest zwarty, to z Lematu 4.25 istnieje ciąg zbiorów zwartych  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  i funkcji  $f_n$  z  $C_K^+(E)$  takie, że

$$\mathbb{1}_K \leq f_n \leq \mathbb{1}_{K_n} \downarrow \mathbb{1}_K.$$

Stąd dla każdego ustalonego  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(K) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(f_m) = \mu(f_m)$$

Przechodząc teraz z  $m \rightarrow \infty$  otrzymujemy pierwszą część tezy. Drugą uzasadniamy z podobny sposób.

(iii)  $\rightarrow$  (ii) Niech  $B$  będzie warunkowo zwartym zbiorem takim, że  $\mu(\partial B) = 0$ . Skoro  $\text{int}(B) \subseteq B \subseteq \text{cl}(B)$  to

$$\begin{aligned} \mu(\text{int}(B)) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\text{int}(B)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B) \leq \\ &\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\text{cl}(B)) \leq \mu(\text{cl}(B)). \end{aligned}$$

Skoro  $\mu(\partial B) = 0$ , to skrajne wyrazy powyższego ciągu nierówności są sobie równe.

(ii)  $\rightarrow$  (i) Jak w dowodzie Twierdzenia Portmantou □

#### Twierdzenie 4.27

W przestrzeni  $M_p(E)$  można wprowadzić metrykę  $\rho$  taką, że  $(M_p(E), \rho)$  jest ośrodkową przestrzenią zupełną. Dodatkowo  $m_n \rightarrow^v M$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\rho(m_n, m) \rightarrow 0$ .

*Szkic dowodu.* Metryzację  $M_p(E)$  przeprowadzamy w standardowy sposób. Najpierw należy pokazać, że istnieje przeliczalna kolekcja  $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  funkcji  $h_j \in C_K^+(E)$  taka, że  $\mu_n \rightarrow^v \mu$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mu_n(h_j) = \int h_j(x) \mu_n(dx) \rightarrow \mu(h_j) = \int h_j(x) \mu(dx)$$

dla każdego  $j \in \mathbb{N}$ . Innymi słowy  $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  stanowi klasę testującą zbieżność w  $v$ -topologii. Wówczas metrykę na  $M_p(E)$  zadajemy wzorem

$$\rho(\mu, \nu) = \sum_{j=1}^{\infty} (|\mu(h_j) - \nu(h_j)| \wedge 1) 2^{-j}$$

□

#### Twierdzenie 4.28

Zbiór  $M \subseteq M_p(E)$  jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej  $f \in C_K^+(E)$ ,

$$\sup_{m \in M} m(f) < \infty.$$

*Dowód.* Załóżmy, że  $M$  jest warunkowo zwarty. Wówczas  $\sup_{m \in M} m(f) < \infty$  wynika z ciągłości  $m \mapsto m(f)$ . Załóżmy teraz, że dla każdej  $f \in C_K^+(E)$ , zbiór

$$I_f = \left[ 0, \sup_{f \in M} m(f) \right]$$

jest zwarty. Stąd zbiór

$$I = \prod_{f \in C_K^+(E)} I_f$$

jest zwartym podzbiorem  $\mathbb{R}^{C_K^+(E)}$ . Przestrzeń  $M_p(E)$  wkłada się w  $\mathbb{R}^{C_K^+(E)}$ . Dokładniej każde  $m \in \text{cl}(M)$  można jednoznacznie utożsamić z  $T(m) = \{m(f)\}_{f \in M} \in I$ . To włożenie jest dodatkowo ciągłe, ponieważ  $m_n \rightarrow m$  w  $M_p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $m_n(f) \rightarrow m(f)$  dla każdego  $f \in C_K^+(E)$ , czyli  $T(m_n) \rightarrow T(m)$  w  $\mathbb{R}^{C_K^+(E)}$ . Oznacza to, że  $\text{cl}(M)$  i  $T[\text{cl}(M)]$  są homeomorficzne. Zwartość  $\text{cl}(M)$  wynika ze zwartości  $T[\text{cl}(M)]$  jako domkniętego podzbioru przestrzeni zwartej  $I$ .  $\square$

#### Twierdzenie 4.29

Rodzina rozkładów procesów punktowych  $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciasna w  $M_p(E)$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej  $f \in C_K^+(E)$  rodzina zmiennych losowych  $\{N_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciasna w  $\mathbb{R}$ .

*Dowód.* Załóżmy, że  $\{N_n(f)\}_n$  jest ciasna w  $\mathbb{R}$  dla każdego  $f \in C_K^+(E)$ . Wybierzmy ciąg  $g_j \in C_K^+(E)$  taki, że  $g_j \uparrow 1$ . Skoro dla każdego  $j \in \mathbb{N}$  rodzina  $\{N_n(g_j)\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciasna w  $\mathbb{R}$ , to dla każdego  $\epsilon > 0$  i każdego  $j \in \mathbb{N}$  istnieje stała  $c_j > 0$  taka, że

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[N_n(g_j) > c_j] \leq \epsilon 2^{-j-1}.$$

Rozważmy zbiór

$$M = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{\mu \in M_p : \mu(g_j) \leq c_j\}.$$

Zbiór ten jest warunkowo zwarty w  $M_p$ , bo

$$\sup_{m \in M} m(f) < \infty.$$

Zauważmy, że dla każdego  $n$ ,

$$\mathbb{P}[N_n(f) \notin \text{cl}(M)] \leq \mathbb{P}[N_n \notin M] \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}[N_n(g_j) > c_j] \leq \epsilon.$$

Czyli  $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciasna w  $M_p$ . Implikację przeciwną pozostawiamy jako zadanie.  $\square$

**Twierdzenie 4.30**

Dla procesów punktowych  $N, \{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , Następujące warunki są równoważne

- (i)  $N_n \Rightarrow N$  w  $M_p(E)$
- (ii)  $\psi_{N_n}(f) \rightarrow \psi_N(f)$  dla każdej  $f \in C_K^+(E)$
- (iii)  $N_n(f) \Rightarrow N(f)$  w  $\mathbb{R}$  dla każdej  $f \in C_K^+(E)$ .

*Dowód.* (i)  $\rightarrow$  (ii) Dla  $f \in C_K^+(E)$  funkcja  $F: M_p \rightarrow \mathbb{R}$  zadana przez  $F(m) = e^{-m(f)}$  jest ciągła i ograniczona. Odwołując się do definicji słabej zbieżności miar probabilistycznych na przestrzeniach metrycznych widzimy, że

$$\psi_{N_n}(f) = \mathbb{E}[\exp\{-N_n(f)\}] = \mathbb{E}[F(N_n)] \rightarrow \mathbb{E}[F(N)] = \psi_N(f).$$

(ii)  $\rightarrow$  (iii) Dla dowolnej  $f \in C_K^+(E)$  testujemy zbieżność transformat Laplacea zmiennych  $N_n(f)$ :

$$\mathbb{E} \left[ e^{-sN_n(f)} \right] = \mathbb{E} \left[ e^{-N_n(sf)} \right] = \psi_{N_n}(sf) \rightarrow \Psi_N(sf) = \mathbb{E} \left[ e^{-sN(f)} \right].$$

(iii)  $\rightarrow$  (i) Dla każdej  $f \in C_K^+(E)$  ciąg  $\{N_n(f)\}$  jest ciasny w  $\mathbb{R}$ . Stąd  $\{N_n\}$  jest ciasny w  $M_p$ . Z dowolnego ciągu elementów  $\{N_{n_k}\}$  możemy wybrać podciąg  $\{N_{n_{k_j}}\}_j$  zbieżny do pewnego  $\tilde{N}$ . Stąd

$$N_{n_{k_j}}(f) \Rightarrow \tilde{N}(f)$$

dla każdego  $f \in C_K^+(E)$ . Wobec naszego założenia  $N(f)$  i  $\tilde{N}(f)$  mają ten sam rozkład. Skoro transformaty Laplacea rozróżniają rozkłady na  $M_p$ , to  $N$  i  $\tilde{N}$  mają ten sam rozkład. Oznacza to, że z każdego ciągu elementów  $\{N_{n_k}\}_k$  możemy wybrać podciąg  $\{N_{n_{k_j}}\}_j$  słabo zbieżny do  $N$ . jest to równoważne  $N_n \Rightarrow N$ .  $\square$

Powyższe twierdzenie daje wygodne kryterium słabej zbieżności w  $M_p$ . Następne twierdzenie posłuży nam do omówienia konkretnego przykładu

**Twierdzenie 4.31**

Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  będzie kolekcją niezależnych, jednakowo rozłożonych losowych elementów  $E$ . Załóżmy, że

$$n\mathbb{P}[X_{n,1} \in \cdot] \rightarrow^{\nu} \mu(\cdot)$$

dla pewnej miary Radona  $\mu$ . Wówczas

$$N_n \sum_{j=1}^n \delta_{X_{n,j}} \Rightarrow N,$$

gdzie  $N$  jest Procesem punktowym Poissona z miarą intensywności  $\mu$ .

*Dowód.* Dla  $f \in C_K^+(E)$  mamy

$$\begin{aligned}\Psi_{N_n}(f) &= \left( \mathbb{E}[e^{f(X_{n,1})}] \right)^n = \left( 1 - \frac{1}{n} \int 1 - e^{-f(x)} n \mathbb{P}[X_{n,1} \in dx] \right)^n \\ &\rightarrow \exp \left\{ - \int 1 - e^{-f(x)} \mu(dx) \right\} = \psi_N(f).\end{aligned}$$

□

### Przykład 4.32

Dla  $n \in \mathbb{N}$  rozważmy niezależne zmienne  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Chcemy zbadać asymptotyczne zachowanie ekstremalnych statystyk pozycyjnych

$$Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \dots \leq Y_{n:n}.$$

Tutaj  $Y_{1:n} = \min_{j \leq n} Y_j$  oraz  $Y_{n:n} = \max_{j \leq n} Y_j$  oraz  $Y_{n-1:n}$  jest drugą po  $Y_{n:n}$  największą wartością w  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ . Dla ustalenia uwagi założmy, że  $Y_j$  mają rozkład o gęstości

$$C_\alpha t^{-\alpha-1} \log(t+1), \quad t, \alpha > 0.$$

Tutaj  $C_\alpha$  jest stałą normującą. Rozważmy zmienne

$$X_{n,j} = \left( \frac{n}{\log(n)} \right)^{-1/\alpha} Y_j$$

Wówczas

$$n \mathbb{P}[X_{n,j} \in dt] \rightarrow C_\alpha / \alpha t^{-\alpha-1} dt.$$

Rzeczywiście, dla każdej  $f \in C_K^+((0, \infty])$ ,

$$\begin{aligned}\int f(t) n \mathbb{P}[X_{n,j} \in dt] &= n \mathbb{E}[f(X_{n,1})] = n \mathbb{E}[f(Y_1/n^{1/\alpha})] \\ &= n \int_0^\infty f(t/n^{1/\alpha}) C_\alpha t^{-\alpha-1} \log(n)^{-1} \log(yn^{1/\alpha} \log(n)^{-1/\alpha} + 1) dt \\ &\rightarrow \int_0^\infty f(y) \frac{1}{\alpha} C_\alpha y^{-\alpha-1} dy.\end{aligned}$$

Ostatnie przejście jest oczywiste, jeżeli nośnik  $f$  jest ograniczony. W przeciwnym wypadku wymagane jest nieco pracy. W szczególności więc

$$N_n = \sum_{j=1}^n \delta_{X_{n,j}} \Rightarrow N$$

gdzie  $N$  jest  $PPP(\mu)$ . Zauważmy teraz, że powyższe daje informacje o słabej zbieżności  $Y_{n:n}$ . Mianowicie

$$\mathbb{P}[Y_{n:n} > tn^{1/\alpha} \log(n)^{-\alpha} < t] = \mathbb{P}[N_n(t, +\infty) = 0]$$

Zauważmy,  $\mathbb{P}[N\{t\} \geq 1] = 0$ . Stąd dla funkcji  $h(m) = m(t, \infty)$  widzimy, że  $\mathbb{P}[N \in D_h] = 0$ . Z Twierdzenia o odwzorowaniu ciągłym

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y_{n:n} > tn^{1/\alpha} \log(n)^{-\alpha} < t] &= \mathbb{P}[N_n(t, +\infty) = 0] \\ &\rightarrow \mathbb{P}[N(t, \infty) = 0] = e^{-\mu(t, \infty)}, \end{aligned}$$

bo zmienna  $N(t, \infty)$  ma rozkład Poissona z intensywnością  $\mu$ . Oznacza to, że

$$\left(\frac{n}{\log(n)}\right)^{1/\alpha} Y_{n:n} \Rightarrow F,$$

gdzie zmienna  $F$  ma rozkład Frecheta

$$\mathbb{P}[F \leq t] = \exp\{-C_\alpha t^{-\alpha}/\alpha^2\}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y_{n-1:n} < n^{1/\alpha} \log(n)^{-\alpha} t] &= \mathbb{P}[N_n(t, +\infty) \leq 1] \\ &\rightarrow \mathbb{P}[N(t, \infty) \leq 1] = e^{-\mu(t, \infty)} (1 + \mu(t, \infty)) \end{aligned}$$

oraz ogólnie

$$\mathbb{P}[Y_{n-j:n} \leq n^{1/\alpha} \log(n)^{-1/\alpha} t] \rightarrow H_j(t) = e^{-\mu(t, \infty)} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\mu(t, \infty)^k}{k!}$$

Oznacza to to, że

$$\left(\frac{n}{\log(n)}\right)^{1/\alpha} Y_{n-j:n} \Rightarrow F_j,$$

gdzie  $F_j$  jest zmienną losową o dystrybucji  $H_j$ .

### Twierdzenie 4.33

Załóżmy, że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  elementy losowe  $\{X_{n,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  w  $E$  są niezależne z tym samym rozkładem. Rozważmy proces punktowy

$$N_n = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{(j/n, X_{n,j})}$$

Załóżmy, że dla pewnej miary Radona  $\mu$ ,

$$n\mathbb{P}[X_{n,i} \in \cdot] \rightarrow^v \mu(\cdot).$$

Wówczas  $N_n \Rightarrow N$  w  $M_p([0, +\infty) \times E)$ , gdzie  $N$  jest procesem punktowym Poissona z miarą intensywności  $d\mu(udx)$ .

## Funkcje Càdlàg

---

**Streszczenie** W tym rozdziale

### 5.1 Rozkłady stabilne

Jeżeli  $X_1, X_2, \dots$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie i  $\mathbb{E}[X_1] = 0$ ,  $\mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2 < \infty$ , to

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Co się dzieje w przypadku, gdy  $\mathbb{E}[X_1^2] = \infty$ ? Przypuśćmy, że  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne i mają ten sam rozkład taki, że

$$\mathbb{P}[X_1 > t] = t^{-\alpha}/2, \quad \mathbb{P}[X_1 \leq -t] = t^{-\alpha}/2, \quad t > 1, \quad \alpha \in (0, 2).$$

Warto zauważyć, że jeżeli  $\alpha > 2$  w powyższym wzorze, to  $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$  co sprowadzałoby nas raz jeszcze do centralnego twierdzenia granicznego. Przypomnijmy, że proces punktowy

$$\sum_{k=1}^n \delta_{n^{-1/\alpha} X_k}$$

zbiega słabo w  $M_p((0, +\infty])$  do procesu punktowego Poissona  $N_\infty$  z miarą intensywności  $\alpha|x|^{-\alpha+1}dx/2$ . Dla  $\epsilon > 0$  rozważmy  $T: M_p(E) \rightarrow \mathbb{R}$  zadany przez

$$Tm = \int_{[-\infty, -\epsilon] \cup [\epsilon, +\infty]} x m(dx).$$

Dla  $\epsilon \in (0, 1)$  rozważmy ciągłą funkcję  $f_\epsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że  $f_\epsilon(x) = x$  dla  $|x| \in [\epsilon, 1/\epsilon)$ ,  $f_\epsilon(x) = 0$  dla  $|x| \in (0, \epsilon/2) \cup (1/(2\epsilon), \infty)$ . Skoro  $f_\epsilon \in C_K(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ , to

$$\int f_\epsilon(x) N_n(dx) \Rightarrow \int f_\epsilon(x) N_\infty(dx).$$

Ze wzoru Campbella znajdujemy funkcję charakterystyczną ostatniej zmiennej

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ \exp \left\{ it \int f_\epsilon(x) N_\infty(dx) \right\} \right] &= \exp \left\{ \int \left( 1 - e^{itf_\epsilon(x)} \right) \alpha |x|^{-\alpha+1} dx / 2 \right\} \\ &= \exp \left\{ \int \left( 1 - \cos(tf_\epsilon(x)) \right) \alpha |x|^{-\alpha+1} dx \right\}.\end{aligned}$$

Zauważmy, że ostatnie wyrażenie, przy  $\epsilon \rightarrow 0^+$  zbiega do

$$\begin{aligned}\exp \left\{ \int_0^\infty \left( 1 - \cos(tx) \right) \alpha |x|^{-\alpha+1} dx \right\} &= \\ \exp \left\{ \int \left( 1 - e^{itx} \right) \alpha |x|^{-\alpha+1} dx / 2 \right\} &= \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ it \int x N_\infty(dx) \right\} \right].\end{aligned}$$

Oznacza to, że przy  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ,

$$\int f_\epsilon(x) N_\infty(dx) \Rightarrow \int x N_\infty(dx).$$

Powyższe rozważania przybliżają nas do celu, ponieważ

$$\begin{aligned}\left| n^{-1/\alpha} S_n - \int f_\epsilon(x) N_n(dx) \right| &\leq \\ 2n^{-1/\alpha} \sum_{k=1}^n X_k \mathbb{1}_{\{|X_k| \leq \epsilon n^{1/\alpha}\}} + 2n^{-1/\alpha} \sum_{k=1}^n X_k \mathbb{1}_{\{|X_k| > n^{1/\alpha}/(2\epsilon)\}} & \\ &= 2n^{-1/\alpha} S_n(\epsilon) + 2n^{-1/\alpha} R_n(\epsilon).\end{aligned}$$

Pozostaje pokazać, że zmienne występujące po prawej są zaniedbywane.

Dla zmiennej  $X(\epsilon) = X \mathbb{1}_{\{|X| \leq \epsilon n^{1/\alpha}\}}$  mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ X(\epsilon)^2 \right] &= \int_0^{\epsilon n^{1/\alpha}} 2y \mathbb{P}[\epsilon n^{1/\alpha} > X > y] dy \\ &= \int_0^1 2y dy + 2 \int_1^{\epsilon n^{1/\alpha}} y^{1-\alpha} dy \\ &= 1 + \frac{2}{2-\alpha} \left( \epsilon^{2-\alpha} n^{2/\alpha-1} - 1 \right) \leq \frac{2\epsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha} n^{2/\alpha-1}.\end{aligned}$$

Stąd, dla  $S_n(\epsilon) = \sum_{k=1}^n X_k \mathbb{1}_{\{|X_k| \leq \epsilon n^{1/\alpha}\}}$  mamy

$$\mathbb{E}[S_n(\epsilon)^2 / n^{2/\alpha}] \leq \frac{2\epsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha} \rightarrow 0$$

przy  $\epsilon \rightarrow 0$ . Powyższe argumenty dają

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ |S_n(\epsilon)| > \delta n^{1/\alpha} \right] = 0.$$

Z drugiej strony przy  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[R_n(\epsilon) > 0] &\leq \mathbb{P}[N_n(-\infty, -1/(2\epsilon)) \cup (1/(2\epsilon), \infty) > 0] \\ &\rightarrow \mathbb{P}[N_\infty(-\infty, -1/(2\epsilon)) \cup (1/(2\epsilon), \infty) > 0], \end{aligned}$$

a przy  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ,

$$\mathbb{P}[N_n(-\infty, -1/(2\epsilon)) \cup (1/(2\epsilon), \infty) > 0] = 1 - e^{-2 \int_{1/(2\epsilon)}^{\infty} \alpha t^{-\alpha-1} dt} \rightarrow 0.$$

Czyli dla każdej  $\delta > 0$ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ |R_n(\epsilon)| > \delta n^{1/\alpha} \right] = 0.$$

Oznacza, to że

$$n^{-1/\alpha} S_n \Rightarrow \int x N_\infty(dx) = L_\alpha.$$

### Twierdzenie 5.1

Założmy, że  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne i mają ten sam rozkład taki, że

$$\mathbb{P}[X_1 > t] = t^{-\alpha}/2, \quad \mathbb{P}[X_1 \leq -t] = t^{-\alpha}/2, \quad t > 1, \quad \alpha \in (0, 2).$$

Wówczas

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n^{1/\alpha}} \Rightarrow L_\alpha,$$

gdzie  $L_\alpha$  jest zmienną losową o funkcji charakterystycznej

$$\varphi_{L_\alpha}(t) = \exp \left\{ \int \left( 1 - e^{itx} \right) \alpha |x|^{-\alpha+1} dx / 2 \right\}.$$

Zauważmy, że przez podstawienie

$$\int \left( 1 - e^{itx} \right) \alpha |x|^{-\alpha+1} dx / 2 = t^\alpha \int \left( 1 - e^{ix} \right) \alpha |x|^{-\alpha+1} dx / 2$$

Przez rachunek na funkcjach charakterystycznych można pokazać, że jeżeli  $L'_\alpha$  oznaczmy niezależną kopię  $L_\alpha$ , to

$$L_\alpha + L'_\alpha \stackrel{d}{=} 2^{1/\alpha} L_\alpha.$$

Takie rozkłady nazywamy  $\alpha$ -stabilnymi.

## 5.2 Przestrzeń Skorochoda

Chcielibyśmy uzyskać funkcjonalną wersję ostatniego twierdzenia. Okazuje się jednak, że przestrzeń  $C[0, 1]$  jest w tym celu zbyt mała. Jeżeli rozważymy  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne i mają ten sam rozkład taki, że

$$\mathbb{P}[X_1 > t] = t^{-\alpha}/2, \quad \mathbb{P}[X_1 \leq -t] = t^{-\alpha}/2, \quad t > 1, \quad \alpha \in (0, 2)$$

oraz ciąg funkcji

$$Z_n(t) = n^{-1/\alpha} S_{[tn]} + \{tn\} n^{-1/\alpha} X_{[tn]+1}.$$

To ciąg rozkładów  $Z_n$  nie jest warunkowo zwarty w  $C[0, 1]$  (zadanie).

### Definicja 5.2

Przestrzenią Skorochoda nazywamy zbiór  $D[0, 1]$  funkcji  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  takich, że

- (i) Dla każdego  $t \in [0, 1)$ ,  $f(t+) = \lim_{s \rightarrow t+} f(s)$ .
- (ii) Dla każdego  $t \in [0, 1)$ ,  $\lim_{s \rightarrow t-} f(s)$  istnieje.

Funkcje  $f \in D[0, 1]$  nazywamy funkcjami càdlàg (jest to akronim z języka francuskiego "continue à droite, limite à gauche").

### Przykład 5.3

Każda funkcja ciągła jest càdlàg ( $C[0, 1] \subseteq D[0, 1]$ ). Funkcja  $f(t) = \mathbb{1}_{[0, 1/2)}(t)$  jest w  $D[0, 1] \setminus C[0, 1]$ .

Chcemy rozwinąć teorię słabej zbieżności w  $D[0, 1]$  analogiczną do tej rozwiniętej dla  $C[0, 1]$ . Dla  $x \in D[0, 1]$  oraz  $T \subseteq [0, 1]$  definiujemy

$$\omega_x(T) = \sup_{t, s \in T} |x(t) - x(s)|.$$

### Lemat 5.4

Dla każdej  $x \in D[0, 1]$  i każdego  $\epsilon > 0$  istnieje  $k$  oraz punkty  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$  takie, że

$$\omega_x[t_{j-1}, t_j] < \epsilon.$$

*Dowód.* Ustalmy  $\epsilon > 0$ . Rozważmy  $T$  będące zbiorem wszystkich  $t \in [0, 1]$  dla których odcinek  $[0, t]$  dla których istnieje  $n \in \mathbb{N}$  oraz  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t$  takie, że

$$\omega_x[t_{j-1}, t_j] < \epsilon.$$

Niech  $t^* = \sup T$ . Skoro  $x(t^* -)$  istnieje, to  $t^* \in T$ . Załóżmy nie wprost, że  $t^* < 1$ . Z prawostronnej ciągłości  $x$  w  $t^*$  wynika, że istnieje  $\delta > 0$  taka, że  $\omega_x[t^*, t^* + \delta] < \epsilon$ . To przeczy wyborowi  $t^*$  i kończy dowód.  $\square$

Z powyższego lematu, dla każdego  $\epsilon > 0$  zbiór  $\{t \in [0,1] : |x(t) - x(t-)| > \epsilon\}$  jest skończony. Zbiór punktów nieciągłości każdej  $x \in D[0,1]$  jest zatem przeliczalny. Dodatkowo każda funkcja  $x \in D[0,1]$  może być przybliżana jednostajnie przez funkcje postaci

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{[t_{k-1}, t_k)}(t)$$

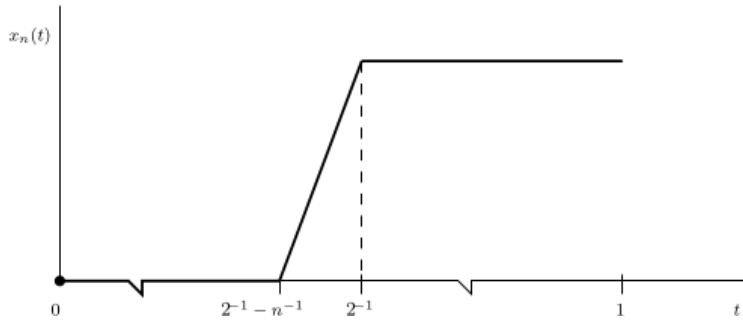
dla  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  oraz  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ . Wszystkie funkcje z  $D[0,1]$  są zatem mieralne.

### 5.2.1 Metryka Skorochoda $J_1$

Chcielibyśmy wprowadzić w  $D[0,1]$  metrykę w której ciąg funkcji ciągłych

$$x_n(t) = n(t - 1/2 + 1/n) \mathbb{1}_{[1/2 - 1/n, 1/2)}(t) + \mathbb{1}_{[1/2, 1]}(t)$$

zbiegały do funkcji schodkowej  $x(t) = \mathbb{1}_{[1/2, 1]}(t)$ . Poradzimy sobie z pro-



blemem skoku przez dylatację czasową.

#### Definicja 5.5

Przez  $\Lambda$  oznaczamy będziemy zbiór ciągłych, ściśle rosnących funkcji  $\lambda: [0,1] \rightarrow [0,1]$  takich, że  $\lambda(0) = 0$  oraz  $\lambda(1) = 1$ .

Przez  $I$  oznaczamy będziemy funkcję  $I: [0,1] \rightarrow [0,1]$ ,  $I(x) = x$ . Przypomnijmy, że dla funkcji  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiujemy

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

**Definicja 5.6**

Dla  $x, y \in D[0, 1]$  definiujemy

$$d_{J_1}(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} (\|\lambda - I\|_\infty \vee \|x - y \circ \lambda\|_\infty).$$

Topologię na  $D[0, 1]$  wprowadzoną przez  $d_{J_1}$  nazywamy topologią  $J_1$  Skorochoda.

Nazwa topologii  $J_1$  może w czytelniku budzić pewne obawy. Sugeruje ona bowiem istnienie topologii  $J_2$ . Nie będziemy się nią jednak zajmować. Oczywiście należy upewnić się, że  $d$  rzeczywiście jest metryką na  $D[0, 1]$ . Symetryczność  $d$  wynika z tego, że jeżeli  $\lambda \in \Lambda$ , to  $\lambda^{-1} \in \Lambda$ ,

$$\|\lambda - I\|_\infty = \|\lambda^{-1} - I\|_\infty \quad \text{oraz} \quad \|x - y \circ \lambda\|_\infty = \|y - x \circ \lambda^{-1}\|_\infty.$$

Aby uzasadnić nierówność trójkąta ustalmy  $x, y, z \in D[0, 1]$  oraz  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ . Mamy

$$\begin{aligned} \|\lambda_1 \circ \lambda_2 - I\|_\infty &\leq \|\lambda_1 \circ \lambda_2 - \lambda_2\|_\infty + \|\lambda_2 - I\|_\infty \\ &= \|\lambda_1 - I\|_\infty + \|\lambda_2 - I\|_\infty \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \|x - y \circ \lambda_1 \circ \lambda_2\|_\infty &\leq \|x - z \circ \lambda_2\|_\infty + \|z \circ \lambda_2 - y \circ \lambda_1 \circ \lambda_2\|_\infty \\ &= \|x - z \circ \lambda_2\|_\infty + \|z - y \circ \lambda_1\|_\infty. \end{aligned}$$

Korzystając teraz z nierówności

$$(a + b) \vee (a + \beta) \leq (a \vee a) + (b \vee \beta)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|\lambda_1 \circ \lambda_2 - I\|_\infty \vee \|x - z \circ \lambda_1 \circ \lambda_2\|_\infty &\leq \\ &(\|\lambda_2 - I\|_\infty \vee \|x - z \circ \lambda_2\|_\infty) + (\|\lambda_1 - I\|_\infty \vee \|z - y \circ \lambda_1\|_\infty). \end{aligned}$$

Skoro  $\lambda_1 \circ \lambda_2 \in \Lambda$ , to ostatnia nierówność pociąga

$$d_{J_1}(x, z) \leq (\|\lambda_2 - I\|_\infty \vee \|x - z \circ \lambda_2\|_\infty) + (\|\lambda_1 - I\|_\infty \vee \|z - y \circ \lambda_1\|_\infty)$$

a to z kolei

$$d_{J_1}(x, z) \leq d_{J_1}(x, y) + d_{J_1}(y, z).$$

**Przykład 5.7**

Niech  $x_n(t) = (1 + 1/n)\mathbb{1}_{[1/2+1/n,1]}(t)$  dla  $n \geq 3$  oraz  $x(t) = \mathbb{1}_{[1/2,1]}(t)$ . Rozważając kawałkami liniową  $\lambda_n$  taką, że  $\lambda_n(1/2 + 1/n) = 1/2$ ,  $\lambda_n(0) = 0$  i  $\lambda_n(1) = 1$  otrzymujemy element  $\Lambda$ . Zauważmy, że

$$x \circ \lambda_n(t) = \mathbb{1}_{[1/2+1/n,1]}(t)$$

a co za tym idzie

$$\|\mathbf{I} - \lambda_n\| \vee \|x_n - x \circ \lambda_n\|_\infty = 1/n$$

Z drugiej strony, dla dowolnego  $\lambda \in \Lambda$ ,  $|x_n(1) - x \circ \lambda_n(1)| = 1/n$ . To pokazuje, że  $d_{J_1}(x, x_n) = 1/n$ .

**Fakt 5.8**

Jeżeli  $x_m, x \in D[0,1]$  oraz  $x_n \rightarrow x$  w  $J_1$ , to dla każdego  $t \in [0,1]$  istnieją  $t_n \rightarrow t$  takie, że

$$x_n(t) \rightarrow x(t) \quad \text{oraz} \quad x_n(t_n^-) \rightarrow x(t^-).$$

*Dowód. Zadanie.* □

**Przykład 5.9**

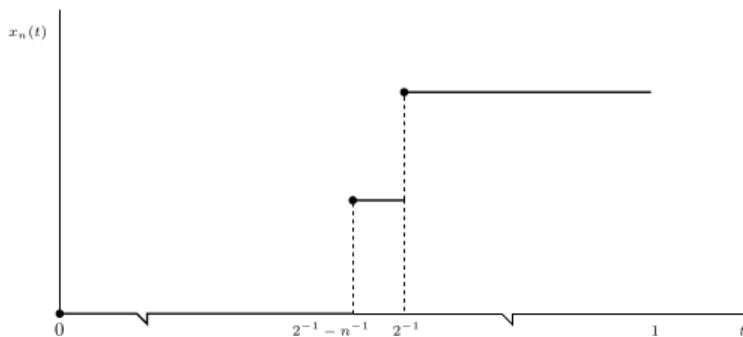
Rozważmy przytoczone wcześniej funkcje  $x(t) = \mathbb{1}_{[1/2,1]}(t)$

$$x_n(t) = n(t - 1/2 + 1/n)\mathbb{1}_{[1/2-1/n,1/2)}(t) + \mathbb{1}_{[1/2,1]}(t).$$

Skoro  $x_n$  są ciągłe, to z powyższego faktu nie może być prawdą, że  $x_n$  zbiega do  $x$  w  $J_1$ .

**Przykład 5.10**

Jeżeli  $x = \mathbb{1}_{[1/2,1]}$  oraz  $x_n = 1/2\mathbb{1}_{[1/2-1/n,1/2)} + \mathbb{1}_{[1/2,1]}$ , to również  $x_n$  nie zbiegają do  $x$  w  $J_1$ .



### 5.2.2 Metryka Skorochoda $M_1$

W niektórych zastosowaniach metryka  $J_1$  okazuje się zbyt mocna. Wówczas można uciec się do nieco słabszej topologii  $M_1$ . Aby ją zdefiniować rozważmy  $x \in D[0, 1]$  i jej uzupełniony wykres

$$\Gamma_x = \{(t, z) : z = \alpha x(t^-) + (1 - \alpha)x(t) \text{ dla pewnego } \alpha \in [0, 1]\}.$$

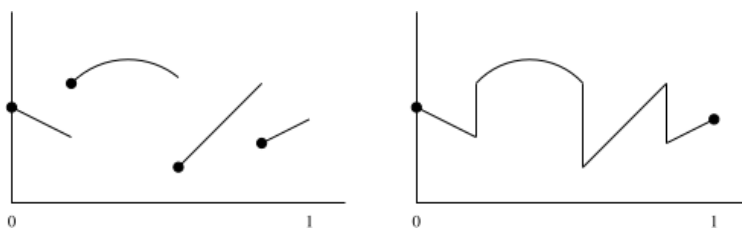
Przez  $\Pi(x)$  rozważmy zbiór wszystkich paramilitaryzacji  $\Gamma_x$ , czyli funkcji  $t \mapsto (r(t), u(t)), [0, 1] \rightarrow \Gamma_x$  będących ciągłymi bijekcjami.

#### Definicja 5.11

Dla  $x, y \in D[0, 1]$  definiujemy

$$d_{M_1}(x, y) = \inf_{(r_x, u_x) \in \Pi(x), (r_y, u_y) \in \Pi(y)} (\|u_x - u_y\|_\infty \vee \|r_x - r_y\|_\infty).$$

Topologię na  $D[0, 1]$  daną przez metrykę  $d_{M_1}$  nazywamy topologią  $M_1$  Skorochoda.



**Rysunek 5.1.** Przykładowa funkcja  $x$  (po lewej) wraz z uzupełnionym wykresem  $\Gamma_x$  (po prawej)

#### Przykład 5.12

Rozważmy funkcje  $x(t) = \mathbb{1}_{[1/2, 1]}(t)$ ,

$$x_n(t) = n(t - 1/2 + 1/n)\mathbb{1}_{[1/2 - 1/n, 1/2)}(t) + \mathbb{1}_{[1/2, 1]}(t).$$

Wówczas  $x_n \rightarrow x$  w  $M_1$ .

### 5.2.3 Własności topologii $J_1$

#### Przykład 5.13

Dodawanie nie jest ciągłe w  $D[0, 1]$ . niech  $x = -y = \mathbb{1}_{[1/2, 1]}$  oraz

$$x_n = \mathbb{1}_{[1/2 - 1/n, 1]} \quad \text{oraz} \quad y_n = -\mathbb{1}_{[1/2 + 1/n, 1]}$$

Wówczas  $x + y = 0$  oraz

$$x_n + y_n = \mathbb{1}_{[1/2-1/n, 1/2+1/n]}.$$

**Przykład 5.14**

Przestrzeń  $D[0, 1]$  z metryką  $d_{J_1}$  nie jest przestrzenią zupełną. Rozważmy  $x_n = \mathbb{1}_{[0, 2^{-n}]}$ . Rozważmy  $\lambda_n \in \Lambda$  takie, że  $\lambda_n(2^{-n}) = 2^{-n-1}$  i liniowe poza tym. Wówczas

$$\|x_{n+1} \circ \lambda_n - x_n\|_\infty = 0, \quad \|\mathbb{I} - \lambda_n\|_\infty = 2^{-n-1}.$$

Jeżeli natomiast  $\lambda \in \Lambda$  jest taka, że  $\lambda(2^{-n}) \neq 2^{-n-1}$ , to  $\|x_{n+1} \circ \lambda - x_n\|_\infty = 1$ . To pokazuje, że  $d_{J_1}(x_n, x_{n+1}) = 2^{-n}$ . Oznacza to, że  $\{x_n\}$  jest ciągiem Cauchy'ego w  $(D[0, 1], J_1)$ . Zauważmy, że dla każdego  $t > 0$ ,  $X_n(t) \rightarrow 0$  jednak  $x_n$  nie zbiega w  $J_1$  do funkcji zerowej.

Dla  $\lambda \in \Lambda$  kładziemy

$$\|\lambda\|^\circ = \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right|.$$

Wówczas

$$e^{-\|\lambda\|^\circ} \leq \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \leq e^{\|\lambda\|^\circ}$$

dla dowolnych  $s, t \in [0, 1]$  Przy pomocy powyższej normy wprowadzamy poprawioną wersję metryki  $J_1$ ,

$$d_{J_1}^\circ(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} (\|\lambda\|^\circ \vee \|x - y \circ \lambda\|_\infty).$$

**Fakt 5.15**

$d_{J_1}^\circ$  jest metryką na  $D[0, 1]$ .

*Dowód.* Zadanie. □

Zauważmy, że z nierówności  $|1 - x| \leq e^{|\log(x)|} - 1$  mamy

$$\|\lambda - \mathbb{I}\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} \left| t \left( \frac{\lambda(t) - \lambda(0)}{t - 0} - 1 \right) \right| \leq \exp\{\|\lambda\|^\circ\} - 1.$$

Co pociąga z kolei, że dla dowolnych  $x, y \in D[0, 1]$ ,

$$d_{J_1}(x, y) + 1 \leq e^{d_{J_1}^\circ(x, y)}.$$

W szczególności dla dowolnych  $x, x_n \in D[0, 1]$ , jeżeli  $d_{J_1}^\circ(x_n, x) \rightarrow 0$ , to  $d_{J_1}(x_n, x) \rightarrow 0$ . Okazuje się, że ostatnią implikację można odwrócić. Sprawia to, że metryki  $d_{J_1}^\circ$  są równoważne  $d_{J_1}$ .

**Twierdzenie 5.16**

W przestrzeni  $D[0, 1]$  metryki  $d_{J_1}$  oraz  $d_{J_1}^\circ$  są równoważne, tj.

$$d_{J_1}^\circ(x, y) \rightarrow 0 \Leftrightarrow d_{J_1}(x, y) \rightarrow 0.$$

**Twierdzenie 5.17**

$(D[0, 1], d_{J_1}^\circ)$  jest ośrodkową przestrzenią zupełną.

**Wniosek 5.18**

$(D[0, 1], d_{J_1})$  jest przestrzenią ośrodkową.

**5.2.4 Projekcje**

Dla  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$  definiujemy projekcję  $\pi_{\mathbf{t}}: D[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{|\mathbf{t}|}$  przez

$$\pi_{\mathbf{t}}(x) = x(\mathbf{t}) = (x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)).$$

**Fakt 5.19** • Funkcje  $\pi_0, \pi_1$  są ciągłe  $D[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Jeżeli funkcja  $x \in D[0, 1]$  jest ciągła w punkcie  $t \in [0, 1]$ , to funkcja  $\pi_t: D[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w punkcie  $x$ .
- Dla każdego  $\mathbf{t}$  funkcja  $\pi_{\mathbf{t}}$  jest mierzalna.

*Dowód.* Zadanie. □

Przez  $\mathcal{D}$  oznaczajmy będziemy  $\sigma$ -ciało zbiorów borelowskich  $D[0, 1]$ . Dla  $T \subseteq [0, 1]$  będziemy pisać

$$\mathcal{D}_f(T) = \left\{ \pi_{\mathbf{t}}^{-1}[H] : t_1, \dots, t_{|\mathbf{t}|} \in T, H \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^{|\mathbf{t}|}) \right\}$$

**Fakt 5.20**

Jeżeli  $T$  jest zbiorem gęstym zawierającym 1, to  $\sigma(\mathcal{D}_f(T)) = \mathcal{D}$ . W szczególności  $\mathcal{D}_f(T)$  jest klasą rozróżniającą.

*Dowód.* Zadanie (?). □

Dla miary probabilistycznej  $\mathbf{P}$  na  $D[0, 1]$  rozważmy zbiór  $T_{\mathbf{P}}$  tych  $t \in [0, 1]$  dla których  $\pi_t$  jest ciągłe  $\mathbf{P}$  p.w. Innymi słowy

$$T_{\mathbf{P}} = \{t \in [0, 1] : \mathbf{P}[x : x(t) \neq x(t-)] = 0\}.$$

**Fakt 5.21**

$[0, 1] \setminus T_{\mathbf{P}}$  jest przeliczalny.

*Dowód.* !! □

**Twierdzenie 5.22**

Jeżeli  $\mathbf{P}_n, \mathbf{P}$  są miarami probabilistycznymi na  $(D[0, 1], \mathcal{D})$  takimi, że

- Rodzina  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciasna
- $\pi_{\mathbf{t}}^* \mathbf{P}_n \Rightarrow \pi_{\mathbf{t}}^* \mathbf{P}$  dla  $\mathbf{t}$  takich, że  $t_1, \dots, t_n \in T_{\mathbf{P}}$ .

Wówczas  $\mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{P}$  słabo w  $(D[0, 1], J_1)$ .

**5.3 Rodziny ciasne w  $D[0, 1]$** 

$$\omega'_x(\delta) = \inf \left\{ \max_{1 \leq j \leq k} \omega_x[t_{j-1}, t_j] : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1 \right\}$$

**Twierdzenie 5.23**

Zbiór  $A \subseteq D[0, 1]$  jest warunkowo zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:

(i)

$$\sup_{x \in A} \|x\|_{\infty} < \infty$$

(ii)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x \in A} \omega'_x(\delta) = 0.$$

**Twierdzenie 5.24**

Rodzina miar probabilistycznych  $\{\mathbf{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciasna w  $D[0, 1]$  wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki

(i)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n [x : \|x\|_{\infty} \geq a] = 0$$

(ii) Dla każdego  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_n [x : \omega'_x(\delta) > \epsilon] = 0.$$

**5.4 Losowe funkcje càdlàg**

Losową funkcją càdlàg nazywać będziemy mierzalne odwzorowanie  $X: \Omega \rightarrow D[0, 1]$ . Skupimy się na zastosowaniu zebranej do tej pory teorii do ciągu losowych funkcji

$$Y_n(t) = n^{-1/\alpha} S_{[tn]}, \quad S_m = \sum_{k=1}^m X_k.$$

Zakładać będziemy, że  $X_1, X_2, \dots$  są iid takie, że

$$\mathbb{P}[X_1 > t] = t^{-\alpha}/2, \quad \mathbb{P}[X_1 \leq -t] = t^{-\alpha}/2, \quad t > 1, \quad \alpha \in (0, 2).$$

Zacniemy od opisu obiektu granicznego

## Procesy Levy'ego

Niech  $\nu$  będzie miarą na  $\mathbb{R}$  spełniającą

- Dla każdego  $x > 0$ ,

$$\nu((-\infty, x) \cup (x, +\infty)) < \infty.$$

- 

$$\int_{0 < |x| \leq 1} |x|^2 \nu(dx) < \infty$$

Niech  $N$  będzie procesem punktowym Poissona z miarą intensywności  $\text{LEB} \otimes \nu$  na  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ . Będziemy zakładać, że  $N$  ma reprezentację

$$N = \sum_k \delta_{(t_k, x_k)}$$

Dla zbioru  $I \subseteq [0, \infty)$  oddalonego od 0 niech

$$S_I(t) = \int_{[0, t] \times I} x dx dt.$$

Ze wzoru Campbella

$$\mathbb{E}[e^{i\zeta S_I(t)}] = \exp \left\{ t \int (e^{i\zeta x} - 1) \nu(dx) \right\}$$

$$\text{Var}[S_I(t)] = \int x^2 \nu(dx)$$

Rozważmy teraz dowolny ciąg  $\epsilon_0 > \epsilon_1 > \dots$  takie, że  $\epsilon_n \rightarrow 0$ . Niech

$$I_j = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in (\epsilon_{j+1}, \epsilon_j]\}.$$

Niech

$$X_j(t) = S_{I_j}(t) - \mathbb{E}[S_{I_j}(t)].$$

Wówczas

$$\text{Var}[X_{j+1}(t)] = \int_{I_{j+1}} x^2 \nu(dx)$$

a co za tym idzie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \text{Var}[X_{j+1}(t)] = \int_{|x| \leq 1} x^2 \nu(dx).$$

Z twierdzenia o dwóch szeregach wnioskujemy, że szereg  $\sum_{j=0}^{\infty} X_{j+1}(t)$  jest zbieżny jednostajnie. Przy odrobinie wysiłku można pokazać, że zbieżność jest jednostajna. Oznacza to, że ostatnia suma jest elementem  $D[0, 1]$ . Niech wreszcie

$$X_0(t) = S_{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}(t) = \int_{[0, t] \times \{|x| > 1\}} x N(dt, dx).$$

### Definicja 5.25

Proces postaci

$$X(t) = X_0(t) + \sum_{j=0}^{\infty} X_{j+1}(t) = \int_{[0, t] \times \{|x| > 1\}} x N(dt, dx) + \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \int_{[0, t] \times I_{j+1}} x N(dt, dx) - t \int_{I_{j+1}} x \nu(dx) \right]$$

nazywamy skokowym procesem Levy'ego z miarą Levy'ego  $\nu$ .

Zauważmy, że dla każdego  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{E}[e^{i\xi X(t)}] = \exp\{t\varphi(\xi)\}$$

gdzie  $\varphi$  jest tak zwanym wykładnikiem Levy'ego danym przez

$$\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} e^{i\xi x} - 1 - i\xi x \mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}} \nu(dx).$$

### Wniosek 5.26

Proces  $X$  ma stacjonarne i niezależne przyrosty.

### Twierdzenie 5.27

Załóżmy, że dla każdego  $n$  zmienne  $\{X_{n,j}\}_j$  są iid takie, że

$$n\mathbb{P}[X_{n,1} \in \cdot] \xrightarrow{v} \nu(\cdot)$$

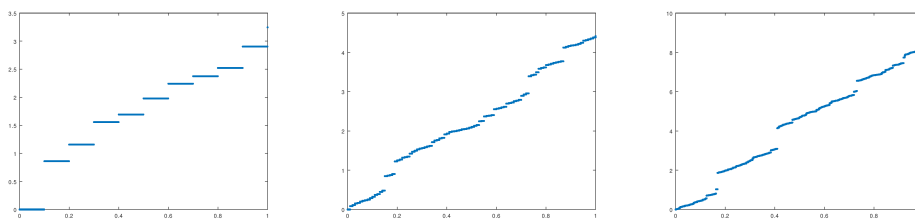
dla pewnej miary Levy'ego  $\nu$ . Załóżmy dodatkowo, że

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} n \mathbb{E}[X_{n,1}^2 \mathbb{1}_{|X_{n,1}| \leq 1}] = 0.$$

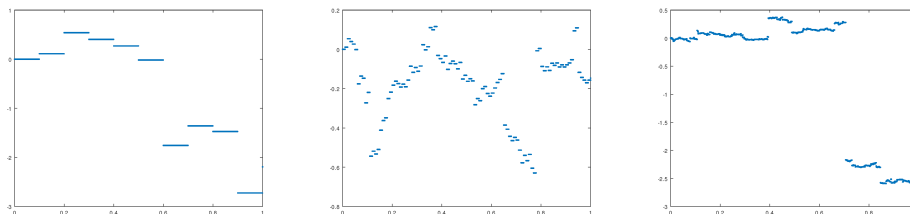
Wówczas ciąg losowych funkcji cadlag

$$X_n(t) = \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left( X_{n,j} - \mathbb{E}[X_{n,1} \mathbb{1}_{|X_{n,1}| \leq 1}] \right)$$

zbiega słabo w  $(D[0,1], J_1)$  do skokowego procesu Levy'ego z miara Levy'ego  $\nu$ .



**Rysunek 5.2.** Przykładowa funkcja  $X_n$  dla  $n$  równego odpowiednio 10, 100 i 1000 dla zmiennych  $X_{n,j}$  o wartościach nieujemnych



**Rysunek 5.3.** Przykładowa funkcja  $X_n$  dla  $n$  równego odpowiednio 10, 100 i 1000 dla zmiennych  $X_{n,j}$  o rozkładzie symetrycznym

## Losowe przestrzenie metryczne

**Streszczenie** W tym rozdziale

### 6.1 Wycieczki ruchu Browna

#### 6.1.1 Warunkowanie prostego spaceru losowego

#### 6.1.2 ciągły odpowiednik

Niech  $B = (B_t)_{t \in [0,1]}$  będzie ruchem Browna. Przypomnijmy, że przez  $B^\circ = (B_t^\circ)_{t \in [0,1]}$  oznaczamy most Browna dany przez  $B_t^\circ = B_t - tB_1$ .

Dla funkcji  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  takiej, że  $f(0) = f(1) = 0$  oraz  $s \in [0,1]$  rozważmy

$$V_s(f) = f(s + t \bmod 1) - f(s)$$

Niech teraz  $s_*(f) = \operatorname{argmin}(f)$ . Transformata Vervaata  $f$  nazywamy

$$V = V_{s_*(f)}(f).$$

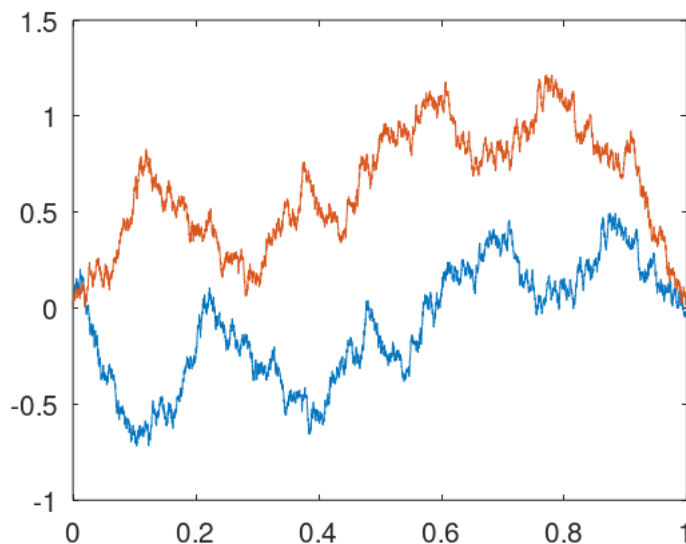
### 6.2 Ciągłe drzewa

#### Definicja 6.1

Zwartą przestrzeń topologiczną  $(\mathcal{T}, d)$  nazywamy ciągłym drzewem jeżeli dla każdego  $a, b \in \mathcal{T}$  spełnione są dwa warunki

- (i) Istnieje jedyne izometryczne włożenie  $f_{a,b}: [0, d(a,b)] \rightarrow \mathcal{T}$  takie, że  $f(a) = 0$  i  $f(b) = d(a,b)$ .
- (ii) Jeżeli  $q: [0,1] \rightarrow \mathcal{T}$  jest ciągłą injekcją taką, że  $q(a) = 0$  i  $q(b) = 1$ , to

$$q[0,1] = f_{a,b}[0, d(a,b)].$$



**Rysunek 6.1.** Trajektoria mostu Browna (niebieska) i jego transformata Vervaata (pomarańczowa)

Niech  $g: [0,1] \rightarrow [0, +\infty)$  będzie ciągłą funkcją. Dla  $s, t \in [0,1]$  rozważmy

$$m_g(s, t) = \inf_{r \in [s \wedge t, s \vee t]} g(r).$$

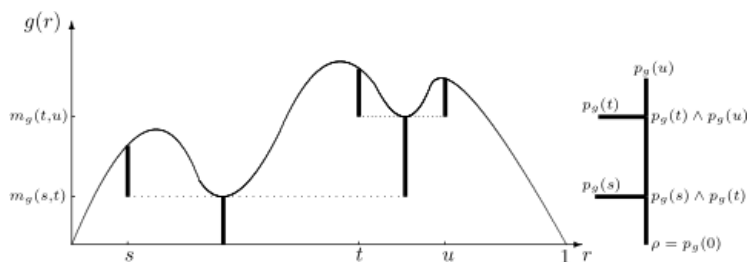
oraz

$$d_g(s, t) = g(t) + g(s) - m_g(s, t).$$

Rozważmy na  $[0,1]$  relację równoważności

$$t \sim s \Leftrightarrow d_g(s, t) = 0$$

Niech  $\mathcal{T}_g = [0,1] / \sim$ . Niech Wreszcie  $p_g: [0,1] \rightarrow \mathcal{T}_g$  będzie rzutem  $p_g(x) = [x]_{\sim}$ .



**Rysunek 6.2.** T

**Twierdzenie 6.2**

Przestrzeń  $(\mathcal{T}_g, d_g)$  jest drzewem rzeczywistym.

## 6.3 Metryka Gromova-Hausdorffa

**Definicja 6.3**

Dla przestrzenie metrycznej  $(S, \rho)$  i zbiorów  $A, B \subseteq S$ ,

$$\rho_H(A, B) = \inf \{r > 0 : A \subseteq B^r \text{ oraz } B \subseteq A^r\},$$

gdzie  $A^r = \{x \in S : \rho(x, A) \leq r\}$ .