

ANALIZA STOCHASTYCZNA

notatki do wykładu

PIOTR DYSZEWSKI

2021

Proszę pana, ja jestem umysł
ścisły. Mnie się podobają
melodie, które już raz słyszałem.

Rejs

Sylabus

Dane dotyczące przedmiotu

Nazwa przedmiotu: Analiza stochastyczna (28-MT-S-TAnStoch)

Nazwa w języku polskim: Analiza stochastyczna

Nazwa w jęz. angielskim: Stochastic analysis

Jednostka oferująca przedmiot: Instytut Matematyczny

Założenia: Teoria prawdopodobieństwa 2 (28-MT-S-tTPrawd2)

Strona www: <https://sites.google.com/site/piotrdyszewski/teaching/analiza-stochastyczna>

Forma zajęć: wykład + ćwiczenia

Punkty ECTS: 6

Opis przedmiotu

Celem wykładu jest zaprezentowanie podstaw stochastycznego rachunku całkowego. Główny nacisk będziemy kłaść na dwa, w pewnym sensie przeciwstawne aspekty. Z jednej strony uświadomimy sobie, że całka stochastyczna jest naturalnym, potrzebnym i przystępnym obiektem. Z drugiej, że posiada głęboką teorię która stanowi wyjątkowo uporządkowany kawałek nowoczesnej probabilistyki. Centralnym obiektem wykładu będzie całka Itô

$$\int_0^t X_s dB_s,$$

gdzie $B = (B_t : t \geq 0)$ jest ruchem Browna a $X = (X_t : t \geq 0)$ dostatecznie regularnym procesem stochastycznym. Zrozumienie konstrukcji i podstawowych własności całek pozwoli na badanie stochastycznych równań różniczkowych

$$dX_t = \mu(X_s, s)ds + \sigma(X_s, s)dB_s,$$

gdzie $\mu, \sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi. Zgromadzoną teorię zastosujemy do procesów dyfuzji, martyngałów wykładniczych oraz twierdzeń o zamianie czasu i zamianie miary.

IV

Do opanowania podstaw wykładu niezbędny będzie teoriomiarowy rachunek prawdopodobieństwa oraz znajomość warunkowej wartości oczekiwanej (Rachunek prawdopodobieństwa $1B$ i $2B$). Do zrozumienia całości zaprezentowanego materiału przydatna (choć nie niezbędna) będzie dobra znajomość teorii miary i podstaw analizy funkcjonalnej (Funkcje rzeczywiste i Analiza funkcjonalna).

W trakcie wykładu omówimy postawy teorii procesów stochastycznych i elementy teorii martyngałów z czasem ciągłym. Następnie zdefiniujemy całkę stochastyczną względem ruchu Browna i omówimy stochastyczne równania różniczkowe. Poruszymy takie zagadnienia jak:

- A) Procesy stochastyczne:** rozkłady skończeniowymiarowe, twierdzenie o zgodności i ciągłej modyfikacji, filtracje w czasie ciągłym, Prawo 0-1 Blumenthala, czasy zatrzymania, procesy mierzalne progresywna mierzalność, progresywne σ -ciało;
- B) Martyngały z czasem ciągłym:** nierówności maksymalne, jednostajna całkowalność, twierdzenie o zatrzymaniu, twierdzenie o zbieżności prawie na pewno i w L^p , proces nawiasu skośnego;
- C) Całka stochastyczna dla ruchu Browna:** procesy elementarne, całka stochastyczna względem ruchu Browna, całka stochastyczna jako ciągły martyngał, twierdzenie o zatrzymaniu całki stochastycznej, całka dla procesów lokalnych;
- D) Stochastyczny rachunek całkowy:** procesy Itô, całka względem procesów Itô, wzór na całkowanie przez części, wzór Itô;
- E) Stochastyczne równania różniczkowe:** istnienie i jednoznaczność rozwiązań, dyfuzje Itô, mocna własność Markowa dla dyfuzji Itô;
- F) Zastosowania:** twierdzenie Girsanova, martyngały wykładnicze, twierdzenie o zamianie czasu dla całki stochastycznej.

Do wykładu przygotowane są notatki dostępne na stronie prowadzącego. Podstawową literaturą do wykładu są:

- P. Baldi, *Stochastic Calculus*, 2017
- J. F. Le Gall, *Brownian motion, martingales, and stochastic calculus*, 2016
- D. Revuz i M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, 1999

Dodatkowe informacje i uzupełnienia dostępne są w:

- R. Latała, *Wstęp do analizy stochastycznej*, 2011
- B. Øksendal, *Stochastic differential equations*, 2003
- I. Karatzas i S. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, 2012
- P. Mörters i Y. Peres, *Brownian motion*, 2010
- T. Mikosch, *Elementary stochastic calculus, with finance in view*, 1998
- R. Durrett, *Stochastic calculus. A practical introduction*, 1996
- K.L. Chung i R. Williams, *Introduction to Stochastic Integration*, 1990
- F. den Hollander i H. Maassen, *Stochastic Analysis*, 2010

- R. Schilling i L. Partzsch, *Brownian motion: an introduction to stochastic processes*

Efekty kształcenia

Po wykładzie student:

1. formułuje podstawowe twierdzenia z zakresu teorii procesów stochastycznych (**A**) ze szczególnym uwzględnieniem martyngałów z czasem ciągłym (**B**);
2. podaje konstrukcję całki stochastycznej względem ruchu Browna (**C**);
3. formułuje główne twierdzenia teorii całki stochastycznej (**D**) i stochastycznych równań różniczkowych (**E**);
4. weryfikuje podstawowe własności procesów stochastycznych w tym: progresywną mierzalność i własność czasu zatrzymania (**A**), własności martyngału (**B**);
5. rozwiązuje proste stochastyczne równanie różniczkowe (**E**);
6. stosuje teorię martyngałów i całki stochastycznej w zadaniach i problemach (**A, D**);
7. analizuje dowody podstawowych twierdzeń z wykładu z uzasadnieniem poszczególnych ich założeń (**A, B, C, D, E**);
8. dowodzi własności procesów dyfuzji w oparciu o stochastyczne równania różniczkowe (**E, F**);
9. wyznacza procesy dyfuzji modelujące zjawiska losowe w przyrodzie w oparciu o stochastyczne równanie różniczkowe (**E, F**);

Sposób weryfikacji efektów kształcenia

Na zaliczenie składać się będą:

- sprawdziany pisemne (85%);
- aktywność na ćwiczeniach (10%);
- zadania domowe (5 %);

Ocena z wykładu wystawiona będzie na podstawie egzaminu pisemnego.

VI

Metody i kryteria oceniania

Warunkiem zaliczenia przedmiotu jest:

- uzyskanie 30% punktów za zadania stanowiące bieżącą weryfikację efektów kształcenia;
- uzyskanie pozytywnej oceny z egzaminu stanowiącego końcową weryfikację efektów kształcenia.

Kryteria ocen:

(dst) student realizuje punkty 1-4 efektów kształcenia

(db) student realizuje punkty 1-6 efektów kształcenia

(bdb) student realizuje punkty 1-9 efektów kształcenia

Wrocław, 2021

Piotr Dyszewski

Spis treści

1	Wstęp	1
1.1	Motywacja	2
1.2	Dygresja analityczna	6
1.3	Podejście	11
1.4	Zadania	14
2	Procesy stochastyczne	18
2.1	Podstawowe definicje	18
2.2	Rozkłady procesów stochastycznych	20
2.3	Ciągłość trajektorii	26
2.4	Filtracje	37
2.5	Czasy zatrzymania	43
2.6	Procesy mierzalne	46
2.7	Zadania	49
3	Martyngały	57
3.1	Nierówności maksymalne	61
3.2	Zbieżność prawie na pewno	65
3.3	Jednostajna całkowalność	68
3.4	Zbieżność w L_p	70
3.5	Proces nawiasów skośnych	72
3.6	Zadania	83
4	Całka stochastyczna dla ruchu Browna	87
4.1	Procesy elementarne	89
4.2	Definicja całki stochastycznej	92
4.3	Całka stochastyczna jako ciągły martyngał	97
4.4	Całka w $L^2_{loc}(B)$	102
4.5	Zadania	106

VIII Spis treści

5	Stochastyczny rachunek całkowy	108
5.1	Pierwszy wzór Itô	108
5.2	Proces Itô	111
5.3	Drugi wzór Itô	115
5.4	Całkowanie przez części	117
5.5	Trzeci wzór Itô	118
5.6	Zadania	119
6	Stochastyczne równania różniczkowe	124
6.1	Dyfuzje Itô	131
6.2	Zadania	139
7	Zastosowania	140
7.1	Martyngały wykładnicze	141
7.2	Zamiana czasu	144
7.3	Twierdzenie Grisanova	145
7.4	Zadania	146
8	Całka stochastyczna dla wielowymiarowego ruchu Browna	147
8.1	Wielowymiarowe stochastyczne równania różniczkowe	152
8.2	Rekurencyjność i tranzytywność wielowymiarowego ruchu Browna	152
8.3	Probabilistyczny dowód zasadniczego twierdzenia algebry....	152
8.4	Zadania	152
	Literatura	157
	Indeks	158

Wstęp

Streszczenie Zaczniemy od nakreślenia motywacji stojącymi za stochastycznymi równaniami różniczkowymi. Wyjaśnimy dlaczego duża klasa równań nie może być interpretowana w klasycznym sensie i dlaczego klasyczny rachunek Riemanna-Stieltjesa okazuje się być niewystarczający. Na koniec zobaczymy na przykładzie jak można wykorzystać komponent losowy aby uniknąć technicznych problemów i formalnie zdefiniować proces rozwiązujący stochastyczne równanie różniczkowe.

Zanim przystąpimy do rozwijania teorii całki stochastycznej, postaramy się uzasadnić potrzebę zdefiniowania i zrozumienia takiego obiektu. Jak się za chwilę przekonamy, matematyka finansowa stanowi tutaj dobre źródło inspiracji. Zaczniemy jednak od podstawowych definicji. Pracować będziemy na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zakładać będziemy, że rozważana przestrzeń probabilistyczna jest wystarczająco bogata, aby móc określić na niej wszystkie zmienne losowe wprowadzone w trakcie wykładu. Niech $T \subseteq \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ będzie ustalonym przedziałem. Centralnym obiektem naszych badań będą procesy stochastyczne.

Definicja 1.1

Procesem stochastycznym określonym na zbiorze T nazywamy dowolną rodzinę zmiennych losowych $X = (X_t)_{t \in T}$.

Powyższa definicja jest wyjątkowo obszerna i dopuszcza wiele procesów o niepożądanych własnościach. W przyszłości będziemy pracować z węższą klasą obiektów. Na potrzeby wstępu jest ona jednak w zupełności wystarczająca.

1.1 Motywacja

Jednym z najpopularniejszych zastosowań procesów stochastycznych jest modelowanie rynku akcji, kiedy wartość zmiennej losowej z indeksem t oznacza wartość akcji w chwili t .

Pytanie 1.2

Jak zdefiniować proces $G = (G_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ aby użyć go do modelowania wartości akcji na giełdzie (lub ogólniej aktywa obciążonego ryzykiem)?

Odpowiedź na powyższe pytanie może okazać się zaskakująco złożona. Postaramy się zdefiniować proces G poprzez równanie, które powinny spełniać zmienne $(G_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Jeśli G_t rzeczywiście jest ceną akcji w chwili t , to dla $h > 0$ iloraz

$$\frac{G_{t+h} - G_t}{G_t}$$

nazywany jest *relatywną stopą zwrotu w przedziale czasowym* $[t, t+h]$. Chcemy wskazać model, w którym relatywna stopa zwrotu dla bardzo małych h jest postaci

$$\frac{G_{t+h} - G_t}{G_t} \approx \mu \cdot h + \sigma \cdot Er(t, t+h),$$

gdzie stała μ jest średnią stopą zwrotu, stała $\sigma > 0$ nazywana jest zmiennością, a $Er(t, t+h)$ to losowe zaburzenie takie, że

- zmienna $Er(t, t+h)$ ma średnią 0;
- zmienna $Er(t, t+h)$ jest niezależna od przeszłości procesu $(G_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, dokładniej jest niezależna od σ -ciała $\sigma(G_s : s \leq t)$;
- rozkład $Er(t, t+h)$ zależy tylko od h ;
- odwzorowanie $(t, h) \mapsto Er(t, t+h)$ jest ciągłe.

Innym źródłem inspiracji jest fizyka.

Pytanie 1.3

Jak określić proces $U = (U_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ służący do modelowania prędkości cząsteczki poruszającej się w cieczy? Równanie Langevina dla prędkości zapisuje się jako

$$\frac{U_{t+h} - U_t}{h} \approx \mu U_t + \frac{Er(t, t+h)}{h}.$$

Tutaj pierwszy składnik pochodzi od sił oporu działających na cząsteczkę, która zgodnie z prawem Stokesa jest proporcjonalna od jej prędkości. Drugi składnik to losowe zaburzenie pochodzące od kolizji cząsteczki z cząsteczkami cieczy. Podobnie jak poprzednio zakładamy, że $Er(t, t+h)$ jest zmienną losową o średniej zero niezależną od σ -ciała $\sigma(U_s : s \leq t)$ której rozkład zależy tylko od h .

Równania zawarte w powyższych pytaniach można zapisać ogólnie jako

$$X_{t+h} - X_t \approx \mu(t, X_t)h + \sigma(t, X_t)Er(t, t+h)$$

dla pewnego szukanego procesu $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ i zadanych funkcji ciągłych μ i σ . Skupimy się teraz przez chwilę na losowym zaburzeniu $Er(t, t+h)$. Nie mając żadnych dodatkowych przesłanek o naturze $Er(t, t+h)$, będziemy szukali zmiennej, która daje najwięcej rozproszenia. Jednym ze sposobów jego pomiaru jest entropia. Teoria informacji mówi [B.65, Twierdzenie 8.3.3], że w klasie wszystkich gęstości probabilistycznych $p(x)$ na prostej o ustalonej wariancji, rozkładem który maksymalizuje entropię $H(p) = -\int p(x) \log(p(x)) dx$ jest rozkład normalny. Stąd $Er(t, t+h) \sim \mathcal{N}(0, f(h))$ dla pewnej nieujemnej funkcji f . Zauważmy, że wobec niezależności $Er(t, s)$ od przeszłości rozważanego procesu, dla $s < r < t$ zmienne $Er(s, r)$ i $Er(r, t)$ są niezależne. Dodatkowo, porównując zmienne $X_t - X_s$ oraz $(X_t - X_r) + (X_r - X_s)$ otrzymujemy, dla małych wartości $t - s$,

$$\begin{aligned} \mu(s, X_s)(t-s) + \sigma(s, X_s)Er(s, t) &\approx \\ &\mu(r, X_r)(t-s) + \sigma(r, X_r)Er(r, s) + \sigma(s, X_s)Er(s, t). \end{aligned}$$

Wobec ciągłości μ i σ oraz przypuszczalnie ciągłości X , $\mu(s, X_s) \approx \mu(r, X_r)$ oraz $\sigma(s, X_s) \approx \sigma(r, X_r)$ dla małych wartości $t - s$. Stąd

$$Er(s, t) \approx Er(r, s) + Er(r, t).$$

Odwołując się do rozkładów oraz niezależności zmiennych po prawej stronie $f(t-s) = f(s-r) + f(t-r)$. Ciągłość Er pociąga ciągłość f a ta z kolei wymusza $f(t) = ct$ dla pewnej stałej $c > 0$. Wobec powyższego istnieje w zasadzie jedyny kandydat na zmienną $Er(s, t)$. Jest to

$$Er(s, t) = B_t - B_s$$

przyrost ruchu Browna $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Definicja 1.4

Ruchem Browna (procesem Wienera) nazywamy proces stochastyczny $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ taki, że

- (B1) $B_0 = 0$ p.w;
- (B2) B ma niezależne przyrosty: dla dowolnych $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, +\infty)$, $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, zmienne losowe $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0}$ są niezależne;
- (B3) dla każdego $t > s$, zmienna $B_t - B_s$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, t-s)$;
- (B4) funkcja $t \mapsto B_t(\omega)$ jest ciągła dla wszystkich $\omega \in \Omega$.

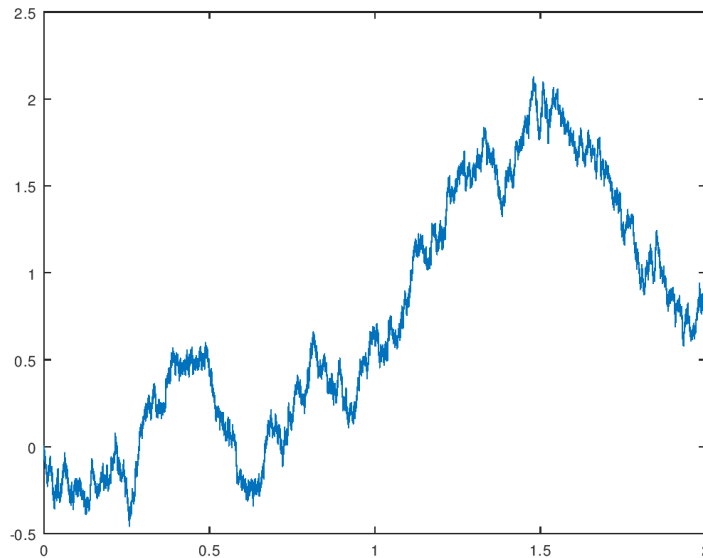
Należy mieć na względzie, że na tym etapie istnienie procesu B spełniającego własności (B1)-(B4) może nie być oczywiste. Do problemu istnienia ruchu Browna powrócimy w następnym rozdziale. Będziemy szukać procesu $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ który spełnia

$$X_{t+h} - X_t \approx \mu(t, X_t)h + \sigma(t, X_t) \cdot (B_{t+h} - B_t) \quad (1.1)$$

dla małych h . Powyższa relacja sugeruje, że proces $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ mógłby zostać zdefiniowany jako rozwiązanie zwyczajnego równania różniczkowego

$$\frac{d}{dt}X_t = \mu(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \frac{d}{dt}B_t \quad t \in (0, +\infty). \quad (1.2)$$

Należy pamiętać, że proces stochastyczny X posiada dwa argumenty, pierwszy to indeks $t \in \mathbb{R}_+$ a drugi to odpowiedzialna za losowość $\omega \in \Omega$. Tutaj $\frac{d}{dt}$ tyczy się klasycznej pochodnej względem parametru t przy ustalonej wartości ω . Problem z powyższym podejściem polega na tym, że trajektorie ruchu Browna są nieregularne.



Rysunek 1.1. trajektoria ruchu Browna, czyli wykres funkcji $t \mapsto B_t(\omega)$ dla ustalonej ω

Definicja 1.5

Trajektorią procesu stochastycznego $X = (X_t)_{t \in T}$ nazywamy losową funkcję

$$X(\omega): T \ni t \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}.$$

Własność (B₄) w **Definicji 1.4** zapewnia, że trajektorie ruchu Browna są ciągłe. Okazuje się jednak, że poza tym są one nieregularne (patrz **Rysunek 1.1**), a dokładniej nie są różniczkowalne w każdym punkcie.

Fakt 1.6

Niech $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie ruchem Browna. Wówczas

$$\mathbb{P}[\exists t_0 > 0, t \mapsto B_t \text{ jest różniczkowalna w } t_0] = 0.$$

Dowód. Pozostawiamy czytelnikowi jako **Zadanie 1.12**. □

Powracając do rozważanego problemu widzimy, że prawa strona (1.2) nie jest poprawnie określona. W teorii równań różniczkowych, przy problemach z regularnością funkcji, równania różniczkowe zastępuje się równaniami całkowymi. Czytelnik wprawiony w analizie na prostej rzeczywistej wie, że trajektorie ruchu Browna są na tyle nieregularne, że i to podejście skazane jest na niepowodzenie. Aby zrozumieć skąd biorą się problemy, spróbujemy określić X_t właśnie przez równanie całkowe mimo, że skazani jesteśmy na klęskę. Ustalmy $t > 0$ i zauważmy, że (1.1) sugeruje, że dla $0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \dots < t_{k_n}^n = t$,

$$X_t - X_0 \approx \sum_{k=0}^{k_n-1} \mu(t_k^n, X_{t_k^n})(t_{k+1}^n - t_k^n) + \sum_{k=0}^{k_n-1} \sigma(t_k^n, X_{t_k^n})(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}).$$

Od tej pory będziemy stosowali notację

$$\Delta B_{t_k} = B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}, \quad \Delta t_k^n = t_{k+1}^n - t_k^n.$$

Mamy zatem

$$X_t - X_0 \approx \sum_{k=0}^{k_n-1} \mu(t_k^n, X_{t_k^n}) \Delta t_k^n + \sum_{k=0}^{k_n-1} \sigma(t_k^n, X_{t_k^n}) \Delta B_{t_k^n}. \quad (1.3)$$

Chcielibyśmy aby powyższe wyrażenie zbiegało do odpowiednich całek. W tym celu musimy nałożyć pewne warunki na podziały odcinka $[0, t]$.

Definicja 1.7

Ciąg podziałów $\mathcal{P}_n = \{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ odcinka $[a, b]$ nazywamy *normalnym* jeżeli $a = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \dots < t_{k_n}^n = b$ oraz

$$\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n} \subseteq \{t_k^{n+1}\}_{k=0}^{k_{n+1}}, \quad |\mathcal{P}_n| = \max_{0 \leq k \leq k_n-1} |\Delta t_k^n| \rightarrow 0. \quad (1.4)$$

Jeżeli $\mathcal{P}_n = \{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ jest normalnym ciągiem podziałów odcinka $[0, t]$, to pierwszy składnik w wyrażeniu po prawej w (1.3), przy założeniu pewnej regularności trajektorii procesu X , zbiega do

$$\int_0^t \mu(s, X_s) ds.$$

O wiele bardziej problematyczny jest drugi składnik. Zanim udzielimy pełnej odpowiedzi na **Pytanie 1.2** musimy dobrze zrozumieć zachowanie wyrażenia tego typu.

Pytanie 1.8

Założmy, że $\mathcal{P}_n = \{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ jest normalnym ciągiem podziałów odcinka $[0, t]$. Rozważmy sumy

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} Y_{t_k^n} \Delta B_{t_k^n}. \quad (1.5)$$

- dla jakich procesów stochastycznych $Y = (Y_s)_{s \in [0, t]}$ powyższe sumy są zbieżne?
- w jakim sensie zachodzi zbieżność?
- co możemy powiedzieć o zmiennej granicznej $(Y \cdot B)_t$?
- jakie własności ma proces stochastyczny $Y \cdot B = ((Y \cdot B)_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$?

Kandydatem na granicę (1.5) przy ustalonej $\omega \in \Omega$ może być *całka Riemanna-Stieltjesa* $Y(\omega)$ względem $B(\omega)$,

$$\int_0^t Y_s(\omega) dB_s(\omega).$$

Zanim będziemy mogli podjąć pierwszą próbę udzielenia odpowiedzi na **Pytanie 1.8** musimy odświeżyć wiadomości z analizy zmiennej rzeczywistej.

1.2 Dygresja analityczna

Całka Riemanna-Stieltjesa stanowi jedno z uogólnień całki Riemanna. Część dowodów, która zostanie przez nas pominięta jest do znalezienia w piętnastym rozdziale [Fic72] lub dwunastym rozdziale [Gra46].

Definicja 1.9

Niech $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Powiemy, że $\int_a^b g(s) df(s)$ istnieje oraz że g jest f -całkowalna na przedziale $[a, b]$, jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów $\mathcal{P}_n = \{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ odcinka $[a, b]$ oraz punktów $\{s_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ takich, że $t_k^n \leq s_k^n \leq t_{k+1}^n$ istnieje skończona granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_n-1} g(s_k^n) (f(t_{k+1}^n) - f(t_k^n)), \quad (1.6)$$

która nie zależy od wyboru ciągów $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ i $\{s_k^n\}_{k=0}^{k_n}$. W takim wypadku wspomnianą granicę oznaczamy symbolem $\int_a^b g(s) df(s) = \int_a^b g df$ i nazywamy *całką Riemanna-Stieltjesa*.

Zauważmy, że jeżeli $f(s) = s$, to całka Riemanna-Stieltjesa $\int_a^b g(s) df(s)$ jest po prostu całką Riemanna $\int_a^b g(s) ds$.

Uwaga 1.10

Jeśli $f \in C^1(a, b)$, to z twierdzenia o wartości średniej $f(t_{k+1}^n) - f(t_k^n) = f'(r_k^n)(t_{k+1}^n - t_k^n)$ dla pewnego $t_k^n \leq r_k^n \leq t_{k+1}^n$, a co za tym idzie jeżeli g jest całkowalna względem f , to gf' jest całkowalna w sensie Riemanna. Zachodzi wówczas wzór $\int_a^b g(s) df(s) = \int_a^b g(s) f'(s) ds$.

Uwaga 1.11

Podobnie jak w przypadku całki Riemanna możemy zdefiniować górne i dolne sumy całkowe wzorami

$$U_f(g, \mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{k_n-1} \sup_{t_k^n \leq s \leq t_{k+1}^n} \{g(s)(f(t_{k+1}^n) - f(t_k^n))\},$$

$$L_f(g, \mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{k_n-1} \inf_{t_k^n \leq s \leq t_{k+1}^n} \{g(s)(f(t_{k+1}^n) - f(t_k^n))\},$$

gdzie $\mathcal{P} = \{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$. Można pokazać, że g jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_{\mathcal{P}} L_f(g, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} U_f(g, \mathcal{P}).$$

Wtedy też

$$\int_a^b g(s) df(s) = \sup_{\mathcal{P}} L_f(g, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} U_f(g, \mathcal{P}),$$

gdzie \mathcal{P} przebiega zbiór wszystkich podziałów odcinka $[a, b]$. Skoro

$$\begin{aligned} U_f(g, \mathcal{P}) - L_f(g, \mathcal{P}) &\leq \Omega_f(g, \mathcal{P}) \\ &= \sum_{k=0}^{k_n-1} |f(t_{k+1}^n) - f(t_k^n)| \sup_{t_k^n \leq s, t \leq t_{k+1}^n} |g(s) - g(t)| \end{aligned}$$

to funkcja g będzie całkowna względem f , jeśli dla dowolnego ciągu podziałów normalnych \mathcal{P}_n odcinka $[a, b]$ zachodzi

$$\Omega_f(g, \mathcal{P}_n) \rightarrow 0.$$

Wyrażenie (1.6) jest liniowe ze względu na f i g . Łatwo się przekonać, że jeśli g_1 oraz g_2 są całkowne względem f , to dla dowolnych stałych c_1 i c_2 funkcja $c_1g_1 + c_2g_2$ również jest całkowna względem f oraz

$$\int_a^b c_1g_1 + c_2g_2 \, df = c_1 \int_a^b g_1 \, df + c_2 \int_a^b g_2 \, df.$$

Podobnie, jeżeli g jest całkowna względem f_1 oraz f_2 , to dla dowolnych stałych c_0 , c_1 i c_2 funkcja g jest całkowna względem $c_0 + c_1f_1 + c_2f_2$ oraz

$$\int_a^b g \, d(c_0 + c_1f_1 + c_2f_2) = c_1 \int_a^b g \, df_1 + c_2 \int_a^b g \, df_2.$$

Skoro chcemy podjąć próbę zdefiniowania procesu stochastycznego przez całkę Riemanna-Stieltjesa względem innego procesu, musimy wiedzieć dla jakich f całka $\int_a^b g \, df$ jest dobrze określona dla g pochodzących z dostatecznie bogatej rodziny zbiorów.

Pytanie 1.12

Co należy wiedzieć o funkcji f , aby zagwarantować istnienie $\int_a^b g \, df$ dla dowolnej g ciągłej na $[a, b]$?

Okazuje się, że w naturalny sposób w grę wchodzi wahanie funkcji f . Rozważmy wyrażenie (1.6) dla ustalonego f i wszystkich funkcji ciągłych g takich, że $-1 \leq g \leq 1$. Nietrudno się przekonać, że supremum wyrażenia (1.6) jest przyjęte dla g takiego, że $g(s_k^n) = \operatorname{sgn}(f(t_{k+1}^n) - f(t_k^n))$ i dla takiego g wyrażenie (1.6) przyjmuje postać

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} |f(t_{k+1}^n) - f(t_k^n)|.$$

Definicja 1.13

Dla funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\text{Wah}_{[a,b]}(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{a=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n=b} \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta f(t_k)|$$

nazywamy *wahaniem funkcji f w przedziale $[a, b]$* . Mówimy, że f ma wahanie skończone na przedziale $[a, b]$, jeśli $\text{Wah}_{[a,b]}(f) < \infty$. Powiemy, że $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ma ograniczone wahanie, jeżeli ma ona skończone wahanie na każdym ograniczonym przedziale.

Uwaga 1.14

Jak przekonamy się w **Zadaniu 1.21** dla każdej funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje normalny ciąg podziałów $\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ odcinka $[a, b]$ taki, że

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} |\Delta f(t_k^n)| \rightarrow \text{Wah}_{[a,b]}(f).$$

Uwaga 1.15

Przy odrobinie pracy, argumentując podobnie jak w **Uwadze 1.10**, można pokazać, że jeśli $f \in C^1[a, b]$, to $\text{Wah}_{[a,b]}(f) = \int_a^b |f'(s)| ds$.

Uwagi przed **Definicją 1.13** tłumaczą intuicje za kryterium istnienia $\int_a^b g df$ dla każdej ciągłej g .

Twierdzenie 1.16

Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne

- całka $\int_a^b g df$ istnieje dla każdej ciągłej $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$;
- funkcja f ma skończone wahanie na przedziale $[a, b]$.

Dowód. Uzasadnienie obu implikacji jest przedmiotem **Zadania 1.17** oraz **Zadania 1.22**. \square

W przyszłości przyda nam się kilka własności kilka własności wahanania jako funkcji przedziału. Niech $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i niech

$$b_\infty = \sup \left\{ t \geq 0 : \text{Wah}_{[0,t]}(f) < \infty \right\}.$$

Zauważmy, że dla dolnych $a, b \in [0, b_\infty)$, $a < b$,

$$\text{Wah}_{[0,b]}(f) = \text{Wah}_{[0,a]}(f) + \text{Wah}_{[a,b]}(f).$$

Rzeczywiście, suma podziałów odcinków $[0, a]$ oraz $[a, b]$ jest podziałem odcinka $[0, b]$. Odwołując się do definicji wahania, udowadnia to nierówność \geq w powyższym wzorze. Dodatkowo dorzucenie punktu "a" do dowolnego podziału odcinka $[0, b]$ tworzy podziały odcinków $[0, a]$ oraz $[a, b]$. To z kolei prowadzi do nierówności \leq w powyższym wzorze.

Fakt 1.17

Odwzorowanie $S_f: [0, b_\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ zadane przez

$$S_f(t) = \text{Wah}_{[0,t]}(f)$$

jest funkcją ciągłą.

Dowód. Zauważmy najpierw, że f jest jednostajnie ciągła na każdym zwartym przedziale. Dodatkowo funkcja S_f jest niemalejąca. Dla ustalonego $t \in [0, b_\infty)$, z monotoniczności S_f ,

$$\limsup_{s \uparrow t} S_f(s) \leq S_f(t).$$

Z drugiej strony, dla normalnego ciągu $\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ podziałów odcinka $[0, t]$ z **Uwagi 1.14** mamy

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} \Delta f(t_k) = \sum_{k=0}^{k_n-2} \Delta f(t_k) + \Delta f(t_{k_n-1}) \leq S_f(t_{k_n-1}) + \Delta f(t_{k_n-1}).$$

Stąd, przechodząc $n \rightarrow \infty$,

$$S_f(t) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} S_f(t_{k_n-1}).$$

Skoro $t_{k_n-1} \uparrow t$, to wobec monotoniczności S_f powyższe implikuje

$$S_f(t) \leq \liminf_{s \uparrow t} S_f(s).$$

(najłatwiej to pokazać rozumując nie wprost, że prawdziwa jest nierówność $>$). S_f istotnie jest lewostronnie ciągła. Niech $b_0 \in (t, b_\infty)$. Te same argumenty zastosowane do funkcji $R_f(t) = \text{Wah}_{[t,b_0]}(f)$ pokazują, że R_f jest prawostronnie ciągła. Rzeczywiście tym razem monotoniczność wahania gwarantuje

$$R_f(t) \geq \limsup_{s \downarrow t} R_f(s).$$

Podobnie jak poprzednio, dla ciągu podziałów odcinka $[t, b_0]$,

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} \Delta f(t_k) = \sum_{k=1}^{k_n-1} \Delta f(t_k) + \Delta f(t_0) \leq R_f(t_1) + \Delta f(t_0).$$

Stąd

$$R_f(t) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} R_f(t_0).$$

Skoro $t_1 \downarrow t$, to wobec monotoniczności R_f powyższe implikuje

$$R_f(t) \leq \liminf_{s \uparrow t} R_f(s).$$

Skoro $R_f(t) + S_f(t) = \text{Wah}_{[0, b_0]}(f)$, to obie funkcje są ciągłe. \square

1.3 Podejście

Bogaci w wiedzę poprzedniej sekcji wiemy, że dla zachowania sum (1.5) wahanie trajektorii ruchu Browna ma kluczowe znaczenie. Okazuje się, że z prawdopodobieństwem jeden wahań te są nieskończone na każdym skończonym przedziale.

Fakt 1.18

Niech $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie standardowym ruchem Browna. Wówczas

$$\mathbb{P} \left[\omega : \forall t > 0 \text{Wah}_{[0, t]} B(\omega) = \infty \right] = 1.$$

Dowód. Pozostawiamy jako **Zadanie 1.26**. \square

Okazuje się, że można powiedzieć nieco więcej o trajektoriach B . Mianowicie mają nietrywialne wahanie w sensie kwadratowym.

Fakt 1.19

Ustalmy $t > 0$. Niech $\mathcal{P}_n = \{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ będzie normalnym ciągiem podziałów odcinka $[0, t]$. Wówczas

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^{k_n-1} \left(\Delta B_{t_k^n} \right)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} t$$

gdy $n \rightarrow \infty$.

Dowód. Mamy

$$\mathbb{E} [Q_n(t)] = \sum_{k=0}^{k_n-1} \mathbb{E} \left[\left(\Delta B_{t_k^n} \right)^2 \right] = \sum_{k=0}^{k_n-1} \Delta t_k^n = t.$$

Aby osiągnąć cel wystarczy pokazać, że wariancja $Q_n(t)$ znika przy $n \rightarrow \infty$. Wobec niezależności przyrostów ruchu Browna,

$$\begin{aligned}\text{Var}[Q_n(t)] &= \sum_{k=0}^{k_n-1} \text{Var}\left[\left(\Delta B_{t_k^n}\right)^2\right] \\ &= \sum_{k=0}^{k_n-1} \mathbb{E}\left[\left(\Delta B_{t_k^n}\right)^4\right] - (\Delta t_k)^2.\end{aligned}$$

Wiemy, że

$$\Delta B_{t_k^n} \stackrel{d}{=} B_{\Delta t_k^n} \stackrel{d}{=} \sqrt{\Delta t_k^n} B_1.$$

Bezpośrednim rachunkiem wliczamy $\mathbb{E}[B_1^4] = 3$. Wobec tego

$$\mathbb{E}\left[\left(\Delta B_{t_k^n}\right)^4\right] = (\Delta t_k^n)^2 \mathbb{E}[B_1^4] = 3(\Delta t_k^n)^2$$

co pociąga za sobą

$$\begin{aligned}\text{Var}[Q_n(t)] &= 2 \sum_{k=0}^{k_n-1} (\Delta t_k)^2 \leq 2 \max_{0 \leq k \leq k_n-1} |\Delta t_k^n| \sum_{k=0}^{k_n-1} \Delta t_k \\ &= 2t \max_{0 \leq k \leq k_n-1} |\Delta t_k^n| \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Pokazaliśmy zatem, że

$$\mathbb{E}\left[\left(Q_n(t) - t\right)^2\right] = \text{Var}[Q_n(t)] \rightarrow 0$$

oznacza to, że $Q_n(t)$ zbiega w średniej kwadratowej (w $L^2(\Omega)$) do t . W szczególności $Q_n(t) \rightarrow^{\mathbb{P}} t$. \square

Wobec powyższego całki $\int_0^t X_s(\omega) dB_s(\omega)$ nie możemy określić jako całki Riemanna-Stieltjesa dla każdej trajektorii (każdej ω) z osobna. Na wyrażenia (1.5) należy patrzeć w sposób globalny. Aby zilustrować podejście rozważmy następujący przykład.

Przykład 1.20

Aby zakończyć ten rozdział pozytywnym akcentem, nadamy matematycznego sensu całce

$$(B \cdot B)_t = \int_0^t B_s dB_s.$$

Rozważmy (1.5) dla $X = B$. Niech

$$S_n = \sum_{k=0}^{k_n-1} B_{t_k^n} \Delta B_{t_k^n}, \quad (1.7)$$

gdzie $\mathcal{P}_n = \{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ jest normalnym ciągiem podziałów odcinka $[0, t]$. Skoro $a(b-a) = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(b-a)^2$, to

$$B_{t_k}^n \Delta B_{t_k}^n = \frac{1}{2} B_{t_{k+1}}^2 - \frac{1}{2} B_{t_k}^2 - \frac{1}{2} (\Delta B_{t_k}^n)^2,$$

a co za tym idzie

$$S_n = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_n-1} (\Delta B_{t_k}^n)^2 = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} Q_n(t).$$

Z Faktu 1.19

$$S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

Całkę $It\hat{o}$ $(B \cdot B)_t = \int_0^t B_s dB_s$ definiujemy jako granicę według prawdopodobieństwa sum (1.7). Pokazaliśmy właśnie, że

$$(B \cdot B)_t = \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t. \quad (1.8)$$

W najbliższych rozdziałach przyjrzymy się własnościom procesu $B \cdot B = ((B \cdot B)_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Okazuje się, że *Całka Itô* różni się w znaczący sposób od całki Riemanna-Stieltjesa.

Fakt 1.21

Dla ciągłej funkcji $f: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ o skończonym wahanu na przedziale $[0, t]$ zachodzi

$$\int_0^t f(s) df(s) = \frac{1}{2} f(t)^2 - \frac{1}{2} f(0)^2.$$

Dowód. Rozumowanie pozostawiamy jako **Zadanie 1.18**. □

Nieskończone wanie trajektorii ruchu Browna manifestuje się właśnie w różnicy między wzorem (1.8) a wzorem dostarczonym przez **Fakt 1.21**. W dalszej części wykładu, zmienne (1.5) będziemy traktowali jako elementy przestrzeni procesów całkownych z kwadratem. W ten sposób uda nam się znaleźć obiekt graniczny dla (1.5), który nazwiemy *całką Itô* procesu X względem ruchu Browna. To pozwoli na określenie całki

$$\int_0^t X_s dB_s$$

w sposób globalny, na całej przestrzeni Ω . Jednym z kluczowych aspektów jest to, że dla każdego ustalonego n , proces

$$\sum_{k=0}^m B_{t_k}^n \Delta B_{t_k}^n, \quad m < k_n$$

jest martyngałem. Aby wprowadzić teorię całki stochastycznej w usystematyzowany sposób, potrzebne nam będą podstawy teorii procesów stochastycznych (**rozdział 2**) i elementy teorii martyngałów z czasem ciągłym (**rozdział 3**).

1.4 Zadania

Motywacja

Zadanie 1.1

Sprawdź, że $\mathbb{E}[B_1^4] = 3$.

Zadanie 1.2

Oblicz $\mathbb{E}[B_s B_t^2]$ dla $s < t$.

Zadanie 1.3

Niech $a \in \mathbb{R}$. Oblicz $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{B_t \leq a\}}]$ oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[B_t \mathbb{1}_{\{B_t \leq a\}}]$.

Zadanie 1.4

Niech $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie ruchem Browna. Sprawdź, że $\mathbb{E}[B_t B_s] = t \wedge s$. Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ wektor losowy $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ ma wielowymiarowy rozkład normalny. Znajdź rozkład zmiennej $2B_1 + 5B_3 + B_7$.

Zadanie 1.5

Dla jakich parametrów a i b , zmienne $aB_1 - B_2$ oraz $B_3 + bB_5$ są niezależne?

Zadanie 1.6

Oblicz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} \mathbb{E}[B_t^2 e^{-B_t^2}].$$

Zadanie 1.7

Sprawdź, że dla $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[B_t^{2k}] = t^k \frac{2^k \Gamma(k + 1/2)}{\sqrt{\pi}},$$

gdzie Γ oznacza funkcję gamma Eulera.

Zadanie 1.8

Pokaż, że dla $0 < s \leq t$ gęstość rozkładu wektora losowego (B_s, B_t) wynosi

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{1}{2s}x^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{1}{2(t-s)}(y-x)^2}.$$

Pokaż, że dla każdego $s > 0$, $\mathbb{P}[B_s < 0, B_{2s} > 0] = \frac{1}{8}$.

Zadanie 1.9

Oblicz $\mathbb{P}[2B_1^2 - 2B_1B_2 + B_2^2 \geq 1]$.

Zadanie 1.10

Pokaż, że

$$\mathbb{P}[\exists a < b \text{ } B \text{ jest rosnący na } (a, b)] = 0.$$

Zadanie 1.11

Udowodnij, że z prawdopodobieństwem jeden, trajektorie ruchu Browna nie są jednostajnie ciągłe na $[0, +\infty)$.

Zadanie 1.12

Udowodnij **Fakt 1.6**. Niech $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie ruchem Browna. Pokaż, że

$$\mathbb{P}[\exists t_0 > 0 \text{ } t \mapsto B_t \text{ jest różniczkowalna w } t_0] = 0.$$

WSKAZÓWKA: Pokaż, że jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w pewnym punkcie $t_0 \in [0, 1)$, to dla istnieje M takie, że dla dostatecznie dużych n , istnieje $0 \leq j \leq n - 3$ takie, że

$$\forall k \in \{0, 1, 2\} \left| f\left(\frac{j+k+1}{n}\right) - f\left(\frac{j+k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{n}.$$

Wynioskuj stąd, że ruch Browna nie jest różniczkowalny na $[0, 1)$.

Dygresja analityczna**Zadanie 1.13**

Oblicz $\int_0^t s \, de^s$.

Zadanie 1.14

Pokaż, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ma nieograniczone wahanie na przedziale $[0, 1]$.

Zadanie 1.15

Niech $f(x) = \sin(x)$. Znajdź $\text{Wah}_{[0, 2\pi]}(f)$.

Zadanie 1.16

Niech $g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami niemalejącymi. Pokaż, że $f = g_1 - g_2$ ma ograniczone wahanie na $[a, b]$.

Zadanie 1.17

Pokaż, że jeżeli f ma skończone wahanie na przedziale $[a, b]$ a g jest ciągła na $[a, b]$, to g jest całkowalna względem f .

Zadanie 1.18

Uzasadnij, że jeżeli f i g są ciągłe i mają ograniczone wachanie na przedziale $[a, b]$, to zachodzi wzór na całkowanie przez części

$$\int_a^b f(s) \, dg(s) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(s) \, df(s).$$

Wywnioskuj, że

$$\int_0^t f(s) \, df(s) = \frac{1}{2}f(t)^2 - \frac{1}{2}f(0)^2.$$

Zadanie 1.19

Założmy, że f jest ciągła i ściśle rosnąca na przedziale $[a, b]$. Pokaż, że jeżeli $\int_a^b g \, df$ istnieje, to prawdziwy jest wzór na całkowanie przez podstawienie

$$\int_a^b g(s) \, df(s) = \int_{f(a)}^{f(b)} g(f^{-1}(s)) \, ds.$$

Zadanie 1.20

Niech $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$ będą podziałami odcinka $[a, b]$. Pokaż, że dla dowolnych funkcji $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$U_f(g, \mathcal{P}) \geq U_f(g, \mathcal{R}) \quad \text{oraz} \quad L_f(g, \mathcal{P}) \leq L_f(g, \mathcal{R}).$$

Zadanie 1.21

Uzasadnij, że każdej funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje normalny ciąg podziałów $\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ odcinka $[a, b]$ taki, że

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} |f(t_{k+1}^n) - f(t_k^n)| \rightarrow \text{Wah}_{[a,b]}(f).$$

Zadanie 1.22

Ustalmy funkcję $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Założmy, że całka $\int_a^b g \, df$ istnieje dla każdej ciągłej $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Pokaż, że f ma ograniczone wachanie.

WSKAZÓWKA : Korzystając z normalnego ciągu podziałów z **Zadania 1.21** rozważ ciąg funkcjonałów T_n na przestrzeni Banacha $C[a, b]$ dany wzorem

$$T_n(h) = \sum_{k=0}^{k_n-1} h(t_k^n)(f(t_{k+1}^n) - f(t_k^n)).$$

Skorzystaj z Twierdzenia Banacha-Steinhaus.

Zadanie 1.23

Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Niech

$$S_f(t) = \text{Wah}_{[a,t]}(f).$$

Pokaz, że S_f jest funkcją ciągłą.

Zadanie 1.24

Pokaż, że funkcja ma skończone wahanie wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnicą dwóch funkcji niemalejących.

Zadanie 1.25

Założmy, że funkcje f i g są ciągłe a h ma ograniczone wahanie na $[a, b]$. Pokaż, że $H(x) = \int_a^x g(t) dh(t)$ ma ograniczone wahanie oraz że $\int_a^b f dH = \int_a^b fg dh$.

Podejście**Zadanie 1.26**

Niech $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie ruchem Browna. Uzasadnij, że dla każdego $t > 0$ istnieje normalny ciąg podziałów $\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ odcinka $[0, t]$ taki, że

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} B_{t_k^n} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}) \rightarrow \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{t}{2} \quad p.w.$$

Wywnioskuj z **Zadania 1.18**, że

$$\mathbb{P} \left[\omega : \text{Wah}_{[0,t]} B(\omega) < \infty \right] = 0$$

a następnie

$$\mathbb{P} \left[\omega : \forall t > 0 \text{Wah}_{[0,t]} B(\omega) = \infty \right] = 1.$$

Zadanie 1.27

Założmy że $\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ jest normalnym ciągiem podziałów odcinka $[0, t]$. Pokaż, że

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_{t_{k+1}^n} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}) \xrightarrow{L^2(\Omega)} \frac{1}{2} B_t^2 + \frac{1}{2} t.$$

Porównaj wynik z granicą w **Przykładzie 1.20**.

Procesy stochastyczne

Streszczenie Po zapoznaniu się z podstawami rozkładów procesów stochastycznych przejdziemy do badania ciągłości trajektorii. Po dowodzie twierdzenia o ciągłej modyfikacji skupimy się na ruchu Browna, który będzie kluczowy przy konstrukcji i badaniu własności całki stochastycznej. W szczególności przedyskutujemy mocną własność Markowa, która w przyszłości pomoże nam badać własności rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych.

W tym rozdziale poznamy podstawy teorii procesów stochastycznych. Zaczniemy od rozkładów i własności trajektorii procesów. W szczególności udzielimy odpowiedzi na pytanie o poprawność **Definicji 1.4**. Omówimy także filtracje i czasy zatrzymania w czasie ciągłym. Wreszcie omówimy procesy progresywnie mierzalne, które będziemy całkować w **rozdziale 4**. Więcej informacji wprowadzających można znaleźć w drugim rozdziale [Bal17].

2.1 Podstawowe definicje

Proces stochastyczny można określić na wiele różnych sposobów. W **rozdziale 1** podjęliśmy próbę zdefiniowania procesu poprzez wyznaczenie równania, które powinien spełniać, co prowadziło do pewnych technicznych trudności. Niewątpliwie najprostszym sposobem zdefiniowania procesu stochastycznego jest podanie jawnej postaci zmiennej $X_t(\omega)$.

Definicja 2.1

Niech E_1, E_2, \dots będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\text{Exp}(\lambda)$ z gęstością $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. Niech $S_n = \sum_{k=1}^n E_k$ dla $n \geq 1$. Wówczas proces stochastyczny $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ dany przez

$$N_t = \#\{n \geq 1 : S_n \in [0, t]\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[0, t]}(S_n)$$

nazywamy *jednorodnym procesem Poissona z parametrem λ* .

Powyższa definicja, pomimo swej prostoty, nie mówi wprost o kluczowych własnościach procesu Poissona. Korzystając z niej łatwo jest naszkicować przykładowe trajektorie N , ale struktura probabilistyczna tego procesu może nie być oczywista. W praktyce bardzo często łatwiej jest korzystać z własności procesu Poissona niż za każdym razem odwoływać się do jawnej definicji. Własności N odwołują się do jego przyrostów.

Definicja 2.2

Powiemy, że proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in T}$ ma

(i) *stacjonarne przyrosty* jeżeli dla każdych $s, t, h \geq 0$ takich, że $s, t, s + h, t + h \in T$,

$$X_{t+h} - X_{s+h} \stackrel{d}{=} X_t - X_s.$$

(ii) *niezależne przyrosty* jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i każdego rosnącego ciągu $t_0, t_1, \dots, t_n \in T$ zmienne

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

są niezależne.

Własności (B2) oraz (B3) **Definicji 1.4** ruchu Browna mówią właśnie, że B ma stacjonarne i niezależne przyrosty. Okazuje się, że proces Poissona również cieszy się tymi własnościami. Aby się o tym przekonać, musimy wykonać odrobinę pracy. Przez prostą indukcję można pokazać (**Zadanie 2.2**), że jeżeli E_1, E_2, \dots są iid z rozkładem $\text{Exp}(\lambda)$, to $S_n = \sum_{k=1}^n E_k$ ma rozkład Erlanga o gęstości

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Z powyższego łatwo wywnioskować, że dla każdego $t > 0$, zmienna losowa N_t ma rozkład Poissona. Dodatkowo własność braku pamięci rozkładu wykładniczego powoduje, że proces N ma stacjonarne i niezależne przyrosty.

Fakt 2.3

Niech N będzie jednorodnym procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Wówczas

- dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!};$$

- N ma stacjonarne przyrosty, czyli dla $t > s > 0$, $N_t - N_s \stackrel{d}{=} N_{t-s}$;
- N ma niezależne przyrosty: dla dowolnych $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ zmienne losowe $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ są niezależne;
- trajektorie N są prawostronnie ciągłe.

Dowód. Pozostawiamy jako cel **Zadań 2.3, 2.31** oraz **2.32**. □

Innym (niejawnym) sposobem zdefiniowania procesu stochastycznego jest podanie jego kluczowych własności, tak jak zrobiliśmy to w przypadku **Definicji 1.4**. Wadą tego sposobu jest konieczność wykazania, że definicja jest poprawna. Przykładowo, należy mieć pewność, że jest tylko jeden proces który spełnia wymieniane własności. To w jakim sensie rozumiemy jednoznaczność doprecyzujemy w dalszej części tego rozdziału. Dodatkowo trzeba wiedzieć, że taki proces w ogóle istnieje. Przykładowo nie wykazaliśmy jeszcze, że proces B spełniający własności (B1)-(B4) istnieje. Dokonamy tego pod koniec tego rozdziału. Możliwe jest również zdefiniowanie ruchu Browna wzorem, lecz wymaga to nieco pracy (patrz **Zadanie 2.46**).

W praktyce to, czy korzystać będziemy z jawnej czy niejawnej definicji procesu, zależy oczywiście od tego, który z opisów jest bardziej przejrzysty. W przypadku ruchu Browna i Procesu Poissona wygodniejszy jest niejawny opis podany w **Definicji 1.4** i **Fakcie 2.3**. Gdy jednak opis niejawny jest bardzo skomplikowany, bądź daje nam zbyt mało własności procesu zmuszeni jesteśmy do pracy z jawną definicją.

Definicja 2.4

Mostem Browna nazywamy proces stochastyczny $W = (W_t)_{t \in [0,1]}$ zadany przez

$$W_t = B_t - tB_1, \quad t \in [0,1],$$

gdzie B jest ruchem Browna.

Zauważmy, że $\mathbb{P}[W_1 = 0] = 1$. Można wyrachować, że $\text{Cov}(W_s, W_t) = s(1-t)$ dla $0 < s < t < 1$ (**Zadanie 2.4**). Okazuje się, że most Browna nie ma stacjonarnych ani niezależnych przyrostów (**Zadanie 2.5**).

2.2 Rozkłady procesów stochastycznych

Każdy proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in T}$ możemy utożsamić z jego trajekcją, czyli funkcją $X(\omega): T \rightarrow \mathbb{R}$ będącą losowym elementem zbioru zbioru

funkcji $T \rightarrow \mathbb{R}$ oznaczanym przez \mathbb{R}^T . Wówczas proces X staje się odwzorowaniem $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^T$. Aby móc skutecznie analizować proces stochastyczny pod tym kątem musimy zrozumieć strukturę borelowską na przestrzeni funkcji $T \rightarrow \mathbb{R}$.

Definicja 2.5

Zbiory postaci

$$\{x \in \mathbb{R}^T : (x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) \in A\} \quad t_1, t_2, \dots, t_n \in T, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, nazywamy *zbiorami cylindrycznymi*. Przez $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ oznaczamy będziemy najmniejsze σ -ciało zawierające zbiory cylindryczne i nazywać je będziemy σ -ciałem zbiorów cylindrycznych.

Zbiory cylindryczne to takie podzbiory \mathbb{R}^T , które zależą od skończonej wielu osi. Natomiast zbiory z $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ zależą od przeliczalnie wielu osi. To intuicyjne i luźne określenie doprecyzowane jest przez następujący rezultat.

Fakt 2.6

Jeżeli $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, to istnieje przeliczalny zbiór $T_0 \subseteq T$ taki, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}^T$ są takie, że $x_t = y_t$ dla $t \in T_0$, to $x \in A \Leftrightarrow y \in A$.

Dowód. Dla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ zbiór T_0 którego istnienie postulujemy to zbiór osi, od których zależy zbiór A . Dowód istnienia T_0 jest przedmiotem **Zadania 2.6**. \square

Przykład 2.7

Zbiór $\{x : x_\pi^2 + x_1^2 \leq 1\}$, zależny od osi π i 1 jest zbiorem cylindrycznym, więc w szczególności należy do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. Korzystając z **Faktu 2.6** łatwo pokazać, że $\{x : \sup_{t \in [0,1]} x_t \leq 1\}$ nie należy do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. Istotnie, dla każdego przeliczalnego $T_0 \in [0,1]$ wystarczy rozważyć funkcje $x_t = 1$ oraz $y_t = \mathbb{1}_{T_0}(t) + 2\mathbb{1}_{[0,1] \setminus T_0}(t)$.

Przypomnijmy, że dla zmiennej losowej Z jej rozkład określony jest wzorem $\mu^Z(A) = \mathbb{P}[X \in A]$ dla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Rozkład procesu stochastycznego określane jest w analogiczny sposób. Należy jednak przedtem upewnić się, że $\{X \in C\} \in \mathcal{F}$ dla dowolnego $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. W tym celu, interpretując X jako funkcję $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^T$, rozważmy rodzinę

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T) : \{\omega : X(\omega) \in C\} \in \mathcal{F}\} \\ &= \{C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T) : X^{-1}[C] \in \mathcal{F}\}. \end{aligned}$$

Korzystając z własności przeciwobrazu nietrudno pokazać, że rodzina $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ jest σ -ciałem zawierającym wszystkie zbiory cylindryczne (ponie-

waż X_t jest zmienną losową dla każdego $t \in T$), więc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T) \subseteq \mathcal{C}$. Pokazuje to, że dla dowolnego $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$, $\{X \in C\} \in \mathcal{F}$.

Definicja 2.8

Rozkładem procesu stochastycznego $X = (X_t)_{t \in T}$ nazywamy miarę probabilistyczną μ^X na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ daną wzorem

$$\mu^X(C) = \mathbb{P}[X \in C], \quad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T).$$

W przypadku zmiennych losowych Z_1 i Z_2 , do tego że $Z_1 \stackrel{d}{=} Z_2$ potrzeba i wystarcza, aby dla każdego t , $\mathbb{P}[Z_1 \leq t] = \mathbb{P}[Z_2 \leq t]$. Dzieje się tak, ponieważ rodzina zbiorów $\{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}$ generuje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Podobnie jest w przypadku procesów stochastycznych. W celu doprecyzowania opisu tego zjawiska posłużymy się rozkładami skończeniowymi.

Definicja 2.9

Dla procesu stochastycznego $X = (X_t)_{t \in T}$ i $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ parami różnych definiujemy miarę $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}^X$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ jako rozkład wektora losowego $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$. Innymi słowy

$$\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}^X(A) = \mathbb{P}[(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \in A], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Rodzinę rozkładów

$$\left\{ \mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}^X : n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_n \in T \text{ parami różne} \right\}$$

nazywamy *rodziną rozkładów skończeniowych procesu X* .

Przykład 2.10

Własności (B1), (B2) i (B3) **Definicji 1.4** opisują rozkłady skończeniowymi ruchu Browna B . Okazuje się, że są one Gaussowskie, dokładniej dla rosnącego ciągu $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$,

$$\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}^B(dx) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |A|}} \exp \left\{ -\langle A^{-1}x|x \rangle / 2 \right\} dx, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie $A = (A_{i,j})_{i,j \leq n}$, $A_{i,j} = t_i \wedge t_j$. Sprawdzenie powyższego wzoru jest przedmiotem zadania **Zadania 2.9**.

Definicja 2.11

Powiemy, że procesy stochastyczne $X = (X_t)_{t \in T}$ oraz $Y = (Y_t)_{t \in T}$ są *równoważne*, jeżeli mają takie same rozkłady skończeniowymiarowe. Innymi słowy, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz dowolnych $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$,

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}).$$

Jeżeli dwa procesy mają ten sam rozkład, to są równoważne. Zachodzi również wynikanie odwrotne.

Fakt 2.12

Jeżeli procesy $X = (X_t)_{t \in T}$ i $Y = (Y_t)_{t \in T}$ są równoważne, to mają taki sam rozkład na przestrzeni $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$.

Dowód. Rodzina zbiorów cylindrycznych \mathcal{A} tworzy π -układ, a rodzina

$$\mathcal{C} = \{C \subseteq \mathbb{R}^T : \mathbb{P}[X \in C] = \mathbb{P}[Y \in C]\},$$

jest λ -układem zawierającym \mathcal{A} . Zatem z twierdzenia o π i λ układach, \mathcal{C} zawiera również σ -ciało generowane przez \mathcal{A} , czyli $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$. \square

Uwaga 2.13

Przypomnijmy, że Twierdzenie o π i λ układach orzeka, że jeżeli λ -układ \mathcal{C} (rodzina zamknięta na przeliczalne, wstępujące sumy i branie dopełnień) zawiera π -układ \mathcal{A} (rodzinę zamkniętą na skończone przekroje), to \mathcal{C} zawiera również σ -ciało generowane przez \mathcal{A} .

Wprowadzając ruch Browna w **Definicji 1.4** opisaliśmy zaledwie jego rozkłady skończeniowymiarowe. Rzeczywiście, własności (B1), (B2) i (B3) dokładnie charakteryzują rozkład wektora losowego $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ (patrz **Przykład 2.10**). **Fakt 2.12** zapewnia zatem, że własności (B1) (B2) i (B3), z dokładnością do rozkładu na \mathbb{R}^T , opisują co najwyżej jeden proces stochastyczny.

Każdy proces stochastyczny wyznacza rodzinę rozkładów skończeniowymiarowych. Zobaczmy teraz czym charakteryzują się takie rozkłady. W tym celu odwrócimy problem. Rozważymy dowolną rodzinę rozkładów

$$\{v_{t_1, t_2, \dots, t_n} : n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_n \in T \text{ parami różne}\}$$

taką, że v_{t_1, t_2, \dots, t_n} jest rozkładem na \mathbb{R}^n . Nie zakładamy a priori, że v_{t_1, \dots, t_n} pochodzą od procesu stochastycznego. Zbadamy kiedy istnieje proces stochastyczny X taki, że $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}^X = v_{t_1, t_2, \dots, t_n}$ dla dowolnych $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ parami różnych. Okazuje się, że takie rodziny v_{t_1, t_2, \dots, t_n} można dokładnie scharakteryzować.

Definicja 2.14

Powiemy, że rodzina rozkładów

$$\{v_{t_1, t_2, \dots, t_n} : n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_n \in T \text{ parami różne}\}$$

spełnia warunki zgodności jeżeli

1. Dla dowolnej permutacji (i_1, i_2, \dots, i_n) liczb $(1, 2, \dots, n)$ i zbiorów $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$v_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(A_{i_1} \times A_{i_2} \times \dots \times A_{i_n}) = v_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n).$$

2. Dla dowolnych $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} v_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{i-1} \times \mathbb{R} \times A_{i+1} \times \dots \times A_n) \\ = v_{t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \dots \times A_n). \end{aligned}$$

Rodzina rozkładów skończeniowymiarowych dowolnego procesu stochastycznego X spełnia warunki zgodności. Okazuje się, że są to jedyne takie rodziny. Dokładniej, każda rodzina rozkładów spełniająca warunki zgodności jest rodziną rozkładów skończeniowymiarowych pewnego procesu stochastycznego.

Twierdzenie 2.15 (Kołmogorowa o istnieniu procesu)

Założmy, że rodzina

$$\{v_{t_1, t_2, \dots, t_n} : n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_n \in T \text{ parami różne}\} \quad (2.1)$$

spełnia warunki zgodności. Wówczas istnieje proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in T}$ mający skończeniowymiarowe rozkłady równe (2.1). Dokładniej, dla dowolnych $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ parami różnych

$$v_{t_1, t_2, \dots, t_n} = \mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}^X \stackrel{d}{=} (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}).$$

Dowód. Można znaleźć w drugim rozdziale [KS12]. □

Widzimy teraz, że definiowanie procesu stochastycznego poprzez wypisanie jego własności, tak jak w **Definicji 1.4**, jest poprawne wtedy i tylko wtedy, gdy wymienione własności charakteryzują zgodną rodzinę rozkładów skończeniowymiarowych.

Wniosek 2.16

Założmy, że dana jest rodzina rozkładów

$$\{v_{t_1, t_2, \dots, t_n} : n \in \mathbb{N}, t_1, t_2, \dots, t_n \in T, t_1 < t_2 < \dots < t_n\}$$

spełniająca warunek

$$\begin{aligned} v_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{i-1} \times \mathbb{R} \times A_{i+1} \times \dots \times A_n) \\ = v_{t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \dots \times A_n) \end{aligned}$$

dla wszystkich $n \geq 2$, $k \leq n$ i $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Wówczas istnieje proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in T}$ taki, że dla $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ wektor $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ ma rozkład v_{t_1, t_2, \dots, t_n} .

Dowód. Dla dowolnych $t_1, \dots, t_n \in T$ parami różnych istnieje dokładnie jedna permutacja (i_1, i_2, \dots, i_n) liczb $(1, 2, \dots, n)$ taka, że $t_{i_1} < t_{i_2} < \dots < t_{i_n}$. Określamy

$$v_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = v_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(A_{t_1} \times A_{t_2} \times \dots \times A_{t_n})$$

Tak zdefiniowana rodzina miar spełnia warunki zgodności. \square

Aby zilustrować **Twierdzenie 2.15** pokażemy, że istnieje proces $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ spełniający warunki (B1)-(B3) **Definicji 1.4**. Kładziemy dla $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$,

$$\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n} \stackrel{d}{=} \left(X_1, X_1 + X_2, \dots, \sum_{j=1}^n X_j \right),$$

gdzie X_1, X_2, \dots, X_n są niezależne takie, że $X_k \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, t_k - t_{k-1})$. Warunek obecny we **Wniosku 2.16** wynika z tego, że jeśli $X_i \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$ oraz $X_{i+1} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$, to $X_i + X_{i+1} \stackrel{d}{=} X' \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_{i-1})$. Rzeczywiście, mamy

$$\begin{aligned} \mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{i-1} \times \mathbb{R} \times A_{i+1} \times \dots \times A_n) \\ = \mathbb{P} \left[X_1 \in A_1, \dots, \sum_{j=1}^{i-1} X_j + X_i \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{i-1} X_j + X_i + X_{i+1} \in A_{i+1}, \right. \\ \left. \dots, \sum_{j=1}^{i-1} X_j + X_i + X_{i+1} + \sum_{j=i+2}^n X_j \in A_n \right] \\ = \mathbb{P} \left[X_1 \in A_1, \dots, \sum_{j=1}^{i-1} X_j + X' \in A_{i+1}, \dots, \sum_{j=1}^{i-1} X_j + X' + \sum_{j=i+2}^n X_j \in A_n \right] \\ = \mu_{t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \dots \times A_n). \end{aligned}$$

Istnieje zatem proces $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ taki, że dla $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$,

$$(\tilde{B}_{t_1}, \tilde{B}_{t_2}, \dots, \tilde{B}_{t_n}) \stackrel{d}{=} \mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}^{\tilde{B}} = \mu_{t_1, t_2, \dots, t_n} \stackrel{d}{=} \left(X_1, X_1 + X_2, \dots, \sum_{j=1}^n X_j \right).$$

Stąd

$$(\tilde{B}_{t_1}, \tilde{B}_{t_2} - \tilde{B}_{t_1}, \dots, \tilde{B}_{t_n} - \tilde{B}_{t_{n-1}}) \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Z powyższego proces $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ spełnia warunki (B1)-(B3) **Definicji 1.4**.

Uwaga 2.17

Każdy proces spełniający warunki (B1)-(B3) **Definicji 1.4** wyznacza ten sam rozkład na σ -ciele zbiorów cylindrycznych. Podobnie jak w przypadku zmiennych losowych, utożsamiamy ze sobą procesy posiadające ten sam rozkład i każdy z takich procesów nazywamy "praniem Browna". Każdy proces spełniający warunki (B1)-(B4) **Definicji 1.4** będziemy nazywali ruchem Browna.

Fakt 2.18

Niech $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie ruchem Browna. Niech $s, c > 0$. Wówczas ruchami Browna są również

$$B_t^{(1)} = -B_t, \quad B_t^{(2)} = B_{t+s} - B_s, \quad B_t^{(3)} = c^{-1/2} B_{ct}.$$

Dowód. Pozostawiamy jako bezpośredni rachunek w **Zadaniu 2.15**. \square

2.3 Ciągłość trajektorii

Przypomnijmy, że na proces stochastyczny możemy patrzeć jak na losową funkcję $t \mapsto X_t$. Zobaczymy jak rozkłady skończeniowymiarowe wpływają na regularność trajektorii procesu stochastycznego. W szczególności pokażemy, że proces \tilde{B} spełniający warunki (B1)-(B3) **Definicji 1.4** można poprawić tak, by miał ciągle trajektorie. Regularność trajektorii, czyli funkcji $t \mapsto X_t$, z pozoru może się wydawać odległa od własności rozkładów wektorów losowych $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ dla skończonych kolekcji $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$. Jednakże odpowiednia kontrola nad wyrażeniami typu

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\beta = \int |x - y|^\beta \mu_{t,s}^X(dx dy)$$

przy $s \rightarrow t$ pozwala wnioskować, że $X_s \rightarrow X_t$ p.w. Przykład szacowania wystarczającego do takiego wnioskowania jest podany w Twierdzeniu Kołmogorowa o ciągłej modyfikacji procesu.

Definicja 2.19

Rozważmy dwa procesy stochastyczne X oraz Y określone na zbiorze T . Powiemy, że

- X jest *modyfikacją* Y , jeśli dla każdego $t \in T$, $\mathbb{P}[X_t = Y_t] = 1$.
- X i Y są *nierozróżnialne*, jeżeli $\mathbb{P}[X_t = Y_t, t \in T] = 1$.

Zauważmy, że jeżeli proces X jest modyfikacją procesu Y , to oba procesy są równoważne, ponieważ wtedy

$$\mathbb{P}[X_{t_1} = Y_{t_1}, X_{t_2} = Y_{t_2}, \dots, X_{t_n} = Y_{t_n}] = 1.$$

Oczywiście, jeżeli dwa procesy są nierozróżnialne, to są one swoimi modyfikacjami. Przeciwna implikacja w pełnej ogólności nie ma miejsca, co ilustruje następujący przykład.

Przykład 2.20

Niech U będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $T = [0, 1]$. Niech

$$X_t = 0, \quad Y_t = \mathbb{1}_{\{t\}}(U), \quad t \in T.$$

Wówczas X jest modyfikacją Y ale te dwa procesy nie są nierozróżnialne.

Fakt 2.21

Jeżeli procesy $X = (X_t)_{t \in T}$ i $Y = (Y_t)_{t \in T}$ są procesami o prawostronnie ciągłych trajektoriach i X jest modyfikacją Y , to te procesy są nierozróżnialne.

Dowód. Wybierzmy przeliczalny, gęsty podzbiór $T_0 \subset T$ zawierający dodatkowo $\sup T$, jeśli T jest przedziałem prawostronnie domkniętym. Niech

$$A = \{X_t = Y_t, t \in T_0\}.$$

Wówczas $\mathbb{P}[A] = 1$ jako przeliczalny przekrój zbiorów o prawdopodobieństwie 1. Jeśli $\omega \in A$ i $t \in T$, to

$$X_t(\omega) = \lim_{s \rightarrow t^+, s \in T_0} X_s(\omega) = \lim_{s \rightarrow t^+, s \in T_0} Y_s(\omega) = Y_t(\omega).$$

Wobec powyższego

$$\mathbb{P}[X_t = Y_t, t \in T] \geq \mathbb{P}[A] = 1.$$

□

Zanim przejdziemy do zapowiadanej ciągłej modyfikacji przypomnijmy, że funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest hölderowsko ciągła z wykładnikiem γ , jeżeli istnieje stała C taka, że dla dowolnych $x, y \in [a, b]$, zachodzi $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\gamma$.

Twierdzenie 2.22 (Kolmogorowa o ciągłej modyfikacji)

Założmy, że $X = (X_t)_{t \in [a,b]}$ jest procesem takim, że

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\beta \leq C|t - s|^{\alpha+1}, \quad s, t \in T \quad (2.2)$$

dla pewnych stałych $\alpha, \beta, C > 0$. Wówczas dla dowolnego $\gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ istnieje proces $Y = (Y_t)_{t \in [a,b]}$ będący modyfikacją procesu X taki, że trajektorie procesu Y są hölderowsko ciągłe z wykładnikiem γ .

Do dowodu potrzebny nam będzie jeden techniczny lemat. Dla uproszczenia będziemy zakładać, że $[a, b] = [0, 1]$.

Lemat 2.23

Założmy, że $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ jest procesem takim, że

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\beta \leq C|t - s|^{\alpha+1}$$

dla pewnych stałych $\alpha, \beta, C > 0$. Niech

$$T_0 = \left\{ \frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \dots, 2^n \right\}.$$

Wówczas dla dowolnej $\gamma < \frac{\alpha}{\beta}$ istnieje zbiór miary zero N taki, że

$$X(\omega): T_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

jest hölderowsko ciągłe z wykładnikiem γ dla $\omega \notin N$.

Dowód. Ustalmy $\gamma < \frac{\alpha}{\beta}$. Połóżmy

$$A_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : k = 0, 1, \dots, 2^n \right\}$$

oraz

$$\Gamma_n = \{ |X_y - X_z| > 2^{-n\gamma} \text{ dla pewnych } y, z \in A_n \text{ takich, że } z - y = 2^{-n} \}.$$

Zbiory Γ_n dla $n \in \mathbb{N}$ to kolekcja zdarzeń na których trajektorie X nie są hölderowsko ciągłe a świadkami tego są $z, y \in A_n$. Pozostaje pokazać, że te zbiory wyczerpują wszystkie zdarzenia na których trajektorie X nie są hölderowsko ciągłe. Dla $y, z \in A_n$ takich, że $z - y = 2^{-n}$ mamy

$$\mathbb{P} [|X_y - X_z| > 2^{-n\gamma}] \leq 2^{n\gamma\beta} \mathbb{E}|X_y - X_z|^\beta \leq C 2^{n\gamma\beta} |z - y|^{\alpha+1} = C 2^{n(\beta\gamma - \alpha - 1)}.$$

Wszystkich par $y, z \in A_n$ takich, że $z - y = 2^{-n}$ jest $2^n - 1$. Wykorzystując powyższe szacowanie otrzymujemy dla $\mu = \alpha - \beta\gamma > 0$,

$$\mathbb{P}[\Gamma_n] \leq C2^n 2^{n(\beta\gamma - \alpha - 1)} = 2^{-\mu n}.$$

Niech

$$N = \limsup_n \Gamma_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{m \geq n} \Gamma_m.$$

Pokażemy, że N ma postulowane własności. Nasze szacowania zapewniają $\sum_n \mathbb{P}[\Gamma_n] < \infty$, więc z lematu Borela-Cantelliego $\mathbb{P}[N] = 0$. Chcąc zbadać ciągłość ustalmy

$$\omega \in N^c = \liminf_n \Gamma_n^c = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{k \geq n} \Gamma_k^c.$$

Wówczas $\omega \in \Gamma_n^c$ dla dostatecznie dużych n . Powiedzmy, że $\omega \in \Gamma_k^c$ dla $k > n = n(\omega)$. Ustalmy $v > n$ oraz $y \in T_0$. Wówczas $y \in [i2^{-v}, (i+1)2^{-v})$ dla pewnego i . Skoro y jest postaci $\frac{l}{2^m}$ dla pewnych l oraz m , to y ma skończone rozwinięcie binarne. Innymi słowy istnieją $\alpha_k \in \{0, 1\}$ takie, że

$$y = i2^{-v} + \sum_{k=v+1}^{+\infty} \alpha_k 2^{-k},$$

gdzie $\alpha_k = 0$ dla dostatecznie dużych k . Korzystając z nierówności trójkąta oraz tego, że $\omega \in N^c$,

$$\begin{aligned} |X_y - X_{i2^{-v}}| &= |X(y) - X(i2^{-v})| \\ &\leq \sum_{j=v}^{\infty} \left| X \left(i2^{-v} + \sum_{k=v+1}^j \alpha_k 2^{-k} \right) - X \left(i2^{-v} + \sum_{k=v+1}^{j+1} \alpha_k 2^{-k} \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=v}^{\infty} C2^{-j\gamma} \leq C \frac{2^\gamma}{1 - 2^{-\gamma}} 2^{-\gamma v}. \end{aligned}$$

Niech teraz $z, y \in T_0$ będą takie, że $|z - y| \leq 2^{-v}$. Jeżeli $y, z \in [i2^{-v}, (i+1)2^{-v})$ dla pewnego i , to

$$|X_z - X_y| \leq |X_z - X_{i2^{-v}}| + |X_{i2^{-v}} - X_y| \leq C \frac{2^{-v\gamma+1+\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}}.$$

W przeciwnym wypadku $(i-1)2^{-v} \leq y < i2^{-v} \leq z < (i+1)2^{-v}$ dla pewnego i . Wówczas

$$\begin{aligned} |X_z - X_y| &\leq |X_z - X_{i2^{-v}}| + |X_{(i-1)2^{-v}} - X_y| + |X_{i2^{-v}} - X_{(i-1)2^{-v}}| \\ &\leq C \left(1 + \frac{2^{1+\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} \right) 2^{-v\gamma}. \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że dla dowolnych $y, z \in T_0$ takich, że $|y - z| \leq 2^{-v}$ mamy $|X_z - X_y| \leq K2^{-\gamma v}$, gdzie K nie zależy od $v > n$. W szczególności uzasadnia to, że $\sup_{t \in T_0} X_t(\omega) = M(\omega) < \infty$. Na koniec wystarczy sprawdzić,

że uzyskany warunek pociąga hölderowską ciągłość $X(\omega): T_0 \rightarrow \mathbb{R}$ z wykładnikiem γ . Niech teraz $y, z \in T_0$ będą dowolne. Rozważmy przypadki $|y - z| \leq 2^{n(\omega)}$ oraz $|y - z| > 2^{n(\omega)}$. W pierwszym wybieramy $v \geq n$ takie, że $2^{-v-1} < |z - y| \leq 2^{-v}$. Wówczas

$$|X_z - X_y| \leq K2^{-\gamma v} \leq K2^\gamma |z - y|^\gamma.$$

Jeżeli $|y - z| > 2^{n(\omega)}$, to

$$|X_z - X_y| \leq M2^{\gamma n(\omega)+1} |y - z|^\gamma.$$

□

Dowód Twierdzenia 2.22. Z **Lematu 2.23** $X(\omega): T_0 \rightarrow \mathbb{R}$ jest hölderowsko ciągła z wykładnikiem γ dla $\omega \notin N$. Dla $n \notin N$ niech $Y(\omega): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłym rozszerzeniem $X(\omega): T_0 \rightarrow \mathbb{R}$. Wówczas $Y(\omega)$ również jest hölderowsko ciągła z wykładnikiem γ . Dla $\omega \in N$ niech $Y_t(\omega) = 0$. Pozostaje sprawdzić, że $Y = (Y_t)_{t \in [0, 1]}$ jest modyfikacją X . Oczywiście $X_t = Y_t$ p.w. dla $t \in T_0$. Dla $t \in [0, 1] \setminus T_0$ istnieje ciąg $t_n \in T_0$ taki, że $t_n \rightarrow t$. Nierówność Markowa w połączeniu z nierównością (2.2) pociąga

$$\mathbb{P}[|X_{t_n} - X_t| > \delta] \leq C\delta^\beta |t_n - t|^{\alpha+1} \rightarrow 0,$$

czyli $X_{t_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t$. W rezultacie $X_{t_{n_k}} \rightarrow X_t$ p.w. dla pewnego podciągu $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Z drugiej strony $X_{t_{n_k}} = Y_{t_{n_k}} \rightarrow Y_t$ z ciągłości trajektorii Y . To pokazuje, że dla dowolnego $t \in [0, 1]$, $X_t = Y_t$ p.w. □

Łatwo przekonać się na przykładzie, że założenie $\beta > 0$ jest istotne.

Przykład 2.24

Niech U będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $T = [0, 1]$. Połóżmy $X_t = \mathbb{1}_{[U, 1]}(t)$. Wówczas dla $s < t$,

$$\mathbb{E} \left[|X_t - X_s|^\beta \right] = \mathbb{P}[U \in [s, t]] = |t - s|.$$

Proces $X = (X_t)_{t \in [0, 1]}$ nie posiada jednak ciągłej modyfikacji. Istotnie, jeżeli Y jest modyfikacją X , to $\mathbb{P}[Y \in \{0, 1\}] = 1$ oraz $\mathbb{P}[Y_0 = 0, Y_1 = 1] = 1$, więc Y nie może mieć ciągłych trajektorii.

Przykład 2.25

Nieco naturalniejszym przykładem procesu, który nie posiada ciągłej modyfikacji jest proces Piossona $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Zauważmy najpierw, że $N_t \in \mathbb{N}$ oraz że trajektorie N nie są stałe. N nie może mieć więc ciągłej modyfikacji. Zauważmy, że

$$\mathbb{E} \left[|N_t - N_s|^2 \right] = \lambda |t - s|.$$

Uwaga 2.26

Twierdzenie 2.22 jest prawdziwe, gdy przedział $[a, b]$ zastąpimy nieskończonym przedziałem, o ile hölderowskość trajektorii zastąpimy lokalną hölderowskością (tzn. hölderowskością na każdym przedziale skończonym). Szczegóły rozumowania są przedmiotem **Zadania 2.22**.

Przykład 2.27

Niech $\tilde{B} = (\tilde{B}_t)_{t \in [0, +\infty)}$ będzie procesem spełniającym warunki (B1)-(B3)

Definicji 1.4. Dla $t > s$ i $p > 2$

$$\mathbb{E}|\tilde{B}_t - \tilde{B}_s|^p = \mathbb{E}(t-s)^{p/2}(\tilde{B}_1)^p = \mathbb{E}[(\tilde{B}_1)^p](t-s)^{p/2-1+1}.$$

Możemy zastosować **Twierdzenie 2.22** z $C = \mathbb{E}[(\tilde{B}_1)^p]$, $\alpha = p/2 - 1$ i $\beta = p$ aby stwierdzić, że dla dowolnego $p > 2$ i dowolnej $\gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ istnieje modyfikacja $B = (B_t)_{t \in [0, \infty)}$ procesu \tilde{B} taka, że trajektorie B są lokalnie hölderowsko ciągłe z wykładnikiem γ . W szczególności trajektorie B są ciągłe. Wówczas proces stochastyczny B spełnia warunki (B1)-(B4) **Definicji 1.4**. Wobec dowolności $p > 2$ widzimy, że trajektorie ruchu Browna są lokalnie hölderowsko ciągłe z dowolnym wykładnikiem $\gamma < \frac{1}{2}$.

Przyjrzyjmy się ciągłości trajektorii B nieco dokładniej. Wiemy, że $B_t \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow 0$ a wykazana właśnie hölderowskość zapewnia, że zbieżność zachodzi prawie tak szybko jak \sqrt{t} . Dokładniej dla dowolnego $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ istnieje losowa stała K_ε taka, że

$$|B_t| = |B_t - B_0| \leq K_\varepsilon t^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

co pociąga za sobą

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{t^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} = 0, \quad \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Dociekliwy czytelnik zadałby w tym miejscu pytanie o dokładne tempo zbieżności B_t do 0 przy $t \rightarrow 0$. Okazuje się, że dla małych t , B_t istotnie jest nieco większy niż \sqrt{t} .

Twierdzenie 2.28 (Prawo iterowanego logarytmu)

Niech $B = (B_t : t \in \mathbb{R}_+)$ będzie ruchem Browna. Wówczas

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log \left(\frac{1}{t} \right)}} = 1 \quad \text{p.w.}$$

Podobnie jak poprzednio dowód polega na zmyślnym zastosowaniu nierówności Czebyszewa w połączeniu z lematem Borela-Cantelliego. Do realizacji tego planu potrzebne nam będą dwa pomocnicze lematy.

Lemat 2.29

Niech B będzie ruchem Browna. Wówczas dla każdych $t, x > 0$,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, t]} B_s > x \right) \leq 2\mathbb{P}(B_t > x).$$

Dowód. Ustalmy $t > 0$. Niech $\mathcal{P}_n = \{t_k^n\}_{k \leq k_n}$ będzie normalnym ciągiem podziałów odcinka $[0, t]$. Niech $\tau = \inf\{s \in \mathcal{P}_n : B_s > x\}$. Wówczas korzystając z niezależności przyrostów B ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_t > x) &\geq \mathbb{P}(B_t - B_\tau \geq 0, \tau < \infty) \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{P}(B_t - B_{t_j^n} \geq 0, B_{t_j^n} > x \max_{i < j} B_{t_i^n} \leq x) \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} \frac{1}{2} \mathbb{P}(B_{t_j^n} > x \max_{i < j} B_{t_i^n} \leq x) = \frac{1}{2} \mathbb{P} \left(\sup_{s \in \mathcal{P}_n} B_s > x \right). \end{aligned}$$

Przechodząc z $n \rightarrow \infty$ i korzystając z monotoniczności $\sup_{s \in \mathcal{P}_n} B_s$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{s \in \mathcal{P}_n} B_s > x \right) = \mathbb{P} \left(\bigcup_n \left\{ \sup_{s \in \mathcal{P}_n} B_s > x \right\} \right) = \mathbb{P} \left(\sup_{s \in \bigcup_n \mathcal{P}_n} B_s > x \right).$$

Korzystając z ciągłości trajektorii $\sup_{s \in \bigcup_n \mathcal{P}_n} B_s = \sup_{s \in [0, t]} B_s$. Podsumowując

$$\mathbb{P}(B_t > x) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, t]} B_s > x \right)$$

co kończy dowód. □

Lemat 2.30

Jeżeli $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ to, dla każdego $x > 0$ zachodzą nierówności

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(N > x) \leq \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Dowód. To klasyczne oszacowanie na ogony rozkładu normalnego pozostawiamy czytelnikowi jako **Zadanie 2.26** □

Dowód Twierdzenia 2.28. Zaczniemy od uzasadnienia nierówności

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log \left(\frac{1}{t}\right)}} \leq 1. \quad (2.3)$$

Niech $t_n = q^n$ dla $q \in (0, 1)$, $c > 0$ i

$$A_n = \left\{ \sup_{t_{n+1} \leq s \leq t_n} B_s - c \sqrt{s \log \log \left(\frac{1}{s} \right)} > 0 \right\}.$$

Pokażemy, że dla $c > \sqrt{2}$ z prawdopodobieństwem jeden zachodzi tylko skończenie wiele zdarzeń A_n . To uzasadni (2.3). Odwołując się do **Lematu 2.29** oraz **Lematu 2.30**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &\leq \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t_n} B_s > c \sqrt{t_{n+1} \log \log \left(\frac{1}{t_{n+1}} \right)} \right) \\ &\leq 2\mathbb{P} \left(B_{t_n} > c \sqrt{t_{n+1} \log \log \left(\frac{1}{t_{n+1}} \right)} \right) \\ &= 2\mathbb{P} \left(\frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n}} > c \sqrt{q \log \log \left(\frac{1}{t_{n+1}} \right)} \right) \\ &\leq \frac{2}{c \sqrt{q \log \log \left(\frac{1}{t_{n+1}} \right)}} \exp \left\{ -\frac{c^2 q}{2} \log(n \log(q)) \right\} \\ &\leq \frac{\text{const}}{\sqrt{\log(n)}} n^{-\frac{c^2 q}{2}} \end{aligned}$$

dla dostatecznie dużej stałej const. Dla każdej $c > \sqrt{2}$ dobieramy $q \in (0, 1)$ tak aby $\frac{c^2 q}{2} > 1$. Skoro $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, to

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t \log \log \left(\frac{1}{t} \right)}} > c \right) \leq \mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = 0.$$

Pokazaliśmy właśnie, że dla każdego $c > \sqrt{2}$,

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t \log \log \left(\frac{1}{t} \right)}} \leq c \right) = 1$$

a co za tym idzie

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{c \downarrow \sqrt{2}, c \in \mathbb{Q}} \mathbb{P} \left(\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t \log \log \left(\frac{1}{t} \right)}} \leq c \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\bigcap_{c > \sqrt{2}, c \in \mathbb{Q}} \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t \log \log \left(\frac{1}{t} \right)}} \leq c \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t \log \log \left(\frac{1}{t} \right)}} \leq \sqrt{2} \right)
\end{aligned}$$

co uzasadnia słuszność (2.3). Pokażemy teraz nierówność przeciwną. Aby to zrobić, pokażemy że dla $c < \sqrt{2}$ nieskończenie wiele razy w okolicy zera trajektoria B jest ponad krzywą $c\sqrt{t \log \log \left(\frac{1}{t} \right)}$. W tym celu wykorzystamy drugi lemat Borela Canteliego. Aby móc to zrobić, potrzebne nam będą zdarzenie niezależne. W naturalny sposób nasuwają się przyrosty B . Rozważmy

$$C_n = \left\{ B_{t_n} - B_{t_{n+1}} > c \sqrt{t_n \log \log \left(\frac{1}{t_n} \right)} \right\}$$

Korzystając raz jeszcze z nierówności w **Lemacie 2.30**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) &\geq \mathbb{P} \left(\frac{B_{t_n} - B_{t_{n+1}}}{\sqrt{t_n - t_{n+1}}} > c \sqrt{(1-q)^{-1} \log \log \left(\frac{1}{t_n} \right)} \right) \\
&\geq \frac{\delta}{\sqrt{\log(n)}} n^{-\frac{c^2}{2(1-q)}}
\end{aligned}$$

dla dostatecznie małej stałej $\delta > 0$. Dla każdego $c < \sqrt{2}$ dobieramy dostatecznie małe $q \in (0, 1)$ tak aby $\frac{c^2}{2(1-q)} < 1$. Skoro $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \infty$, to z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń B_n . Wykorzystując własności granic dolnych i górnych

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t \log \log \left(\frac{1}{t} \right)}} &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n \log \log \left(\frac{1}{t_n} \right)}} \\
&\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{t_n} - B_{t_{n+1}} + B_{t_{n+1}}}{\sqrt{t_n \log \log \left(\frac{1}{t_n} \right)}} \\
&\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{t_n} - B_{t_{n+1}}}{\sqrt{t_n \log \log \left(\frac{1}{t_n} \right)}} \\
&\quad + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{t_{n+1}}}{\sqrt{t_n \log \log \left(\frac{1}{t_n} \right)}}.
\end{aligned}$$

Drugi ze składników szacujemy z dołu przez

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{t_{n+1}}}{\sqrt{t_n \log \log \left(\frac{1}{t_n} \right)}} = - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{t_{n+1}}^{(1)}}{\sqrt{t_n \log \log \left(\frac{1}{t_n} \right)}}$$

gdzie $B^{(1)} = -B$ na mocy **Faktu 2.18** jest ruchem Browna. Stosując zatem pierwszy krok do procesu $B^{(1)}$ otrzymujemy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{t_{n+1}}}{\sqrt{t_n \log \log \left(\frac{1}{t_n} \right)}} \leq \sqrt{2q}.$$

Pokazaliśmy zatem, że dla dowolnego $c < \sqrt{2}$ i dostatecznie małego $q \in (0, 1)$ z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nierówność

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t \log \log \left(\frac{1}{t} \right)}} \geq c - \sqrt{2q}.$$

Zauważmy, że nasze górne oszacowanie na q to $q < 1 - \frac{c^2}{2}$. Wiemy zatem, że dla dowolnego $c < \sqrt{2}$ z prawdopodobieństwem 1 zachodzi

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t \log \log \left(\frac{1}{t} \right)}} \geq c - \sqrt{2 - c^2}.$$

Stosując takie same argumenty jak w pierwszej części dowodu przechodzimy z $c \uparrow \sqrt{2}$ aby otrzymać

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{t \log \log \left(\frac{1}{t}\right)}} \geq \sqrt{2}.$$

□

Zachowanie ruchu Browna w zerze, poprzez inwersję, można przenieść na jego zachowanie w nieskończoności. Kluczowy jest tutaj następujący fakt.

Fakt 2.31

Proces $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ dany przez

$$W_t = \begin{cases} tB_{1/t} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

jest ruchem Browna.

Dowód. Jedyną problematyczną własnością ruchu Browna, którą trzeba tutaj sprawdzić jest ciągłość w zerze. Rozumowanie można przeprowadzić bezpośrednio z wykorzystaniem lematu Borela-Cantelliego wspomagając się **Lematem 2.29** oraz **Lematem 2.30**. Innym, znacznie szybszym sposobem, jest użycie teorii procesów stochastycznych zaproponowany z **Zadaniem 2.23**. □

Wniosek 2.32

Niech $B = (B_t : t \in \mathbb{R}_+)$ będzie ruchem Browna. Wówczas z prawdopodobieństwem jeden zachodzą równości

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log \left(\frac{1}{t}\right)}} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log (t)}} = -1$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log (t)}} = 1$$

Dowód. Jeżeli rozważymy ruch Browna $B^{(1)}$ dany przez $B_t^{(1)} = -B_t$ z **Twierdzenia 2.28** zastosowanego do $B^{(1)}$ otrzymujemy

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log \left(\frac{1}{t}\right)}} = - \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t^{(1)}}{\sqrt{2t \log \log \left(\frac{1}{t}\right)}} = -1.$$

Podobnie rozważając ruch Browna W z **Faktu 2.31** otrzymujemy z **Twierdzenia 2.28** zastosowanego do W ,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(t)}} = \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{W_t}{\sqrt{2t \log \log\left(\frac{1}{t}\right)}} = 1.$$

Stosując udowodnioną właśnie równość do $B^{(1)}$ otrzymujemy

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log \log(t)}} = -\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t^{(1)}}{\sqrt{2t \log \log(t)}} = -1.$$

□

Przykład 2.33

Niech $a > 0$. Pokażemy, że

$$\mathbb{P}[B_t \leq a\sqrt{t} \text{ dla każdego } t \in [0, 1]] = 0.$$

Wystarczy zauważyć, że z prawa iterowanego logarytmu wynika, że

$$\sup_{t \in [0, 1]} t^{-1/2} B_t = \infty \quad p.w.$$

Rzeczywiście, dla prawie każdej $\omega \in \Omega$ istnieje ciąg $t_n = t_n(\omega) \rightarrow 0$ taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{t_n}}{\sqrt{2t_n \log \log(1/t_n)}} = 1.$$

Stąd również

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n}} = \infty.$$

2.4 Filtracje

Wróćmy teraz do naszego początkowego sposobu patrzenia na proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in T}$ jak na rodzinę zmiennych losowych. Z punktu widzenia teorii prawdopodobieństwa kluczowe jest zrozumienie struktury zależności zmiennych w procesie X . Jednym z obiektów, który pozwala w sposób ścisły wyrazić wspomnianą strukturę jest filtracja.

Definicja 2.34

Filtracją $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazywamy wstępującą rodzinę σ -ciał, tzn. dla $s, t \in T$, $t > s$ mamy $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$.

Jeżeli $t \in T \subseteq [0, +\infty)$ interpretujemy jako czas, to \mathcal{F}_t możemy interpretować jako wszystkie zdarzenia, które możemy zaobserwować do czasu t . Widać to szczególnie w przypadku filtracji generowanej przez proces stochastyczny.

Definicja 2.35

Dla procesu stochastycznego $X = (X_t)_{t \in T}$ określamy jego naturalną filtrację $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \in T}$ poprzez

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leq t, s \in T).$$

Fakt 2.36

Proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in T}$ ma niezależne przyrosty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $t > s, s, t \in T$, zmienna $X_t - X_s$ jest niezależna od \mathcal{F}_s^X .

Dowód. Pokażemy najpierw, że wspomniany warunek jest dostateczny. Dla dowolnych $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ wektor

$$(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}})$$

jest mierzalny względem σ -algebry $\mathcal{F}_{t_{n-1}}^X$ i wobec tego jest niezależny od $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$. W analogiczny sposób stwierdzamy, że zmienna $X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}$ jest niezależna od wektora $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-2}} - X_{t_{n-3}})$. Podsumowując,

$$(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-2}} - X_{t_{n-3}}), \quad X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}, \quad X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

są niezależne. Iterując to rozumowanie otrzymujemy niezależność przyrostów X .

Aby wykazać konieczność podanego warunku, założmy, że X ma przyrosty niezależne ustalmy $t > s$ i rozważmy rodzinę \mathcal{A} zdarzeń niezależnych od $X_t - X_s$. Wówczas \mathcal{A} tworzy λ -układ. Z niezależności przyrostów X , dla dowolnych $t_1 < t_2 < \dots < t_n < s$,

$$X_t - X_s \quad \text{i} \quad (X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1})$$

są niezależne i dlatego niezależne są również

$$X_t - X_s \quad \text{i} \quad (X_{t_n}, X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_2}, X_{t_1})$$

Wobec powyższego \mathcal{A} zawiera π -układ zdarzeń postaci $\{X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2, \dots, X_{t_n} \in A_n\}$ dla $t_1 \dots t_n < s$. Na mocy twierdzenia o π - i λ -układach, $\mathcal{F}_s^X \subseteq \mathcal{A}$. \square

Definicja 2.37

Proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in T}$ nazywamy $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ *adaptowalnym*, jeżeli dla każdego $t \in T$, zmienna X_t jest \mathcal{F}_t mierzalna. Piszemy wtedy $X_t \in \mathcal{F}_t$.

Oczywiście każdy proces $X = (X_t)_{t \in T}$ jest adaptowalny względem swojej naturalnej filtracji $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \in T}$. Dodatkowo, X jest \mathbb{F} adaptowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego t , $\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t$.

Definicja 2.38

Dla filtracji $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ oznaczamy σ -ciało

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma \left(\bigcup_{t \in T} \mathcal{F}_t \right)$$

oraz dla $t \geq 0$ określamy σ -ciało \mathcal{F}_{t+} wzorem

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t, s \in T} \mathcal{F}_s.$$

Rodzina \mathcal{F}_{t+} jest istotnie σ -ciałem jako przekrój σ -ciał \mathcal{F}_s . Zauważmy również, że $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+}$ dla każdego $t \geq 0$.

Przykład 2.39

Dla procesu stochastycznego $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ i jego naturalnej filtracji \mathbb{F}^X zdarzenie

$$A_t = \{\omega : \text{funkcja } s \mapsto X_s(\omega) \text{ ma w punkcie } t \text{ lokalne minimum}\}$$

dla $t \in (0,1)$ jest elementem \mathcal{F}_{t+}^X ale w ogólności nie jest elementem \mathcal{F}_t^X .

Fakt 2.40

Niech B będzie jednowymiarowym ruchem Browna. Wówczas dla każdego s , proces $(B_{t+s} - B_s : t \geq 0)$ jest niezależny do \mathcal{F}_{s+}^B .

Dowód. Dla ustalonego ciągu $\epsilon_n \downarrow 0$, z ciągłości trajektorii B ,

$$B(t+s) - B(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} B(t+s+\epsilon_n) - B(s+\epsilon_n).$$

Dla każdego ustalonego $n \in \mathbb{N}$ zmienna losowa $B(t+s+\epsilon_n) - B(s+\epsilon_n)$ jest niezależna od σ -ciała $\mathcal{F}_{s+\epsilon_n} \supseteq \mathcal{F}_{s+}$. Skoro wszystkie zmienne $B(t+s+\epsilon_n) - B(s+\epsilon_n)$ są niezależne od \mathcal{F}_{s+} , to to samo tyczy się granicy $B(t+s) - B(s)$. \square

Twierdzenie 2.41 (Prawo 0-1 Blumenthala)

Dla każdego $A \in \mathcal{F}_{0+}^B$, $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$.

Dowód. Zauważmy, że $\mathcal{F}_{0+}^B \subseteq \sigma(B_t : t \geq 0)$. Dodatkowo, z **Faktu 2.40** dla $s = 0$ każde zdarzenie $A \in \sigma(B_t : t \geq 0)$ jest niezależne od \mathcal{F}_{0+}^B . Oznacza to, że $A \in \mathcal{F}_{0+}^B$ jest niezależne od \mathcal{F}_{0+}^B , więc w szczególności A jest niezależne od samego siebie. Stąd $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$. \square

Przykład 2.42

Niech $\tau = \inf\{t > 0 : B_t > 0\}$. Pokażemy, że $\mathbb{P}[\tau = 0] = 1$. Mamy

$$\{\tau = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \sup_{0 < s < \frac{1}{n}} B_s > 0 \right\} \in \mathcal{F}_{0+}.$$

Wystarczy zatem pokazać, że $\mathbb{P}[\tau = 0] > 0$. Zauważmy, że

$$\mathbb{P}[\tau \leq t] = \mathbb{P} \left[\sup_{s \in [0, t]} B_s > 0 \right] \geq \mathbb{P}[B_t > 0] = \frac{1}{2}.$$

Przejście $t \rightarrow 0$ pociąga $\mathbb{P}[\tau = 0] \geq \frac{1}{2}$. Z 0-1 Blumenthala wnioskujemy, że $\mathbb{P}[\tau = 0] = 1$. W szczególności pokazaliśmy, że dla każdego $t > 0$,

$$\sup_{s \in [0, t]} B_s > 0 \quad \text{p.w.}$$

Z przyczyn technicznych wygodnie będzie nam zakładać, że filtracja z którą pracujemy jest dostatecznie regularna.

Definicja 2.43

Powiemy, że filtracja $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ spełnia *zwyczajne warunki*, jeżeli

- 1) dla każdego t , σ -ciało \mathcal{F}_t zawiera wszystkie zbiory o prawdopodobieństwie zero;
- 2) \mathbb{F} jest prawostronnie ciągła, tj. dla każdego t , $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$.

Aby zobaczyć przykład filtracji, która spełnia zwyczajne warunki zastosujemy standardowy zabieg polegający na powiększeniu filtracji przez dodanie do niej zbiorów miary zero. Niech

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}[A] = 0\}$$

oznacza ideał zbiorów miary zero. Dla filtracji $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ definiujemy jej uzupełnienie $\overline{\mathbb{F}} = (\overline{\mathcal{F}}_t)_{t \in T}$ wzorem

$$\overline{\mathcal{F}}_t = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N}).$$

Przykład 2.44

Pokażemy, że $\overline{\mathcal{F}}_t^B = \overline{\mathcal{F}}_{t+}^B$. Uzasadnimy najpierw, że dla każdej ograniczonej zmiennej losowej W mierzalnej względem $\overline{\mathcal{F}}_\infty^B$,

$$\mathbb{E} \left[W \mid \overline{\mathcal{F}}_t^B \right] = \mathbb{E} \left[W \mid \overline{\mathcal{F}}_{t+}^B \right] \quad \text{p.w.} \quad (2.4)$$

Ustalmy $t_k > s$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ dla $k = 1, 2, \dots, n$ i napiszmy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n e^{i\alpha_k B_{t_k}} \mid \overline{\mathcal{F}}_{s+}^B \right] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e^{i \sum_{k=1}^n \alpha_k B_{s+\epsilon}} \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n e^{i\alpha_k (B_{t_k} - B_{s+\epsilon})} \mid \overline{\mathcal{F}}_{s+}^B \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e^{i \sum_{k=1}^n \alpha_k B_{s+\epsilon}} \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n e^{i\alpha_k (B_{t_k} - B_{s+\epsilon})} \right] \\ &= e^{i \sum_{k=1}^n \alpha_k B_s} \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n e^{i\alpha_k (B_{t_k} - B_s)} \right]. \end{aligned}$$

Skoro ostatnia zmienna jest \mathcal{F}_s^B mierzalna, to prawdą jest również

$$\mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n e^{i\alpha_k B_{t_k}} \mid \overline{\mathcal{F}}_{s+}^B \right] = e^{i \sum_{k=1}^n \alpha_k B_s} \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n e^{i\alpha_k (B_{t_k} - B_s)} \right]$$

dla dowolnych $t_k > s$ oraz $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Skoro dla $t_k \leq s$ zmienna B_{t_k} jest $\overline{\mathcal{F}}_s^B \subseteq \overline{\mathcal{F}}_{s+}^B$ mierzalna, to powyższe wyliczenia implikują, że dla każdego $t_k > 0$ i $\alpha_k \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n e^{i\alpha_k B_{t_k}} \mid \overline{\mathcal{F}}_s^B \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n e^{i\alpha_k B_{t_k}} \mid \overline{\mathcal{F}}_{s+}^B \right].$$

Funkcje $x \mapsto e^{i\alpha x}$ są liniowo gęste w przestrzeni funkcji ciągłych $C[-N, N]$ na odcinku $[-N, N]$ z topologią jednostajną. Każdą ograniczoną funkcję mierzalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ możemy aproksymować punktowo ciągiem $f_n \in \bigcup_{N \in \mathbb{N}} C[-N, N]$. To pokazuje, że dla każdego ograniczonego funkcji borelowskich $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n f_k(B_{t_k}) \mid \overline{\mathcal{F}}_s^B \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n f_k(B_{t_k}) \mid \overline{\mathcal{F}}_{s+}^B \right].$$

Czyli dla każdej ograniczonej zmiennej losowej $W \in \sigma(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ spełnione jest (2.4). To z kolei pociąga (2.4) dla każdej $W \in \overline{\mathcal{F}}_\infty^B$. Rzeczywiście, aby się o tym przekonać wystarczy rozważyć λ -układ

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \mathcal{F}_\infty^B : \mathbb{P}[A \mid \overline{\mathcal{F}}_s^B] = \mathbb{P}[A \mid \overline{\mathcal{F}}_{s+}^B] \text{ p.w.} \right\}$$

oraz π -układ

$$\mathcal{C} = \{ \{B_{t_1} \in D_1, B_{t_2} \in D_2, \dots, B_{t_n} \in D_n\} : t_k > 0, D_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), k \leq n, \}.$$

Przedstawione przez nas argumenty pokazują, że $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$. Z lematu o π - λ układach $\mathcal{F}_\infty^B = \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$.

Teraz pokażemy, jak to pociąga tezę. Dla zmiennej losowej W mierzalnej względem $\overline{\mathcal{F}}_{t+}^B$,

$$\mathbb{E} \left[W \mid \overline{\mathcal{F}}_t^B \right] = \mathbb{E} \left[W \mid \overline{\mathcal{F}}_{t+}^B \right] = W \quad p.w.$$

Skoro W jest równa p.w. zmiennej losowej mierzalnej względem $\overline{\mathcal{F}}_t^B$, która zawiera wszystkie zbiory miary zero, to W jest mierzalna względem $\overline{\mathcal{F}}_t^B$. Skoro z drugiej strony inkluzja $\overline{\mathcal{F}}_t^B \subseteq \overline{\mathcal{F}}_{t+}^B$ jest oczywista, pokazaliśmy właśnie, że $\overline{\mathcal{F}}_t^B = \overline{\mathcal{F}}_{t+}^B$. Innymi słowy filtracja $\overline{\mathbb{F}}^B$ spełnia zwyczajne warunki.

Od tej pory zawsze zakładamy, że rozważana filtracja spełnia zwyczajne warunki.

Na potrzeby **rozdziału 4** pokażemy, że uzupełniona filtracja ruchu Browna respektuje niezależność przyrostów.

Przykład 2.45

Rozważmy uzupełnioną filtrację ruchu Browna $\overline{\mathbb{F}}^B = \left(\overline{\mathcal{F}}_t^B \right)_{t \in [0, \infty)}$. Pokażemy, że dla dowolnych $s < t$ zmienna $B_t - B_s$ jest niezależna od σ -ciała $\overline{\mathcal{F}}_s^B$. Rozważmy rodzinę zbiorów

$$\mathcal{C} = \left\{ A \cap C : A \in \mathcal{F}_s^B, C \in \mathcal{N} \cup \{\Omega\} \right\}.$$

Skoro \mathcal{F}_s^B i \mathcal{N} są zamknięte na skończone przekroje, to \mathcal{C} również jest zamknięte na skończone przekroje. Innymi słowy \mathcal{C} tworzy π -układ. Zauważmy też, że $\sigma(\mathcal{C}) = \overline{\mathcal{F}}_s^B$. Zauważmy też, że dla A i C jak w definicji \mathcal{C} i $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}[\{B_t - B_s \in G\} \cap A \cap C] = \mathbb{P}[B_t - B_s \in G] \mathbb{P}[A \cap C].$$

Dla $C = \Omega$ powyższa równość wynika z niezależności przyrostów B . Jeżeli $A \in \mathcal{N}$, to obie strony powyższej równości są równe zero. Rozważając λ -układ wszystkich zdarzeń niezależnych od $B_t - B_s$, na mocy Twierdzenia o π - λ układach otrzymujemy

$$\mathbb{P}[\{B_t - B_s \in G\} \cap H] = \mathbb{P}[B_t - B_s \in G] \mathbb{P}[H], \quad H \in \overline{\mathcal{F}}_s^B.$$

Istotnie więc $B_t - B_s$ jest niezależna od $\overline{\mathcal{F}}_s^B$.

2.5 Czasy zatrzymania

Myśląc o procesie $X = (X_t)_{t \in [0, \infty)}$ jak o losowej funkcji $X(\omega): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ łatwo wyobrazić sobie potrzebę badania jej wartości w punktach szczególnych. Przykładowo

$$\tau_1(\omega) = \inf\{t \in [0, \infty) : X_t(\omega) \in \mathbb{N}\} \quad (2.5)$$

bądź

$$\tau_2(\omega) = \inf\left\{t \in [0, \infty) : X_t(\omega) = \sup_{s \in [0, \infty)} X_s(\omega)\right\}. \quad (2.6)$$

Wówczas tak określone τ_i jest losowym momentem w przedziale czasowym $[0, \infty)$. Interesować nas może sama zmienna losowa τ_i lub wartość X_{τ_i} . W zależności od sposobu określenia losowego momentu τ_i własności probabilistyczne τ_i bądź X_{τ_i} będą mniej lub bardziej przyjemne. Do tego, aby wspomniane własności były dobre potrzeba, żeby losowy czas τ_i dobrze wpisywał się w strukturę zależności procesu X , czyli w filtrację.

Definicja 2.46

Zmienną losową $\tau: \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$ nazywamy czasem zatrzymania względem filtracji $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, jeżeli dla każdego $t \in T$,

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Moment losowy τ_2 określony w (2.6) nie jest czasem zatrzymania. Z kolei τ_1 określone wzorem (2.5) jest czasem zatrzymania. Argument, który to uzasadnia wpisuje się w pewien ogólniejszy schemat. Dla procesu $X = (X_t)_{t \in T}$ i zbioru borelowskiego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definiujemy moment wejścia X do zbioru A poprzez

$$\tau_A^X = \inf\{t \in T : X_t \in A\}.$$

Fakt 2.47

Jeżeli proces $X = (X_t)_{t \in T}$ jest $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ adaptowalny i ma ciągle trajektorie, a A jest domkniętym zbiorem, to τ_A^X jest czasem zatrzymania względem filtracji \mathbb{F} .

Dowód. Niech $T_0 \subseteq T$ będzie przeliczalnym, gęstym zbiorem (zawierającym lewy koniec jeżeli, T jest lewostronnie domknięty). Skoro X jest ciągly a A domknięty, to

$$\{\tau_A^X \leq t\} = \{\exists s \leq t X_s \in A\}.$$

Jeśli $X_s(\omega) \in A$, to dla dowolnego n istnieje $q \leq s$, $q \in T_0$ takie, że

$$|X_s(\omega) - X_q(\omega)| < \frac{1}{n}.$$

Wobec tego

$$X_q(\omega) \in A_{\frac{1}{n}} = \left\{ x : \text{dist}(x, A) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Podsumowując

$$\{\exists s \leq t X_s \in A\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{q \leq t, q \in T_0} \{X_q \in A_{\frac{1}{n}}\} = F.$$

Aby uzasadnić przedziwną inkluzję ustalmy $\omega \in F$. Istnieje ciąg $s_n \in [0, t] \cap T_0$ taki, że $X_{s_n} \in A_{\frac{1}{n}}$. Wybierając z niego podciąg zbieżny $s_{n_k} \rightarrow s_{\infty} \in [0, t]$, wobec ciągłości X , otrzymujemy

$$X_{s_{\infty}} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} = A,$$

gdzie ostatnia równość wynika z domkniętości A . To, że $X_{s_{\infty}}$ jest elementem $\bigcap_{n \geq 1} A_{1/n}$ wynika z tego, że $X_{s_{\infty}} \in A_{1/n_0}$ dla każdego n_0 . Rzeczywiście, skoro $X_{s_k} \in A_{1/n_0}$ dla dostatecznie dużych k . Skoro A_{1/n_0} jest otwarty, to $X_{s_{\infty}} \in A_{1/n_0}$. \square

Fakt 2.48

Niech $\tau, \sigma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będą czasami zatrzymania względem $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$. Wówczas czasami zatrzymania są również $\tau \wedge \sigma$, $\tau \vee \sigma$ oraz $\tau + \sigma$.

Dowód. Pozostawiamy jako **Zadanie 2.36**. \square

Definicja 2.49

Dla czasu zatrzymania τ definiujemy

$$\mathcal{F}_{\tau} = \{A \in \mathcal{F}_{\infty} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \in T\},$$

gdzie $\mathcal{F}_{\infty} = \sigma(\bigcup_{t \in T} \mathcal{F}_t)$.

Fakt 2.50

Niech τ i σ będą czasami zatrzymania. Wówczas

- \mathcal{F}_{τ} jest σ -ciałem;
- jeżeli $\tau(\omega) = t$ dla ustalonego $t \in T$ i każdej $\omega \in \Omega$, to $\mathcal{F}_{\tau} = \mathcal{F}_t$;
- $\mathcal{F}_{\tau} \cap \mathcal{F}_{\sigma} = \mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.

- jeżeli τ jest ograniczonym czasem zatrzymania (dla pewnej stałej M , $\tau(\omega) \leq M$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$), to dla każdego $D \in \mathcal{F}_\tau$ zmienna $\tau^D = \tau \mathbb{1}_D + M \mathbb{1}_{D^c}$ jest czasem zatrzymania.

Dowód. Pozostawiamy jako przedmiot **Zadań 2.37-2.39** □

Następne twierdzenie pokazuje kluczową własność ruchu Browna po losowym czasie.

Twierdzenie 2.51 (Mocna własność Markowa dla ruchu Browna)
Niech τ będzie skończonym czasem zatrzymania. Wówczas proces $(B_{t+\tau} - B_\tau : t \geq 0)$ jest ruchem Browna niezależnym do \mathcal{F}_τ^B .

Dowód. Rozważmy ciąg czasów zatrzymania τ_n przybliżających τ od dołu

$$\tau_n = (m+1)2^{-n} \quad \text{na zbiorze } \tau \in [m2^{-n}, (m+1)2^{-n}).$$

Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Niech B_k będzie ruchem Browna zadany przez $B_k(t) = B(t + k2^{-n}) - B(k2^{-n})$. Niech X będzie procesem danym przez $X(t) = B(t + \tau_n) - B(\tau_n)$. Dla zbioru $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+})$, tj. zbioru A postaci

$$A = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+} : x_{t_k} \in A_k, k = 1, 2, \dots, n\}, \quad t_k \in \mathbb{R}_+, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

oraz zbioru $E \in \mathcal{F}_{\tau_n}^B$, napiszmy

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\{X \in A\} \cap E] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[\{X \in A\} \cap E \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[\{B_k \in A\} \cap E \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}]. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $E \cap \{\tau_n = k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}^B$. Wobec tego z własności Markowa dla ruchu Browna

$$\mathbb{P}[\{X \in A\} \cap E] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[\{B_k \in A\}] \mathbb{P}[E \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}] = \mathbb{P}[B \in A] \mathbb{P}[E].$$

Pokazaliśmy właśnie, że $(B(t + \tau_n) - B(\tau_n))_{t \in [0, \infty)}$ jest ruchem Browna niezależnym od $\mathcal{F}_{\tau_n}^B$. Skoro $\mathcal{F}_{\tau_n}^B \supseteq \mathcal{F}_\tau^B$ to dla każdego n , $(B(t + \tau_n) - B(\tau_n))_{t \in [0, \infty)}$ jest niezależny od \mathcal{F}_τ^B . Wobec tego granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(t + \tau_n) - B(\tau_n) = B(t + \tau) - B(\tau)$$

również jest niezależna od \mathcal{F}_τ^B . Dla każdego n , $(B(t + \tau_n) - B(\tau_n))_{t \in [0, \infty)}$ jest ruchem Browna, więc jego rozkłady skończone wymiarowe spełniają

warunki (B1)-(B3) **Definicji 1.4.** Z powyższej granicy rozkłady skończone wymiarowe $(B(t + \tau) - B(\tau))_{t \in [0, \infty)}$ są takie same jak rozkłady $(B(t + \tau_n) - B(\tau_n))_{t \in [0, \infty)}$. W szczególności $(B(t + \tau_n) - B(\tau_n))_{t \in [0, \infty)}$ spełnia warunki (B1)-(B3) **Definicji 1.4.** Ciągłość $t \mapsto B(t + \tau) - B(\tau)$ jest z kolei oczywista. Pokazuje to, że $(B(t + \tau) - B(\tau))_{t \in [0, \infty)}$ jest ruchem Browna. \square

Przykład 2.52

Aby zilustrować **Twierdzenie 2.51** uzasadnimy zasadę odbicia dla ruchu Browna. Dla $a > 0$ niech

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t \geq a\}.$$

Rozważmy proces $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będący ruchem Browna odbitym w a . Wówczas X jest zadany przez

$$X_t = \begin{cases} B_t & t \leq \tau_a \\ 2a - B_t & t > \tau_a \end{cases} \quad (2.7)$$

Korzystając z mocnej własności Markowa dla B , procesy

$$(B(t + \tau_a) - B(\tau_a))_{t \in \mathbb{R}_+} \quad \text{oraz} \quad (-B(t + \tau_a) + B(\tau_a))_{t \in \mathbb{R}_+} \quad (2.8)$$

są ruchami Browna niezależnymi od $(B_{\tau_a \wedge t})_{t \in \mathbb{R}_+}$. Wówczas sklejenie ostatniego procesu w punkcie τ_a z każdym z procesów (2.8) da proces o takim samym rozkładzie. Sklejenie z pierwszym daje $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ a z drugim X .

Przykład 2.53

Rozważmy $M_t = \sup_{s \in [0, t]} B_s$. Dla $a > 0$ mamy

$$\{M_t > a\} = \{B_t > a\} \cup \{B_t \leq a, M(t) > a\}.$$

Zauważmy, że

$$\{B_t \leq a, M_t > a\} = \{X_t > a\},$$

gdzie X jest procesem zadany przez (2.7). Stąd

$$\mathbb{P} \left[\sup_{s \in [0, t]} B_s > a \right] = \mathbb{P}[M_t > a] = \mathbb{P}[B_t > a] + \mathbb{P}[X_t > a] = 2\mathbb{P}[B_t > a].$$

2.6 Procesy mierzalne

Proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in T}$ możemy traktować jako funkcję dwóch zmiennych, czyli odwzorowanie $T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dane przez $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$. To ujęcie będzie kluczowe przy konstrukcji całki stochastycznej. Przypomnijmy, że $T \subseteq \mathbb{R}$.

Definicja 2.54

Proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in T}$ nazywamy mierzalnym, jeżeli odwzorowanie $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ jest mierzalne jako odwzorowanie

$$X: (T \times \Omega, \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

Założenie mierzalności pozwala wyeliminować z rozważań różne patologie.

Uwaga 2.55

Nie istnieje niezerowy, mierzalny proces $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ taki, że $\mathbb{E}X_s = 0$ i $\mathbb{E}X_s < \infty$ i dla $s \neq t$ zmienne X_s i X_t są nieskorelowane (**Zadanie 2.28**).

Definicja 2.56

Proces stochastyczny $X = (X_s)_{s \in T}$ nazywamy progresywnie mierzalnym, jeżeli odwzorowanie $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ jest mierzalne jako odwzorowanie

$$((T \cap (-\infty, t]) \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_t) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

dla każdego $t \in T$.

Jeżeli proces $X = (X_t)_{t \in T}$ jest progresywnie mierzalny, to $\{\omega : X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}_t$ jako cięcie zbioru $\{(s, \omega) : s \leq t, X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t$. Oznacza to, że każdy proces progresywnie mierzalny jest adaptowalny.

Fakt 2.57

Jeżeli proces $X = (X_t)_{t \in T}$ jest prawostronnie ciągłym procesem adaptowalnym, to jest on progresywnie mierzalny.

Dowód. Ustalmy $t \in T$ i połóżmy dla $s \in T, s \leq t, X_s^{(n)} = X_{t-2^{-n}k}$, gdzie k jest liczbą całkowitą taką, że $t - 2^{-n}(k+1) < s \leq t - 2^{-n}k$. Wówczas dla borelowskiego A ,

$$\begin{aligned} & \{(s, \omega) : s \leq t, X_s^{(n)} \in A\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{\infty} (T \cap (t - 2^{-n}(k+1), t - 2^{-n}k]) \times \{X_{t-2^{-n}k} \in A\}) \\ &\in \mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

Zatem odwzorowanie $(s, \omega) \mapsto X_s^{(n)}(\omega)$ jest $\mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ mierzalne. Z prawostronnej ciągłości X ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega).$$

Wobec tego odwzorowanie $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ również jest $\mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ mierzalne. \square

Przykład 2.58

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{L}, \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesguea a $\mathcal{L} = \sigma(\mathcal{N} \cup \mathcal{B}[0, 1])$ jest σ -ciałem zbiorów borelowskich uzupełnionych o zbiory miary zero \mathcal{N} . Niech $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{N})$ dla $t \geq 0$. Rozważmy $A = \{(x, x) : x \in [0, 1/2]\} \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Wówczas proces $X_t(\omega) = \mathbb{1}_A(t, \omega)$ jest adaptowalny, ale nie jest progresywnie mierzalny (**Zadanie 2.43**).

Definicja 2.59

Dla mierzalnego procesu stochastycznego $X = (X_t)_{t \in T}$ i zmiennej τ o wartościach w $T \cup \{\infty\}$ definiujemy proces zatrzymany $X^\tau = (X_t^\tau)_{t \in T}$ wzorem $X_t^\tau = X_{t \wedge \tau}$.

Fakt 2.60

Załóżmy, że proces $X = (X_t)_{t \in T}$ jest progresywnie mierzalny a τ jest czasem zatrzymania. Wówczas zmienna $X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}}$ jest \mathcal{F}_τ mierzalna. Dodatkowo proces X^τ jest progresywnie mierzalny.

Dowód. Odwzorowanie

$$(s, \omega) \mapsto (\tau(\omega) \wedge s, \omega) : T \cap (-\infty, t] \times \Omega \rightarrow T \cap (-\infty, t] \times \Omega$$

jest mierzalne jako $\mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t \rightarrow \mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t$. Odwzorowanie

$$(s, \omega) \mapsto X_s(\omega) : T \cap (-\infty, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

jest mierzalne jako $\mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ich złożenie

$$(s, \omega) \mapsto X_{\tau(\omega) \wedge s}(\omega)$$

jest mierzalne $\mathcal{B}(T \cap (-\infty, t]) \otimes \mathcal{F}_t \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Stąd wynika mierzalność zatrzymanego procesu X^τ . Na koniec zauważmy, że dla dowolnego t ,

$$\{X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau < +\infty\}} \in A\} \cap \{\tau \leq t\} = \{X_{\tau \wedge t} \in A\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

co jest równoważne

$$\{X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau < +\infty\}} \in A\} \in \mathcal{F}_\tau.$$

\square

Definicja 2.61

Progresywnym σ -ciałem \mathcal{P} nazywamy rodzinę zbiorów $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ dla których proces $X_t(\omega) = \mathbb{1}_A(t, \omega)$ jest progresywnie mierzalny.

Zauważmy, że $A \in \mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A \cap ([0, t] \times \Omega) \in \mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}_t$$

dla każdego $t > 0$.

Fakt 2.62

Proces $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest progresywnie mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy $X: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest \mathcal{P} -mierzalne.

Dowód. Pozostawiamy jako **Zadanie 2.44** □

2.7 Zadania

Podstawowe definicje

Zadanie 2.1

Naszczuj wykres trajektorii procesu Poissona $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Znajdź wzór (w terminach zmiennych S_n obecnych w **Definicji 2.1**) na $\text{Wah}_{[0,t]} N$ i całkę Riemanna-Stieltjesa $\int_0^t f(s) dN_s(\omega)$ dla ciągłej $f: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$.

Zadanie 2.2

Pokaż, że jeżeli E_1, E_2, \dots są iid z rozkładem $\text{Exp}(\lambda)$, to $S_n = \sum_{k=1}^n E_k$ ma rozkład Erlanga o gęstości

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Zadanie 2.3

Niech $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie procesem Poissona. Pokaż, że dla każdego n i $t > 0$, zmienna losowa N_t ma rozkład Poissona z parametrem λt . Innymi słowy zachodzi wzór

$$\mathbb{P}[N_t = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

WSKAZÓWKA: $\mathbb{P}[N_t = n] = \mathbb{P}[S_n \leq t < S_n + E_{n+1}] = \int_0^t \mathbb{P}[E_{n+1} + x > t] f_n(x) dx$

Zadanie 2.4

Niech $W = (W_t)_{t \in [0,1]}$ będzie mostem Browna. Pokaż, że $\text{Cov}(W_s, W_t) = s(1-t)$ dla $0 < s < t < 1$.

Zadanie 2.5

Niech $W = (W_t)_{t \in [0,1]}$ będzie mostem Browna. Pokaż, że W nie ma stacjonarnych przyrostów. Pokaż, że W nie ma niezależnych przyrostów.

Rozkłady procesów stochastycznych**Zadanie 2.6**

Udowodnij, że jeżeli $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ to istnieje przeliczalny zbiór $T_0 \subseteq T$ taki, że jeśli $x, y \in \mathbb{R}^T$ są takie, że $x_t = y_t$ dla $t \in T_0$, to $x \in A \Leftrightarrow y \in A$.

Zadanie 2.7

Pokaż, że zbiór $\{x : \lim_{t \rightarrow 1/2} x_t = 1\}$ nie należy do $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,1]})$.

Zadanie 2.8

Pokaż, że istnieje wektor losowy (X, Y) taki, że X i Y mają jednowymiarowe rozkłady normalne, ale rozkład (X, Y) nie jest dwuwymiarowym rozkładem normalnym.

Zadanie 2.9

Pokaż, że ruchu Browna $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ rozkłady skończeniowymiarowe są Gaussowskie, dokładniej dla rosnącego ciągu $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$,

$$\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}^B(dx) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |A|}} \exp \left\{ -\langle A^{-1}x | x \rangle / 2 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie $A = (A_{i,j})_{i,j \leq n}$, $A_{i,j} = t_i \wedge t_j$.

Zadanie 2.10

Wykaż, że istnieje proces $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ o przyrostach niezależnych, startujący z 0 taki, że $X_t - X_s$ ma rozkład Cauchy'ego z parametrem $t - s$ (proces taki nazywamy procesem Cauchy'ego, bądź procesem 1-stabilnym). Przypomnijmy, że rozkład Cauchy'ego z parametrem $\gamma > 0$ dany jest przez gęstość

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi(x^2 + \gamma^2)}$$

lub funkcję charakterystyczną $\varphi(t) = e^{-\gamma|t|}$.

Zadanie 2.11

Niech rodzina rozkładów μ_{t_1, \dots, t_n} będzie zadana przez

$$\mu_{t_1, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \mathbb{P} \left[X_1 \in A_1, X_1 + X_2 \in A_2, \dots, \sum_{j=1}^n X_j \in A_n \right],$$

gdzie X_1, \dots, X_n są niezależne takie, że $X_j \stackrel{d}{=} \text{Exp}(t_j - t_{j-1})$ przy czym $t_0 = 0$. Pokaż, że tak określona rodzina rozkładów nie spełnia warunków zgodności.

Zadanie 2.12

Niech $\lambda: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie funkcją ciągłą. Korzystając z Twierdzenia Kołmogorowa pokaż, że istnieje proces $X = (X_t)_{t \in [0, +\infty)}$ taki, że

- $X_0 = 0$
- dla $t > s > 0$,

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} \text{Pois} \left(\int_s^t \lambda(x) dx \right);$$

- X ma niezależne przyrosty: dla dowolnych $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ zmienne losowe $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ są niezależne;

Zadanie 2.13

Zrób poprzednie zadanie nie odwołując się do Twierdzenia Kołmogorowa. WSKAZÓWKA: Rozważ proces X postaci $X_t = N_{f(t)}$, gdzie $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest procesem Poissona z intensywnością 1, a $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ jest funkcją niemalejącą.

Zadanie 2.14

Pokaż, że istnieje proces stochastyczny $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ taki, że zmienne X_t są niezależne o rozkładzie $\mathcal{N}(0, t)$. Pokaż, że $\mathbb{P}[\lim_{s \rightarrow t} X_s \text{ istnieje}] = 0$ dla każdego $t > 0$.

Zadanie 2.15

Niech $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie ruchem Browna. Niech $s, c > 0$. Wówczas ruchami Browna są również

$$B_t^{(1)} = -B_t, \quad B_t^{(2)} = B_{t+s} - B_s, \quad B_t^{(3)} = c^{-1/2} B_{ct}.$$

Zadanie 2.16

Niech $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ oraz $\beta = (\beta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będą niezależnymi ruchami Browna. Pokaż, że proces

$$W_t = \begin{cases} B_t, & t \in [0, 1] \\ B_1 + \beta_t - \beta_1, & t \in (1, +\infty) \end{cases}$$

również jest ruchem Browna.

Zadanie 2.17

Niech B będzie ruchem Browna. Dla $a \in \mathbb{R}$ połóżmy $\tau_a = \inf\{s \geq 0 : B_s = a\}$. Pokaż, że τ_a, τ_{-a} oraz $a^2 \tau_1$ mają ten sam rozkład.

Zadanie 2.18

Dwa równoważne procesy $X = (X_t)_{t \in [0, 1]}$ oraz $Y = (Y_t)_{t \in [0, 1]}$ mają prawostronnie ciągłe trajektorie. Uzasadnij, że jeżeli X przyjmuje tylko wartości całkowite, to Y również ma tą własność.

Zadanie 2.19

Dwa równoważne procesy $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ oraz $Y = (Y_t)_{t \in [0,1]}$ mają prawostronnie ciągłe trajektorie. Uzasadnij, że jeżeli $\limsup_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} X_t \geq 5$ p.w. to $\limsup_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} Y_t \geq 5$ p.w.

Zadanie 2.20

Proces X nazywamy gaussowskim, jeżeli jego rozkłady skończenie wymiarowe są gaussowskie. Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ i $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ są procesami gaussowskimi takimi, że $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[Y_t] = 0$ dla każdego $t \geq 0$. Pokaż, że X i Y są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $s, t > 0$, $\mathbb{E}[X_t X_s] = \mathbb{E}[Y_t Y_s]$.

Ciągłość trajektorii**Zadanie 2.21**

Proces $(X_t)_{t \in [0,1]}$ jest gaussowski i spełnia $\mathbb{E}[X_t] = 0$ dla każdego $t \in [0,1]$. Dodatkowo

$$|\text{Cov}(X_t, X_s) - \text{Cov}(X_t, X_t)| \leq C|t - s|$$

dla pewnej stałej C . Pokaż, że X posiada ciągłą modyfikację.

Zadanie 2.22

Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest procesem takim, że

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\beta \leq C|t - s|^{\alpha+1}$$

dla pewnych stałych $\alpha, \beta, C > 0$. Pokaż, że istnieje proces $Y = (Y_t)_{t \in [0, +\infty)}$ będący modyfikacją procesu X taki, że trajektorie procesu Y są lokalnie hölderowsko ciągłe z wykładnikiem γ , dla dowolnego $\gamma < \frac{\alpha}{\beta}$. Dokładniej dla każdego $T > 0$ i $\omega \in \Omega$ istnieje stała $C_T(\omega)$ taka, że

$$|Y_t(\omega) - Y_s(\omega)| \leq C_T(\omega)|t - s|^\gamma, \quad t, s \in [0, T].$$

WSKAZÓWKA: zastosuj twierdzenie o ciągłej modyfikacji do procesów $(X_t)_{t \in [n, n+1]}$

Zadanie 2.23

Pokaż, że proces $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ dany przez

$$W_t = \begin{cases} tB_{1/t} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

posiada ciągłą modyfikację. Następnie uzasadnij, że W i jego ciągła modyfikacja są nierozróżnialne. Wywnioskuj, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0 \text{ p.w.}$$

Zadanie 2.24

Niech $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie ruchem Browna. Znajdź $\mathbb{E}[B_3 B_2 | B_4]$.

Zadanie 2.25

Rozważmy proces $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ dany przez

$$Y_t = B_t - \int_0^t \frac{B_u}{u} du.$$

Uzasadnij, że całka pojawiająca się w definicji Y_t jest zbieżna p.w. Pokaż, że Y jest ruchem Browna.

Zadanie 2.26

Niech $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Pokaż, że dla $x > 0$,

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{-1} e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(N > x) \leq \frac{1}{x} e^{-x^2/2}.$$

Zadanie 2.27

Dla ruchu Browna B rozważmy $\sigma = \inf\{t > 0 : B_t = 0\}$. Pokaż, że $\mathbb{P}[\sigma = 0] = 1$.

Zadanie 2.28

Pokaż, że nie istnieje niezerowy, mierzalny proces $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ taki, że $\mathbb{E}[X_s] = 0$ i $\mathbb{E}[X_s^2] < \infty$ i dla $s \neq t$ zmienne X_s i X_t są nieskorelowane. WSKAZÓWKA: Pokaż, że dla dowolnych $a, b \in [0, 1]$,

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b X_s ds\right)^2 = 0.$$

Zadanie 2.29

Niech dana będzie σ -algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Załóżmy, że X i Y są zmiennymi losowymi takimi, że X jest niezależna od \mathcal{G} a Y jest mierzalna względem \mathcal{G} . Niech wreszcie $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie mierzalna taka, że $\mathbb{E}[|\psi(X, Y)|] < \infty$. Pokaż, że

$$\mathbb{E}[\psi(X, Y) | \mathcal{G}] = \Psi(Y),$$

gdzie $\Psi(y) = \mathbb{E}[\psi(X, y)]$. WSKAZÓWKA: Zaczynaj od funkcji ψ postaci $\psi(x, y) = f(x)g(y)$.

Zadanie 2.30

Niech τ będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym $\text{Exp}(\lambda)$ niezależną od ruchu Browna B . Znajdź funkcję charakterystyczną zmiennej B_τ .

Zadanie 2.31

Niech $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie procesem Poissona. Pokaż, że dla $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{P} \left[S_{N_s+1} > t \mid \mathcal{F}_s^N \right] = e^{-\lambda(t-s)} \quad p.w,$$

gdzie $\mathcal{F}_s^N = \sigma(N_r : r \leq s)$. WSKAZÓWKA: Ustalmy $\tilde{A} \in \mathcal{F}_s^N$ i liczbę naturalną n . Pokaż, że istnieje $A \in \sigma(E_1, \dots, E_n)$ takie, że $A \cap \{N_s = n\} = \tilde{A} \cap \{N_s = n\}$. Korzystając z niezależności E_{n+1} i $(S_n, \mathbb{1}_A)$ pokaż, że

$$\mathbb{P} [S_{N_s+1} > t, N_s = n, \tilde{A}] = e^{-\lambda(t-s)} \mathbb{P} [N_s = n, \tilde{A}].$$

Zadanie 2.32

Niech $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie procesem Poissona. Uzasadnij, że dla $0 \leq s < t$ zmienna $N_t - N_s$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda(t-s)$ i jest niezależna od \mathcal{F}_s^N . WSKAZÓWKA: Postępując jak w poprzednim zadaniu pokaż, że

$$\mathbb{P} [N_t - N_s \leq k, N_s = n, \tilde{A}] = e^{-\lambda(t-s)} \mathbb{P} [N_s = n, \tilde{A}] \sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j (t-s)^j}{j!}.$$

Zadanie 2.33

Dla procesu Poissona N z intensywnością λ połóżmy $\tau = \inf\{t \geq 0 : N_t = 1\}$. Znajdź $\mathbb{E}[\tau]$.

Zadanie 2.34

Pokaż, że dla każdego $t > 0$, $\nu_t = N_t + 1$ jest czasem zatrzymania względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(E_i : i \leq n)$.

Zadanie 2.35

Rozważmy dwie filtracje $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ oraz $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Pokaż, że G_t jest niezależne od \mathcal{F}_t dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{G}_∞ jest niezależne od \mathcal{F}_∞ .

Zadanie 2.36

Niech τ i σ będą czasami zatrzymania względem $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, +\infty)}$. Pokaż, że $\sigma + \tau$, $\sigma \wedge \tau$ oraz $\sigma \vee \tau$ również są czasami zatrzymania względem \mathbb{F} .

Zadanie 2.37

Pokaż, że \mathcal{F}_τ jest σ -ciałem. Pokaż, że jeżeli $\tau(\omega) = t$ dla ustalonego $t \in T$ i każdej $\omega \in \Omega$, to $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$.

Zadanie 2.38

Niech τ będzie ograniczonym czasem zatrzymania (dla pewnej stałej M , $\tau(\omega) \leq M$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$). Niech $B \in \mathcal{F}_\tau$. Pokaż, że $\tau^B = \tau \mathbb{1}_B + M \mathbb{1}_{B^c}$ jest czasem zatrzymania.

Zadanie 2.39

Uzasadnij, że dla czasów zatrzymania τ, κ ,

$$\mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\kappa = \mathcal{F}_{\tau \wedge \kappa}.$$

Zadanie 2.40

Niech σ i τ będą czasami zatrzymania. Pokaż, że zdarzenia $\{\sigma < \tau\}$ i $\{\sigma = \tau\}$ należą do $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma}$.

Zadanie 2.41

Pokaż, że jeżeli σ jest czasem zatrzymania, $\sigma \leq \tau$ oraz τ jest \mathcal{F}_σ mierzalny, to τ jest momentem zatrzymania.

Zadanie 2.42

Niech τ będzie czasem zatrzymania. Pokaż, że proces $X_t = \mathbb{1}_{[0,\tau)}(t)$ jest progresywnie mierzalny.

Zadanie 2.43

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{L}, \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesguea a $\mathcal{L} = \sigma(\mathcal{N} \cup \mathcal{B}[0,1])$ jest σ -ciałem zbiorów borelowskich uzupełnionych o zbiory miary zero \mathcal{N} . Niech $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{N})$ dla $t \geq 0$. Rozważmy $A = \{(x, x) : x \in [0, 1/2]\} \subseteq \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Pokaż, że $B = A \cap ([0, t] \times \Omega) \notin \mathcal{B}[0, t] \otimes \mathcal{F}_t$ (rozważ cięcie $B_t = \{x(t, x) \in B\} \subset \Omega$). Pokaż, że przez $X_t(\omega) = \mathbb{1}_A(t, \omega)$ jest adaptowalny.

Zadanie 2.44

Pokaż, że proces $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest progresywnie mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy $X: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest \mathcal{P} -mierzalne.

Zadanie 2.45

Niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolną bazą $L^2[0,1]$ i niech $h_n(t) = \int_0^t f_n(s) ds$. Niech $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o standardowym rozkładzie normalnym. Pokaż, że szereg $Y_t = \sum_n X_n h_n(t)$ jest zbieżny w $L^2(\Omega)$ dla każdego $t \in [0,1]$ oraz $(X_t)_{t \in [0,1]}$ ma takie same rozkłady skończenie wymiarowa co ruch Browna.

Zadanie 2.46

Niech $I(0) = \{1\}$, $I(n) = \{1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}\}$ dla $n \geq 1$. Układem Hara nazywamy rodzinę funkcji $(h_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, k \in I(n)}$ określonych na $[0,1]$ wzorami $h_{0,1}(t) = t$ oraz dla $n \geq 1$ i $k \in I(n)$,

$$h_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} & (2k-2)2^{-n} \leq t < (2k-1)2^{-n} \\ 2^{\frac{n-1}{2}} & (2k-1)2^{-n} \leq t < 2k2^{-n} \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}.$$

Układem Schaudera nazywamy rodzinę funkcji $(S_{n,k})_{n \in \mathbb{N}, k \in I(n)}$ na $[0,1]$ danych przez $S_{n,k}(t) = \int_0^t h_{n,k}(s) ds$. Niech $(X_{m,k})_{k,m \in \mathbb{N}}$ będzie rodziną niezależnych zmiennych losowych o standardowym rozkładzie normalnym. Połóżmy

$$W_t^{(n)}(\omega) = \sum_{m=0}^n \sum_{k \in I(m)} X_{m,k} S_{m,k}(t)$$

Wykaż, że dla prawie każdej $\omega \in \Omega$ ciąg funkcji $(W_t^{(n)}(\omega))_{t \in [0,1]}$ jest zbieżny jednostajnie. Oznaczmy granicę przez $W_t(\omega)$. Pokaż, że

$$B_t = (1+t)W_{\frac{1}{1+t}} - W_1$$

jest ruchem Browna.

Martyngały

Streszczenie Zbadamy teorię martyngałów z czasem ciągłym. Po nierównościach maksymalnych Dooba przedyskutujemy jednostajną całkowalność i wahanie martyngałów ciągłych.

Ustalmy filtrację $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ gdzie, gwoli przypomnienia, $T \subseteq [0, +\infty)$ jest przedziałem. Skupimy się teraz martyngałach. Jest to klasa procesów szczególnie istotnych dla teorii całki stochastycznej. W naturalny sposób pojawiają się one też w opisie gier losowych.

Przykład 3.1

Rozważmy grę w której gracz obstawia w kasynie wyniki rzutów monetą, na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$. Gra toczy się według zasad *double or nothing*: jeżeli wypadnie orzeł, to kapitał gracza jest podwajany. W przeciwnym wypadku gracz traci wszystkie pieniądze. Zastanówmy się, czy taka gra może być sprawiedliwa. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że gracz zaczyna z jednostkowym kapitałem. Jeżeli przez $\{\xi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ oznaczymy ciąg zmiennych iid o rozkładzie

$$\mathbb{P}[\xi_j = 2] = 1 - \mathbb{P}[\xi_j = 0] = p,$$

to zmienna losowa zadana przez

$$X_n = \prod_{j=1}^n \xi_j$$

reprezentuje kapitał gracza po n rzutach. Rozważmy filtrację $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zadaną przez $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_j : j \in [n])$. Sprawdźmy jaka jest oczekiwana wygrana gracza przy każdym kolejnym rzucie monetą. Zauważmy, że proces $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia zależność rekurencyjną $X_{n+1} = \xi_{n+1} X_n$. Wykorzystując ją otrzymujemy

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n \mathbb{E}[\xi_n] = X_n \cdot 2p.$$

Jeżeli $2p > 1$, to gra jest korzystna dla gracza. Jeśli natomiast $2p < 1$, to gra jest korzystniejsza dla kasyna. Gra będzie sprawiedliwa tylko dla $2p = 1$. Zachodzi wtedy

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n.$$

Pamiętajmy jednak, że nawet w przypadku, gdy $p \geq 1/2$ ale $p \neq 1$, z lematu Borala-Cantelliego $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$.

Przypomnijmy, że dla zmiennej losowej X i σ -ciała \mathcal{G} piszemy $X \in \mathcal{G}$, gdy X jest \mathcal{G} -mierzalna.

Definicja 3.2

Proces stochastyczny $M = (M_t)_{t \in T}$ nazywamy \mathbb{F} -martyngałem (nadmartyngałem, podmartyngałem), jeżeli dla każdego $t \in T$ zmienna losowa $M_t \in \mathcal{F}_t$ jest całkowalna oraz dla dowolnych $s \leq t, s, t \in T$,

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad (\leq M_s, \geq M_s).$$

Przykład 3.3

Przypomnijmy, że ruch Browna jest \mathbb{F}^B -martyngałem. Wobec niezależności jego przyrostów, dla $s < t$ zmienna $B_t - B_s$ jest niezależna od \mathcal{F}_s^B . Stąd

$$\mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s^B] = \mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{F}_s^B] + \mathbb{E}[B_s | \mathcal{F}_s^B] = \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s = B_s.$$

Podobnie pokazujemy, że proces Piossona jest \mathbb{F}^N -podmartyngałem. Mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_s^N] &= \mathbb{E}[N_t - N_s | \mathcal{F}_s^N] + \mathbb{E}[N_s | \mathcal{F}_s^N] \\ &= \mathbb{E}[N_t - N_s] + N_s = \lambda(t - s) + N_s \geq N_s. \end{aligned}$$

Zauważmy, że powyższe rachunki pokazują również, że $N_t - \lambda t$ jest \mathbb{F}^N -martyngałem.

Przypomnijmy, że jeżeli $M = (M_t)_{t \in T}$ jest martyngałem a $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taką funkcją wypukłą, że $\mathbb{E}[|\varphi(M_t)|] < \infty$ dla każdego $t \in T$, to warunkowa wersja nierówności Jensena daje nam

$$\mathbb{E}[\varphi(M_t) | \mathcal{F}_s] \geq \varphi(\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]) = \varphi(M_s).$$

Oznacza to, że proces $\varphi(M) = (\varphi(M_t))_{t \in T}$ jest podmartyngałem. Podobnie pokazujemy, że jeżeli M jest podmartyngałem, a ψ niemalejącą funkcją wypukłą taką, że $\mathbb{E}[|\psi(M_t)|] < \infty$ dla każdego $t \in T$, to $\psi(M) = (\psi(M_t))_{t \in T}$ również jest podmartyngałem. Rzeczywiście, korzystając z warunkowej nierówności Jensena a następnie z monotoniczności ψ otrzymujemy

$$\mathbb{E}[\psi(M_t) | \mathcal{F}_s] \geq \psi(\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]) \geq \psi(M_s).$$

Przykład 3.4

Proces $B \cdot B$ jest \mathbb{F}^B -martyngałem. Dodatkowo dla $\theta \in \mathbb{R}$ proces $M = (M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ zadany przez

$$M_t = \exp \left\{ \theta B_t - \frac{\theta^2}{2} t \right\}$$

również jest \mathbb{F}^B -martyngałem. Dokładne wyliczenia są przedmiotem **Zadania 3.1** oraz **Zadania 3.2**.

Przez większość wykładu skupimy się na badaniu martyngałów. Jest szczególnie proste kryterium na to, aby supermartyngał był w istocie martyngałem.

Fakt 3.5

Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ będzie supermartyngałem. Jeżeli $\mathbb{E}[X_t] = c < \infty$ dla pewnej stałej c i wszystkich $t \in T$, to X jest martyngałem.

Dowód. Pozostawiamy jako **Zadanie 3.5**. □

Z punktu widzenia całki stochastycznej najważniejsze są martyngały o skończonym drugim momencie.

Definicja 3.6

Powiemy, że martyngał $M = (M_t)_{t \in T}$ leży w L^p , jeżeli dla każdego $t \in T$ zmienna M_t należy do L^p . Dokładniej $\mathbb{E}|M_t|^p < \infty$. Powiemy, że martyngał jest całkowalny z kwadratem, jeżeli leży w L^2 .

Fakt 3.7

Załóżmy, że proces $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (pod)martyngałem a $H = (H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest nieujemnym, ograniczonym procesem takim, że $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$. Wówczas proces $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zadany przez

$$Y_0 = X_0, \quad Y_n = Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1}) = \sum_{k=1}^n H_k(X_k - X_{k-1}) + X_0 \quad (3.1)$$

jest (pod)martyngałem. W szczególności, dla każdego czasu zatrzymania $\tau \in \mathbb{N}$, proces zatrzymany $X^\tau = (X_{\tau \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$ jest (pod)martyngałem.

Dowód. To, że Y jest $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (pod)martyngałem, sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem. Mamy $Y_0 = X_0 \in \mathcal{F}_0$. Następnie rozumując indukcyjnie, wykorzystując ograniczoność H , mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_n] \\ &= Y_{n-1} + H_n \mathbb{E}[X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_n] = Y_{n-1} \quad (\geq Y_{n-1}).\end{aligned}$$

To dowodzi naszej pierwszej tezy. Jeżeli τ jest czasem zatrzymania, to zmienna $H_n = \mathbb{1}_{\{n \leq \tau\}} = 1 - \mathbb{1}_{\{\tau \leq n-1\}}$ jest mierzalna względem \mathcal{F}_{n-1} . Wówczas

$$Y_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{k \leq \tau\}} (X_k - X_{k-1}) + X_0 = \sum_{k=1}^{n \wedge \tau} (X_k - X_{k-1}) + X_0 = X_{\tau \wedge n}$$

jest (pod)martyngałem na mocy pierwszej części faktu. \square

Zauważmy, że teza powyższego faktu jest prawdziwa dla procesu H takiego, że $\mathbb{E}[H_n^2] < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ a X jest martyngałem całkowalnym z kwadratem. Proces Y zadany przez (3.1) nazywany jest niekiedy transformata martyngałową. Jak się przekonamy w następnym rozdziale jest to dyskretny odpowiednik całki stochastycznej. Zobaczmy teraz jak wykorzystać ją do dowodzenia twierdzeń o zatrzymaniu martyngałów.

Fakt 3.8

Ustalmy filtrację $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Niech $\sigma, \tau \in \mathbb{N}$ będą \mathbb{F} -czasami zatrzymania takimi, że dla pewnej stałej $C \in \mathbb{N}$,

$$\sigma(\omega) \leq \tau(\omega) \leq C$$

dla każdej $\omega \in \Omega$. Jeżeli $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest \mathbb{F} -podmartyngałem, to

$$X_\sigma \leq \mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma].$$

Jeżeli X jest \mathbb{F} -martyngałem, to powyżej zachodzi równość.

Dowód. Niech $H_n = \mathbb{1}_{\{n \leq \tau\}} - \mathbb{1}_{\{n \leq \sigma\}}$ i Y_n będzie dany przez (3.1). Wówczas dla $n > C$

$$Y_n - Y_0 = X_\tau - X_\sigma.$$

Skoro $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest podmartyngałem, to $\mathbb{E}Y_n \geq \mathbb{E}Y_0$ co z kolei pociąga

$$\mathbb{E}X_\tau \geq \mathbb{E}X_\sigma. \quad (3.2)$$

Ustalmy teraz dowolny zbiór $B \in \mathcal{F}_\sigma$ i zastosujmy udowodnioną właśnie nierówność do czasów zatrzymania

$$\sigma^B = \sigma \mathbb{1}_B + C \mathbb{1}_{B^c} \quad \text{oraz} \quad \tau^B = \tau \mathbb{1}_B + C \mathbb{1}_{B^c}. \quad (3.3)$$

Zauważmy, że zmienne σ^B oraz τ^B są istotnie czasami zatrzymania na mocy **Faktu 2.50**. Otrzymujemy w ten sposób

$$\mathbb{E} [X_\sigma \mathbb{1}_B + X_C \mathbb{1}_{B^c}] \leq \mathbb{E} [X_\tau \mathbb{1}_B + X_C \mathbb{1}_{B^c}]. \quad (3.4)$$

Skoro B jest dowolnym elementem \mathcal{F}_σ , to powyższa równość pociąga $\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geq X_\sigma$ p.w. Jeżeli X jest martyngałem, to w (3.2) oraz (3.4) zachodzą równości i w konsekwencji $\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma$. \square

Zauważmy, że **Fakt 3.8** nie jest prawdziwy bez założenia ograniczoności czasów zatrzymania σ i τ . Aby się o tym przekonać, rozważmy $M_0 = 0$, $M_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$, gdzie $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ są iid o rozkładzie $\mathbb{P}[\varepsilon_k = \pm 1] = \frac{1}{2}$. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_k : k \leq n)$ i $\sigma = 0$, $\tau = \inf\{n : M_n = 1\}$. Wówczas $\mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}_0] \neq M_0$ ponieważ $\mathbb{E}M_\tau = 1$ a $\mathbb{E}M_0 = 0$.

3.1 Nierówności maksymalne

Jedną z bardziej przydatnych własności martyngałów jest to, że momenty funkcji maksymalnej, tj. dla martyngału $X = (X_t)_{t \in T}$,

$$X^* = \sup_{t \in T} |X_t|$$

są kontrolowane przez momenty zmiennych X_t dla $t \in T$. Jak się za chwilę przekonamy jest to bezpośrednią konsekwencją twierdzenia o zatrzymaniu (**Fakt 3.8**). Dla liczby naturalnej N przyjmijmy $[N] = \{1, 2, \dots, N\}$.

Fakt 3.9

Jeżeli $X = (X_n)_{n \in [N]}$ jest podmartyngałem, to dla każdej $\lambda > 0$,

$$\lambda \mathbb{P} \left[\sup_{n \in [N]} X_n \geq \lambda \right] \leq \mathbb{E} \left[X_N \mathbb{1}_{\{\sup_{n \in [N]} X_n \geq \lambda\}} \right].$$

Dowód. Zdefiniujmy czas zatrzymania

$$\tau = N \wedge \min\{n \in [N] : X_n \geq \lambda\}.$$

Wówczas $X_\tau \geq \lambda$ na zbiorze $\{\sup_{n \in [N]} X_n \geq \lambda\}$. Oczywiście $\tau \leq N$. Na mocy **Faktu 3.8** otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_N &\geq \mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E} \left[X_\tau \mathbb{1}_{\{\sup_{n \in [N]} X_n \geq \lambda\}} \right] + \mathbb{E} \left[X_\tau \mathbb{1}_{\{\sup_{n \in [N]} X_n < \lambda\}} \right] \\ &\geq \lambda \mathbb{P} \left[\sup_{n \in [N]} X_n \geq \lambda \right] + \mathbb{E} \left[X_N \mathbb{1}_{\{\sup_{n \in [N]} X_n < \lambda\}} \right], \end{aligned}$$

co pociąga tezę. \square

Jeżeli $X = (X_n)_{n \in [N]}$ jest martyngałem lub nieujemnym podmartyngałem, a zmienna X_N jest w L^p , to korzystając z nierówności Jensena, w prosty sposób wnioskujemy, że $(|X_n|^p)_{n \in [N]}$ jest podmartyngałem. Stosując **Fakt 3.9** do nieujemnego podmartyngału $(|X_n|^p)_{n \in [N]}$ otrzymujemy nasz następny wniosek.

Wniosek 3.10

Niech $X = (X_n)_{n \in [N]}$ będzie martyngałem lub nieujemnym podmartyngałem. Wówczas dla każdego $p \geq 1$ i każdej $\lambda > 0$

$$\lambda^p \mathbb{P}[X^* \geq \lambda] \leq \mathbb{E}[|X_N|^p],$$

gdzie $X^* = \sup_{n \in [N]} |X_n|$.

Zobaczymy teraz jak szacowanie słabego typu z poprzedniego wniosku implikują oszacowania mocnego typu.

Fakt 3.11

Niech $X = (X_n)_{n \in [N]}$ będzie martyngałem lub nieujemnym podmartyngałem. Wówczas dla każdego $p > 1$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{n \in [N]} |X_n|^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[|X_N|^p].$$

Dowód. Przypomnijmy oznaczenie $X^* = \sup_{n \in [N]} |X_n|$. Stosując **Fakt 3.9** otrzymujemy dla dowolnego ustalonego $K > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X^* \wedge K)^p] &= \mathbb{E} \left[\int_0^{X^* \wedge K} p\lambda^{p-1} d\lambda \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^K p\lambda^{p-1} \mathbb{1}_{\{X^* \geq \lambda\}} d\lambda \right] \\ &= \int_0^K p\lambda^{p-1} \mathbb{P}[X^* \geq \lambda] d\lambda \leq \int_0^K p\lambda^{p-2} \mathbb{E} \left[|X_N| \mathbb{1}_{\{X^* \geq \lambda\}} \right] d\lambda \\ &= p \mathbb{E} \left[|X_N| \int_0^{X^* \wedge K} \lambda^{p-2} d\lambda \right] = \frac{p}{p-1} \mathbb{E} \left[|X_N| (X^* \wedge K)^{p-1} \right] \\ &\leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[|X_N|^p]^{1/p} \mathbb{E}[(X^* \wedge K)^p]^{(p-1)/p}, \end{aligned}$$

gdzie w ostatnim kroku zastosowaliśmy nierówność Cauchy'ego-Höldera. Skoro $\mathbb{E}[(X^* \wedge K)^p] < \infty$ możemy uprościć i otrzymać

$$\mathbb{E}[(X^* \wedge K)^p]^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[|X_N|^p]^{1/p}.$$

Przechodząc z $K \rightarrow \infty$ i stosując twierdzenie o zbieżności monotonicznej otrzymujemy tezę. \square

Naśladowując dowód **Faktu 3.11** można udowodnić szacowanie na $\mathbb{E}X^*$.

Zadanie

Niech $X = (X_n)_{n \in [N]}$ będzie martyngałem lub nieujemnym podmartyngałem. Pokaż, że

$$\mathbb{E} \left[\sup_{n \in [N]} |X_n| \right] \leq \frac{e}{e-1} (1 + \mathbb{E} [|X_N| \log^+ |X_N|]),$$

gdzie $\log^+(x) = 0 \vee \log(x) = \max\{0, \log(x)\}$.

Udowodnione przez nas nierówności maksymalne w czasie dyskretnym przenoszą się na czas ciągły przy założeniu na regularność trajektorii badanego martyngału.

Twierdzenie 3.12 (Nierówności maksymalne Dooba)

Niech T będzie przedziałem. Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \in T}$ jest martyngałem lub nieujemnym podmartyngałem. Załóżmy również, że X ma prawostronnie ciągłe trajektorie. Wówczas dla $X^* = \sup_{t \in T} |X_t|$ zachodzą nierówności

$$\mathbb{P} [X^* \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda^p} \sup_{t \in T} \mathbb{E} [|X_t|^p] \quad p \geq 1, \lambda > 0,$$

$$\mathbb{E} [(X^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sup_{t \in T} \mathbb{E} |X_t|^p \quad p > 1,$$

$$\mathbb{E} [X^*] \leq \frac{e}{e-1} \left(1 + \sup_{t \in T} \mathbb{E} [|X_t| \log^+ |X_t|] \right).$$

Dowód. Skupimy się na początku na pierwszej nierówności. Niech $D \subseteq T$ będzie dowolnym skończonym zbiorem. Na mocy z **Wniosku 3.10** zastosowanego do martyngału $(X_t)_{t \in D}$ otrzymujemy

$$\lambda^p \mathbb{P} \left[\sup_{t \in D} |X_t| \geq \lambda \right] \leq \sup_{t \in D} \mathbb{E} [|X_t|^p] \leq \sup_{t \in T} \mathbb{E} [|X_t|^p].$$

Niech T_0 będzie gęstym podzbiorem T zawierającym jego prawy koniec (o ile ten jest elementem T). Niech D_n będzie wstępującym ciągiem zbiorów skończonych wyczerpującym T_0 . Dokładniej $D_n \subseteq D_{n+1}$ oraz $\bigcup_n D_n = T_0$. Wówczas $\sup_{t \in D_n} |X_t| \nearrow \sup_{t \in T_0} |X_t|$ a co za tym idzie, dla $x \in (0, \lambda)$ mamy

$$\left\{ \sup_{t \in T_0} |X_t| > x \right\} = \left\{ \sup_{t \in D_n} |X_t| > x \text{ dla pewnego } n \right\}.$$

Korzystając z ciągłości prawdopodobieństwa otrzymujemy

$$\begin{aligned} x^p \mathbb{P}[X^* > x] &= x^p \mathbb{P} \left[\sup_{t \in T_0} |X_t| > x \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x^p \mathbb{P} \left[\sup_{t \in D_n} |X_t| > x \right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in D_n} \mathbb{E} [|X_t|^p] \\ &= \sup_{t \in T} \mathbb{E} [|X_t|^p]. \end{aligned}$$

przechodząc z $x \nearrow \lambda$ otrzymujemy pierwszą nierówność. Pozostałe dwie nierówności dowodzimy w analogiczny sposób. \square

Zauważmy, że jeżeli X jest martyngałem lub nieujemnym podmartyngałem, to funkcje $t \mapsto \mathbb{E}|X_t|^p$ oraz $t \mapsto \mathbb{E}|X_t| \log^+ |X_t|$ są rosnące. Jeżeli więc T zawiera element największy, to teza **Twierdzenia 3.12** nieznacznie się upraszcza.

Wniosek 3.13

Załóżmy, że $X = (X_t)_{t \in [a,b]}$ jest martyngałem lub nieujemnym podmartyngałem o prawostronnie ciągłych trajektoriach. Niech $X^* = \sup_{t \in [a,b]} |X_t|$. Wówczas

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X^* \geq \lambda] &\leq \frac{1}{\lambda^p} \mathbb{E} [|X_b|^p] && p \geq 1, \lambda > 0, \\ \mathbb{E} [(X^*)^p] &\leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} |X_b|^p && p > 1, \\ \mathbb{E} [X^*] &\leq \frac{e}{e-1} (1 + \mathbb{E} [|X_b| \log^+ |X_b|]). \end{aligned}$$

Przykład 3.14

Wiemy, że $M_t = \exp \left\{ \theta B_t - \frac{\theta^2}{2} t \right\}$ jest martyngałem. Korzystając z **Wniosku 3.13** zastosowanego do $(M_s)_{s \in [0,t]}$ otrzymujemy

$$\mathbb{P} \left[\sup_{s \in [0,t]} B_s \geq x \right] \leq \mathbb{P} \left[\sup_{s \in [0,t]} M_s > e^{\theta x - \frac{\theta^2}{2} t} \right] \leq e^{\theta x - \frac{\theta^2}{2} t}.$$

Wobec dowolności $\theta > 0$

$$\mathbb{P} \left[\sup_{s \in [0,t]} B_s \geq x \right] \leq \inf_{\theta > 0} e^{\theta x - \frac{\theta^2}{2} t} = e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

Uwaga 3.15

Korzystając z zasady odbicia (**Przykład 2.53**) dla ruchu Browna można pokazać, że

$$\mathbb{P} \left[\sup_{s \in [0, t]} B_s \geq x \right] = 2\mathbb{P}[B_t > x].$$

Jeżeli zastosujemy teraz **Lemat 2.30** otrzymujemy, dla ustalonego $t > 0$ i $x \rightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}[B_t > x] \sim \frac{\sqrt{t}}{x} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

W tym przypadku oszacowanie, które otrzymaliśmy z **Wniosku 3.13** nie jest idealne, ale wyłapuje odpowiedni rząd wielkości.

3.2 Zbieżność prawie na pewno

Przypomnijmy twierdzenie o zbieżności martyngałów z czasem dyskretnym.

Twierdzenie 3.16

Założmy że $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest podmartyngałem takim, że

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n^+] < \infty.$$

Wówczas, przy $n \rightarrow \infty$, X jest zbieżny p.w. do całkowalnej zmiennej losowej.

Przypomnijmy, że warunek obecny w **Twierdzeniu 3.16** jest automatycznie spełniony jeżeli X jest nieujemnym martyngałem. Rzeczywiście mamy wtedy $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n^+] = \mathbb{E}[X_0]$. Odnotujemy ten fakt w poniższym wniosku.

Wniosek 3.17

Jeżeli $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest nieujemnym martyngałem, to X_n zbiega p.w. do pewnej całkowalnej zmiennej losowej.

Przykład 3.18

Rozważmy proces $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ z **Przykładu 3.1** dla $p = 1/2$. Wówczas X jest nieujemnym martyngałem, więc z powyższego wniosku jest on zbieżny. Z lematu Borela-Cantelliego łatwo pokazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$ p.w.

Powyższy rezultat można udowodnić dla podmartyngałów o prawostronnie ciągłych trajektoriach. Dowód przebiega podobnie do dowodu w przypadku dyskretnym. Będziemy kontrolowali liczbę przejść w dół martyngału przez ustalone przedziały. Dla funkcji $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ i dowolnego skończonego podzbioru $F \subseteq T$ postaci $F = \{t_1, t_2, \dots, t_d\}$, gdzie $t_1 < t_2 < \dots < t_d$ i liczb rzeczywistych $\alpha < \beta$, definiujemy

$$\tau_1 = \inf\{t_k : f(t_k) > \beta\}, \quad \sigma_1 = \inf\{t_k : t_k > \tau_1, f(t_k) < \alpha\}.$$

Wówczas σ_1 jest pierwszym momentem przejścia w dół przez przedział $[\alpha, \beta]$ funkcji $f|_F$. Dla $n > 1$ definiujemy

$$\tau_n = \inf\{t_k : t_k > \sigma_{n-1}, f(t_k) > \beta\}, \quad \sigma_n = \inf\{t_k : t_k > \tau_{n-1}, f(t_k) < \alpha\}.$$

Określamy wreszcie liczbę przejść w dół przez przedział $[\alpha, \beta]$ funkcji $f|_F$ przez

$$D(f, F, [\alpha, \beta]) = \sup\{n : \sigma_n < \infty\} \vee 0.$$

Dla dowolnego $I \subseteq T$,

$$D(f, I, [\alpha, \beta]) = \sup\{D(f, F, [\alpha, \beta]) : F \subseteq I \text{ skończony}\}.$$

Zauważmy, że jeżeli $A \subseteq B \subseteq T$, to

$$D(f, A, [\alpha, \beta]) \leq D(f, B, [\alpha, \beta]).$$

Następny fakt pokazuje jak kontrolować oczekiwaną liczbę przejść w dół martyngału. Jest to kluczowy składnik dowodu twierdzenia o zbieżności.

Fakt 3.19

Dla podmartyngału $X = (X_t)_{t \in T}$, przeliczalnego $I \subseteq T$ i dowolnych $\alpha < \beta$,

$$\mathbb{E} [D(X, I, [\alpha, \beta])] \leq \frac{1}{\beta - \alpha} \sup_{t \in I} \mathbb{E}(X_t - \beta)^+$$

Dowód. Niech $F \subseteq I$ będzie skończony. Bez zmniejszania ogólności możemy przyjąć $F = [N]$ dla pewnej naturalnej N . Mamy

$$X_{\tau_k \wedge N} - X_{\sigma_k \wedge N} = \begin{cases} X_{\tau_k} - X_{\sigma_k} \geq \beta - \alpha & \text{gdy } \sigma_k < \infty \\ X_{\tau_k} - X_N \geq \beta - X_N \geq -(X_N - \beta)^+ & \text{gdy } \tau_k < \sigma_k = \infty \\ X_N - X_N = 0 & \text{gdy } \tau_k = \infty \end{cases}$$

Z **Faktu 3.8** otrzymujemy $\mathbb{E}X_{\tau_k \wedge N} \leq \mathbb{E}X_{\sigma_k \wedge N}$, a co za tym idzie

$$0 \geq \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^N X_{\tau_k \wedge N} - X_{\sigma_k \wedge N} \right] \geq (\beta - \alpha) \mathbb{E} [D(X, F, [\alpha, \beta])] - \mathbb{E}(X_N - \beta)^+.$$

Stąd

$$\mathbb{E} [D(X, F, [\alpha, \beta])] \leq \frac{1}{\beta - \alpha} \mathbb{E}(X_N - \beta)^+ \leq \frac{1}{\beta - \alpha} \sup_{t \in I} \mathbb{E}(X_t - \beta)^+.$$

Wybierając wstępujący ciąg zbiorów skończonych $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wyczerpujący I (czyli $F_n \subseteq F_{n+1}$ oraz $\bigcup_n F_n = I$) otrzymujemy

$$D(X, F_n, [\alpha, \beta]) \nearrow D(X, I, [\alpha, \beta]).$$

Stosując twierdzenie o zbieżności monotonicznej otrzymujemy tezę. \square

Twierdzenie 3.20

Założmy że $X = (X_t)_{t \in [a,b]}$, gdzie $b \leq \infty$, jest podmartyngałem o prawostronnie ciągłych trajektoriach takim, że

$$\sup_{t \in [a,b)} \mathbb{E} [X_t^+] < \infty.$$

Wówczas, przy $t \rightarrow b$, X jest zbieżny p.w. do całkowalnej zmiennej losowej.

Dowód. Dla $\alpha < \beta$ i $I = \mathbb{Q} \cap [a, b)$ z **Faktu 3.19** otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [D(X, \mathbb{Q} \cap [a, b), [\alpha, \beta])] &\leq \frac{1}{\beta - \alpha} \sup_{t \in \mathbb{Q} \cap [a, b)} \mathbb{E}(X_t - \beta)^+ \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \sup_{t \in [a, b)} \mathbb{E}(X_t - \beta)^+, \end{aligned}$$

co pociąga $\mathbb{P}[D(X, \mathbb{Q} \cap [a, b), [\alpha, \beta]) < \infty] = 1$. Jeśli

$$A = \bigcap_{\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha < \beta} \{D(X, \mathbb{Q} \cap [a, b), [\alpha, \beta]) < \infty\},$$

to $\mathbb{P}[A] = 1$. Niech $\omega \in A$. Wówczas $D(X, \mathbb{Q} \cap [a, b), [\alpha, \beta]) < \infty$ dla dowolnych wymiernych $\alpha < \beta$. Łatwo pokazać, że wówczas granica $X_b(\omega) = \lim_{t \rightarrow b-} X_t(\omega)$ istnieje. Rzeczywiście gdyby

$$\liminf_{t \rightarrow b-} X_t(\omega) < \limsup_{t \rightarrow b-} X_t(\omega),$$

to dla pewnych wymiernych $\alpha_0 < \beta_0$

$$\liminf_{t \rightarrow b-} X_t(\omega) < \alpha_0 < \beta_0 < \limsup_{t \rightarrow b-} X_t(\omega).$$

Prawostronna ciągłość X pociąga, istnienie ciągu liczb wymiernych $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ takiego, że $X_{q_{2n}} \geq \beta_0$ i $X_{q_{2n+1}} \leq \alpha_0$. Stąd $D(X, \mathbb{Q} \cap [a, b), [\alpha_0, \beta_0]) = \infty$. Uzyskana przed chwilą sprzeczność wykazuje, że $\lim_{t \rightarrow b-} X_t(\omega)$ istnieje dla $\omega \in A$. Zauważmy, że $\mathbb{E}|X_t| = 2\mathbb{E}X_t^+ - \mathbb{E}X_t \leq 2\mathbb{E}X_t^+ - \mathbb{E}X_0$, zatem $\sup_{t \in [a,b)} \mathbb{E}|X_t| < \infty$. Z lematu Fatou

$$\mathbb{E}|X| \leq \liminf_{t \rightarrow b-} \mathbb{E}|X_t| \leq \sup_{t \in [a,b)} \mathbb{E}|X_t| < \infty,$$

więc $\mathbb{E}|X| < \infty$. □

3.3 Jednostajna całkowalność

Wiemy, że $X_n \rightarrow X$ p.w. nie wystarcza do tego aby $\mathbb{E}X_n \rightarrow \mathbb{E}X$. Przykładem może być ciąg $X_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$ na $\Omega = [0,1]$. Wówczas $X_n \rightarrow 0$ p.w. ale $\mathbb{E}X_n = 1 \not\rightarrow 0$. Dzieje się tak, ponieważ masa X_n jako funkcji $X_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ są skupione na niemal rozłącznych kawałkach. To nieformalne wyjaśnienie jest doprecyzowane przez koncept jednostajnie całkowalności.

Definicja 3.21

Proces $(X_t)_{t \in T}$ nazywamy *jednostajnie całkowalnym*, jeżeli

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \mathbb{E} \left[|X_t| \mathbb{1}_{\{|X_t| > C\}} \right] = 0.$$

Zauważmy, że przytoczony proces $X_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$ nie jest jednostajnie całkowalny ponieważ przy ustalonym C , dla $n > C$ mamy $\mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| > C\}}] = 1$.

Przykład 3.22

Proces wspólnie ograniczony przez zmienną całkowalną, tzn. dla wszystkich $t \in T$, $|X_t| \leq Y$, gdzie $\mathbb{E}Y < \infty$ jest jednostajnie całkowalny. Rzeczywiście

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \mathbb{E} \left[|X_t| \mathbb{1}_{\{|X_t| > C\}} \right] \leq \lim_{C \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[|Y| \mathbb{1}_{\{Y > C\}} \right] = 0.$$

Przykład 3.23

Niech $X_t = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t]$ dla zmiennej $X \in \mathcal{F}$ takiej, że $\mathbb{E}|X| < \infty$. Mówimy wtedy, że X_t jest martyngałem zamkniętym przez zmienną X . Wówczas proces $(X_t)_{t \in T}$ jest jednostajnie całkowalny. Aby się o tym przekonać zauważmy najpierw, że

$$\mathbb{E}[|X_t|] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t]|] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X| | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[|X|].$$

Miara $\mu(d\omega) = |X(\omega)|\mathbb{P}(d\omega)$ jest absolutnie ciągła względem prawdopodobieństwa \mathbb{P} ($\mu \ll \mathbb{P}$). Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\mathbb{P}[A] < \delta \Rightarrow \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_A] = \mu(A) < \varepsilon.$$

Dla $C \geq \delta^{-1}\mathbb{E}[|X|]$ mamy

$$\mathbb{P}[|X_t| > C] \leq \frac{\mathbb{E}|X_t|}{C} \leq \frac{\mathbb{E}|X|}{C} \leq \delta.$$

Wówczas

$$\mathbb{E}[|X_t| \mathbb{1}_{\{|X_t| > C\}}] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_{\{|X_t| > C\}} | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_{\{|X_t| > C\}}] \leq \varepsilon.$$

Fakt 3.24

Proces $X = (X_t)_{t \in T}$ jest jednostajnie całkowalny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:

- a) $\sup_{t \in T} \mathbb{E}|X_t| < \infty$;
 b) Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\mathbb{P}[A] < \delta \Rightarrow \sup_{t \in T} \mathbb{E}[|X_t| \mathbb{1}_A] < \varepsilon.$$

Dowód. Załóżmy, że X jest jednostajnie całkowalny. Dla $\varepsilon > 0$ możemy dobrać $C > 0$ tak duże, aby $\sup_{t \in T} \mathbb{E}|X_t| \mathbb{1}_{\{|X_t| > C\}} \leq \varepsilon/2$. Wtedy

$$\sup_{t \in T} \mathbb{E}|X_t| \leq \sup_{t \in T} \mathbb{E}[|X_t| \mathbb{1}_{\{|X_t| > C\}}] + C \leq \frac{\varepsilon}{2} + C < \infty,$$

więc spełniony jest warunek a). Dla $\mathbb{P}[A] < \delta = \frac{\varepsilon}{2C}$ mamy

$$\sup_{t \in T} \mathbb{E}[|X_t| \mathbb{1}_A] \leq \sup_{t \in T} \mathbb{E}[|X_t| \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{|X_t| > C\}}] + C\mathbb{P}[A] < \varepsilon,$$

co pokazuje słuszność warunku b). Aby uzasadnić implikację odwrotną do $\varepsilon > 0$, dobieramy $\delta > 0$ jak w warunku b). Niech $C > \delta^{-1} \sup_{t \in T} \mathbb{E}|X_t|$. Wówczas dla dowolnego $t \in T$,

$$\mathbb{P}[|X_t| > C] \leq \frac{\mathbb{E}|X_t|}{C} \leq \frac{\sup_{t \in T} \mathbb{E}|X_t|}{C} < \delta$$

więc

$$\sup_{t \in T} \mathbb{E}[|X_t| \mathbb{1}_{\{|X_t| > C\}}] \leq \varepsilon.$$

Dowodzi to jednostajnej całkowalności X . □

Dla ciągu $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $p \geq 1$ wiemy, że jeżeli $X_n \rightarrow^{L^p(\Omega)} X_\infty$, tzn.

$$\|X_n - X_\infty\|_{L^p(\Omega)} = (\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|^p])^{1/p} \rightarrow 0,$$

to z nierówności Markowa $X_n \rightarrow^{\mathbb{P}} X_\infty$. Implikację tę można odwrócić przy założeniu jednostajnej całkowalności $(|X_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$.

Fakt 3.25

Niech $p \geq 1$. Załóżmy, że proces $(|X_n|^p)_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednostajnie całkowalny. Jeśli $X_n \rightarrow^{\mathbb{P}} X_\infty$, to $X_n \rightarrow^{L^p(\Omega)} X_\infty$.

Dowód. Istnieje podciąg n_k taki, że $X_{n_k} \rightarrow^{p.w.} X$. Z lematu Fatou dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{E}[|X|^p \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}\left[\lim_{k \rightarrow \infty} |X_{n_k}|^p \mathbb{1}_A\right] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_{n_k}|^p \mathbb{1}_A] \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|^p \mathbb{1}_A].$$

W szczególności, sprawdzając powyższe dla $A = \Omega$, $\mathbb{E}|X| < \infty$. Dla $\varepsilon > 0$ możemy dobrać $\delta > 0$ taką, że jeżeli $\mathbb{P}[A] < \delta$, to

$$\mathbb{E}[|X|^p \mathbb{1}_A] \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|^p \mathbb{1}_A] < \varepsilon.$$

Dla dostatecznie dużych n , $\mathbb{P}[|X - X_n| > \varepsilon] < \delta$. Wobec tego

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X - X_n|^p &= \mathbb{E}|X - X_n|^p \mathbb{1}_{\{|X - X_n| > \varepsilon\}} + \mathbb{E}|X - X_n|^p \mathbb{1}_{\{|X - X_n| \leq \varepsilon\}} \\ &\leq \mathbb{E}|X - X_n|^p \mathbb{1}_{\{|X - X_n| > \varepsilon\}} + \varepsilon^p \\ &\leq \mathbb{E}2^{p-1}(|X| + |X_n|)^p \mathbb{1}_{\{|X - X_n| > \varepsilon\}} + \varepsilon \leq 2^p \varepsilon + \varepsilon^p. \end{aligned}$$

□

3.4 Zbieżność w L_p

Do dowodu twierdzenia o zbieżności martyngałów w L^p potrzebna nam będzie ciągła wersja twierdzenia o zatrzymaniu.

Twierdzenie 3.26

Założmy, że $X = (X_t)_{t \in [a,b]}$ jest prawostronnie ciągłym martyngałem a τ i σ czasami zatrzymania takimi, że $\sigma(\omega) \leq \tau(\omega) \leq b$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$. Wówczas

$$\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma.$$

Dowód. Połóżmy

$$\tau_n = \begin{cases} b - \frac{k}{n}, & b - \frac{k+1}{n} < \tau \leq b - \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n^2 \\ b - n, & \tau < b - n \end{cases}$$

oraz

$$\sigma_n = \begin{cases} b - \frac{k}{n}, & b - \frac{k+1}{n} < \sigma \leq b - \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n^2 \\ b - n, & \sigma < b - n \end{cases}$$

Wówczas $\sigma_n \leq \tau_n \leq b$ są czasami zatrzymania przyjmującymi wartości w przeliczalnym zbiorze $T_0 = \{b - n\} \cup \{b - \frac{k}{n}\}_{k=0}^{n^2}$. Stosując **Fakt 3.8** do martyngału $(X_t)_{t \in T_0}$ i czasów zatrzymania $\tau_n \geq \sigma_n$, $b \geq \sigma_n$ i $b \geq \tau_n$ otrzymujemy odpowiednio

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_n}] = X_{\sigma_n}, \quad \mathbb{E}[X_b | \mathcal{F}_{\sigma_n}] = X_{\sigma_n} \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}[X_b | \mathcal{F}_{\tau_n}] = X_{\tau_n}.$$

W szczególności procesy $(X_{\sigma_n})_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(X_{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$ są jednostajnie całkowalne (**Przykład 3.23**). Skoro $\sigma_n \rightarrow \sigma+$ oraz $\tau_n \rightarrow \tau+$, to z prawostronnej ciągłości X , $X_{\sigma_n} \rightarrow X_\sigma$ oraz $X_{\tau_n} \rightarrow X_\tau$ p.w. Z **Faktu 3.25** zbieżność zachodzi również w $L^1(\Omega)$. Dla $A \in \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_{\sigma_n}$ mamy

$$\mathbb{E}X_\tau \mathbb{1}_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_{\tau_n} \mathbb{1}_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_{\sigma_n} \mathbb{1}_A = \mathbb{E}X_\sigma \mathbb{1}_A$$

co pociąga $\mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma$. \square

Fakt 3.27

Założmy, że $M = (M_t)_{t \in [a,b]}$ jest prawostronnie ciągłym martyngałem względem $(\mathcal{F}_t)_{t \in [a,b]}$. Wówczas dla dowolnego momentu zatrzymania τ , proces $M^\tau = (M_{\tau \wedge t})_{t \in [a,b]}$ jest martyngałem zarówno względem $(\mathcal{F}_t)_{t \in [a,b]}$, jak i $(\mathcal{F}_{\tau \wedge t})_{t \in [a,b]}$.

Dowód. Dla $s \leq t$ mamy $\tau \wedge s \leq \tau \wedge t \leq t$, więc z **Twierdzenia 3.26**

$$\mathbb{E}[M_{\tau \wedge t} | \mathcal{F}_{\tau \wedge s}] = M_{\tau \wedge s}$$

co pokazuje, że M^τ jest $(\mathcal{F}_{\tau \wedge t})_{t \in [a,b]}$ -martyngałem. Dla dowolnego $A \in \mathcal{F}_s$,

$$A \cap \{\tau > s\} \in \mathcal{F}_{\tau \wedge s}.$$

Rzeczywiście, jeżeli $t \geq s$, to

$$A \cap \{\tau > s\} \cap \{\tau \wedge s \leq t\} = A \cap \{\tau > s\} \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Gdy $t < s$, to $A \cap \{\tau > s\} \cap \{\tau \wedge s \leq t\} = \emptyset$. Skoro wiemy już, że M^τ jest $(\mathcal{F}_{\tau \wedge t})_{t \in [a,b]}$ -martyngałem, to

$$\mathbb{E}[M_{\tau \wedge t} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau > s\}}] = \mathbb{E}[M_{\tau \wedge s} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau > s\}}].$$

Ponadto

$$\mathbb{E}[M_{\tau \wedge t} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}}] = \mathbb{E}[M_\tau \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}}] = \mathbb{E}[M_{\tau \wedge s} \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}}].$$

Dodając stronami dwie udowodnione równości otrzymujemy

$$\mathbb{E}[M_{\tau \wedge t} \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_{\tau \wedge s} \mathbb{1}_A]$$

co oznacza, że $\mathbb{E}[M_{\tau \wedge t} | \mathcal{F}_s] = M_{\tau \wedge s}$. \square

Twierdzenie 3.28

Niech $X = (X_t)_{t \in [a,b]}$, gdzie $b \leq \infty$ będzie prawostronnie ciągłym martyngałem. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- X jest jednostajnie całkowalny;
- Istnieje całkowalna zmienna losowa X_b taka, że X_t zbiega do X_b w $L^1(\Omega)$, tzn. $\lim_{t \rightarrow b-} \mathbb{E}|X_b - X_t| = 0$;

c) Istnieje całkowalna zmienna losowa $X_b \in \mathcal{F}_b = \sigma\left(\bigcup_{t \in [a,b)} \mathcal{F}_t\right)$ taka, że $X_t = \mathbb{E}[X_b | \mathcal{F}_t]$ dla $t \in [a, b]$.

We wszystkich trzech przypadkach to $X_t \rightarrow X_b$ p.w.

Dowód. $a) \Rightarrow b)$ Jeżeli X jest jednostajnie całkowalny, to $\sup_{t \in [a,b)} \mathbb{E}|X_t| < \infty$. Z **Twierdzenia 3.20** istnieje granica $X_b := \lim_{t \rightarrow b-} X_t$. Zbieżność w $L^1(\Omega)$ wynika z jednostajnej całkowalności. $b) \Rightarrow c)$ Istnieje podciąg $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ taki, że $X_{t_k} \rightarrow X_b$ p.w. skąd X_b jest \mathcal{F}_b mierzalna. Ustalmy $t < b$. Dla dowolnego $s \geq t$ i $A \in \mathcal{F}_t$

$$\mathbb{E}X_t \mathbb{1}_A = \mathbb{E}X_s \mathbb{1}_A \rightarrow \mathbb{E}X_b \mathbb{1}_A \quad s \nearrow b.$$

$c) \Rightarrow a)$ Wiemy, że rodzina uśrednień ustalonej zmiennej jest jednostajnie całkowalna (**Przykład 3.23**). Ostatnia część twierdzenia wynika z dowodu implikacji $a) \Rightarrow b)$. \square

Twierdzenie 3.29

Niech $X = (X_t)_{t \in [a,b)}$, gdzie $b \leq \infty$ będzie prawostronnie ciągłym martyngałem. Niech $p \geq 1$. Wówczas następujące warunki są równoważne

- a) $\sup_{t \in [a,b)} \mathbb{E}|X_t|^p < \infty$;
- b) proces $(|X_t|^p)_{t \in [a,b)}$ jest jednostajnie całkowalny;
- b) Istnieje zmienna losowa $X_b \in L^p(\Omega)$ taka, że X_t zbiega do X_b w $L^p(\Omega)$, tzn. $\lim_{t \rightarrow b-} \mathbb{E}|X_b - X_t|^p = 0$;
- c) Istnieje zmienna losowa $X_b \in L^p(\Omega)$ mierzalna względem $\mathcal{F}_b = \sigma\left(\bigcup_{t \in [a,b)} \mathcal{F}_t\right)$ taka, że $X_t = \mathbb{E}[X_b | \mathcal{F}_t]$ dla $t \in [a, b]$.

We wszystkich czterech przypadkach to $X_t \rightarrow X_b$ p.w.

Dowód. $a) \Rightarrow b)$ z **Twierdzenia 3.12** dostajemy

$$\mathbb{E}|X^*|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t \in [a,b)} \mathbb{E}|X_t|^p < \infty,$$

co implikuje jednostajną całkowalność $(|X_t|^p)_{t \in [a,b)}$ ponieważ $|X_t|^p \leq |X^*|^p$. Pozostałe implikacje dowodzimy jak w dowodzie **Twierdzenia 3.28**. \square

3.5 Proces nawiasów skośnych

Wiemy już, że trajektorie ruchu Browna mają nieskończone wahanie z prawdopodobieństwem jeden. Okazuje się, że jest prawdziwy znaczenie ogólniejszy fakt.

Twierdzenie 3.30

Założmy, że $M = (M_t)_{t \in [a,b]}$ jest ciągłym martyngałem. Niech

$$A = \{\omega : \text{Wah}_{[a,b]} M(\omega) < \infty\} \in \mathcal{F}.$$

Wówczas na zbiorze A trajektorie M są stałe, dokładniej

$$\mathbb{P}[\forall t \in [a, b] M_t \mathbb{1}_A = M_a \mathbb{1}_A] = 1.$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że dla pewnej stałej C ,

$$\text{Wah}_{[a,b]} M(\omega) < C \quad \text{oraz} \quad \sup_{t \in [a,b]} M_t(\omega) \leq C$$

dla wszystkich $\omega \in \Omega$. Dla $u \in (0, b - a)$ rozważmy zmienne

$$X_n = \sum_{k=0}^{n-1} (M_{a+(k+1)u/n} - M_{a+ku/n})^2.$$

Skoro M jest całkowalny z kwadratem, to dla $s < t$,

$$\mathbb{E}[M_s M_t] = \mathbb{E}[M_s \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]] = \mathbb{E}[M_s^2]$$

a co za tym idzie $\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2]$. Wobec tego

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} (M_{a+(k+1)u/n} - M_{a+ku/n})^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} M_{a+(k+1)u/n}^2 - \mathbb{E} M_{a+ku/n}^2 = \mathbb{E} M_{a+u}^2 - \mathbb{E} M_a^2. \end{aligned}$$

Mamy

$$\begin{aligned} X_n &\leq \sup_{0 \leq k \leq n-1} |M_{a+(k+1)u/n} - M_{a+ku/n}| \sum_{k=0}^{n-1} |M_{a+(k+1)u/n} - M_{a+ku/n}| \\ &\leq \sup_{|t-s| \leq u/n} |M_{a+(k+1)u/n} - M_{a+ku/n}| \text{Wah}_{[a,b]} M. \end{aligned}$$

Skąd $X_n \leq 2C^2$. Z ciągłości M , $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$. Z twierdzenia o zbieżności zmajorizowanej $\mathbb{E} X_n \rightarrow 0$, czyli $\mathbb{E} M_{a+u}^2 = \mathbb{E} M_a^2$. Zauważmy jednak, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E} M_{a+u}^2 &= \mathbb{E} \left[M_a^2 + 2M_a(M_{a+u} - M_a) + (M_{a+u} - M_a)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[M_a^2 + (M_{a+u} - M_a)^2 \right]. \end{aligned}$$

Stąd $M_{a+u} = M_a$ p.w. Wobec dowolności u i ciągłości M $\mathbb{P}[\forall t M_t = M_a] = 1$. To kończy dowód w przypadku ograniczonego martynału o skończonym wahanu. Dla dowolnego martynału M , rozważmy czasy zatrzymania

$$\tau_n = \inf_{t \geq a} \{ \text{Wah}_{[a,t]} M \geq n \} \wedge \inf_{t \geq a} \{ \sup_{[a,t]} M \geq n \}.$$

Wówczas możemy zastosować pierwszy krok do martynału M^{τ_n} i $C = n$. Martynał M^{τ_n} ma więc stałe trajektorie p.w. Jeśli $\omega \in A$, to dla dostatecznie dużych n , $\tau_n(\omega) = \infty$. \square

Zadanie

Pokaż, że martynał M i czasu zatrzymania τ_n pojawiających się w dowodzie **Twierdzenia 3.30** zachodzi

$$\sup_{t \in [a,b]} |M_{t \wedge \tau_n}| \leq n \quad \text{oraz} \quad \text{Wah}_{[a,b]} M^{\tau_n} \leq n.$$

Przypomnijmy, że dla podmartynału $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zachodzi *rozkład Dooba*

$$X_n = Y_n + A_n,$$

gdzie $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest martynałem a $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest niemalejący taki, że $A_0 = 0$. Przy odpowiednich technicznych założeniach ten rozkład pozostaje prawdziwy dla podmartynałów w czasie ciągłym, tj. dla podmartynału $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ zachodzi *rozkład Dooba-Meyera*,

$$X_t = Y_t + A_t,$$

gdzie $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest martynałem a $(A_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest niemalejący taki, że $A_0 = 0$. Nie będziemy potrzebowali powyższego twierdzenia w pełnej ogólności a jedynie w przypadku podmartynałów postaci $X_t = M_t^2$, gdzie $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest ciągłym martynałem całkowalnym z kwadratem. Zanim zaprezentujemy główne twierdzenie przypomnijmy, że dla ruchu Browna $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ i

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} |\Delta B_{t_k^n}|^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} t.$$

Przypomnijmy, że $\Delta B_{t_k^n} = B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}$. Wiemy też, że proces $B_t^2 - t$ jest martynałem. To, że w obu miejscach pojawia się funkcja $f(t) = t$ nie jest przypadkiem.

Twierdzenie 3.31

Niech $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie ciągłym martynałem całkowalnym z kwadratem. Wówczas istnieje jedyny ciągły, niemalejący proces $A = (A_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ taki, że $A_0 = 0$ oraz $M_t^2 - A_t$ jest martynałem. Dodatkowo dla każ-

dego $t \in \mathbb{R}_+$ i każdego normalnego ciągu podziałów $\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ odcinka $[0, t]$ zachodzi

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} |\Delta M_{t_k^n}|^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} A_t. \quad (3.5)$$

Oznaczamy wtedy $\langle M \rangle_t = A_t$ oraz $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Proces $\langle M \rangle$ nazywamy *procesem nawiasów skośnych* M

Zanim przejdziemy do dowodu powyższego twierdzenia uzasadnimy potrzebę rozważania procesu nawiasów skośnych i wprowadzimy jego uogólnienie.

Przykład 3.32

Wiemy, że $B_t^2 - t$ jest martyngałem, stąd $\langle B \rangle_t = t$.

Zadanie

Pokaż, że $\langle B \cdot B \rangle_t = \int_0^t B_s^2 ds$.

Zadanie

Niech $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ będzie ciągłym procesem o ograniczonym wahanii. Pokaż, że dla każdego normalnego ciągu podziałów $\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ odcinka $[0, 1]$ zachodzi

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} |\Delta X_{t_k^n}|^2 \xrightarrow{p.w.} 0.$$

Uwaga 3.33

Zauważmy, że proces $\langle M \rangle_t$ nie zależy od początkowej wartości M . Dokładniej, jeżeli $M_t = N_0 + N_t$, to $\langle M \rangle_t = \langle N \rangle_t$. Wynika to z drugiej części **Twierdzenia 3.31**.

Proces nawiasów skośnych jest szczególnie istotny dla teorii całki stochastycznej. Przypomnijmy, że dla całki Riemanna-Stieltjesa ze wzoru na całkowanie przez części wynika, że

$$\int_0^t f(s) df(s) = \frac{1}{2} f(t)^2 - \frac{1}{2} f(0)^2, \quad (3.6)$$

dla ciągłej f o ograniczonym wahanii na przedziale $[0, t]$. Zastanówmy się, jak będzie wyglądał powyższy wzór jeżeli deterministyczną funkcję f zastąpimy ciągłym martyngałem $M = (M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Dla ustalonego $t > 0$ i normalnego ciągu podziałów $\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ odcinka $[0, t]$ na mocy tych samych wyliczeń jak w **Przykładzie 1.20**,

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} M_{t_k^n} \Delta M_{t_k^n} = \frac{1}{2} M_t^2 - \frac{1}{2} M_0^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_n-1} |\Delta M_{t_k^n}|^2.$$

Twierdzenie 3.31 mówi, że prawa strona zbiega do $\frac{1}{2}M_t^2 - \frac{1}{2}M_0^2 - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t$. Lewa strona zaś będzie w przyszłości aproksymacją całki stochastycznej $\int_0^t M_s dM_s$, którą zdefiniujemy w kolejnych rozdziałach. Zobaczmy wtedy, że prawdziwy jest wzór

$$\int_0^t M_s dM_s = \frac{1}{2}M_t^2 - \frac{1}{2}M_0^2 - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t.$$

Zadanie

Niech $(M_t)_{t \in [0, \infty)}$ będzie ciągłym martyngałem całkownym z kwadratem. Pokaż, że dla dowolnego czasu zatrzymania τ zachodzi $\langle M^\tau \rangle = \langle M \rangle^\tau$.

Proces nawiasów skośnych pojawia się w stochastycznym odpowiedniku szczególnej wersji wzoru na całkowanie przez części (3.6). Jak wygląda odpowiednik ogólny? Przypomnijmy, że dla ciągłych f i g o ograniczonym wahanu na $[0, t]$,

$$\int_a^b f(s) dg(s) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(s) df(s).$$

Dla ciągłych martyngałów N i M ,

$$M_t N_t - M_0 N_0 = \sum_{k=0}^{k_n-1} M_{t_k^n} \Delta N_{t_k^n} + \sum_{k=0}^{k_n-1} N_{t_k^n} \Delta M_{t_k^n} + \sum_{k=0}^{k_n-1} \Delta N_{t_k^n} \Delta M_{t_k^n}. \quad (3.7)$$

Podobnie jak poprzednio pierwsze dwa składniki po prawej stronie będą aproksymowały $\int_0^t M_s dN_s$ oraz $\int_0^t N_s dM_s$ odpowiednio. Potrzebny nam będzie proces graniczny dla ostatniego wyrażenia po prawej stronie. Widzimy, że będzie to dwuliniowy odpowiednik nawiasu skośnego.

Definicja 3.34

Nawiasem skośnym dwóch ciągłych martyngałów całkownych z kwadratem M i N nazywamy proces $\langle M, N \rangle$ zadany przez

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{4} (\langle M + N \rangle_t - \langle M - N \rangle_t).$$

Przykład 3.35

Niech B i B' będą niezależnymi ruchami Browna. Wówczas $\frac{\sqrt{2}}{2}(B \pm B')$ jest ruchem Browna a co za tym idzie

$$\langle B, B' \rangle_t = \frac{1}{4} (2t - 2t) = 0.$$

Twierdzenie 3.36

Niech M i N będą ciągłymi martyngałami całkowanymi z kwadratem. Wówczas

- (i) $\langle M, N \rangle$ jest jedynym procesem ciągłym, o ograniczonym dla którego $M_t N_t - \langle M, N \rangle_t$ jest martyngałem.
- (ii) Dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ i każdego normalnego ciągu podziałów $\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ odcinka $[0, t]$ zachodzi

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} \Delta N_{t_k^n} \Delta M_{t_k^n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle M, N \rangle_t.$$

Dowód. Pozostawiamy jako **Zadanie 3.24**. □

Zadanie

Niech $(M_t)_{t \in [0, +\infty)}$ będzie ciągłym martyngałem całkowanym z kwadratem. Niech dla $s < t$ będzie dany podział odcinka $[s, t]$ punktami $s = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = t$. Pokaż, że

$$\mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^k (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[M_t^2 - M_s^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[(M_t - M_s)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right].$$

Dowód Twierdzenia 3.31. Jednoznaczność jest konsekwencją **Twierdzenia 3.30**. Jeżeli istnieją dwa niemalejące procesy $A = (A_t)_{t \in [0, \infty)}$ oraz $A' = (A'_t)_{t \in [0, \infty)}$ takie, że $N = M^2 - A$ oraz $N' = M^2 - A'$ są martyngałami, to wówczas dla każdego $t > 0$,

$$N_t + A_t = M_t^2 = N'_t + A'_t$$

a co za tym idzie

$$N_t - N'_t = A'_t - A_t.$$

Lewa strona stanowi ciągły martyngał, natomiast prawa proces o ograniczonym wahanii. Wszystkie trajektorie ciągłego martyngału $N_t - N'_t$ mają ograniczone wahanie. **Twierdzenia 3.30** zapewnia, że $N_t - N'_t$ jest procesem stałym. Wobec tego

$$N_t - N'_t = N_0 - N'_0 = A'_0 - A_0 = 0 - 0 = 0.$$

Pokażemy teraz, że proces A o zadanych własnościach istnieje. Załóżmy na początek, że M jest ograniczonym martyngałem startującym z zera. Ustalmy ciąg $\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ taki, jak w treści **Twierdzenia 3.31**. Zauważmy na początek, że dla $0 \leq r < s$ i każdej \mathcal{F}_r mierzalnej ograniczonej zmiennej losowej Z , proces

$$N_t = Z(M_{s \wedge t} - M_{r \wedge t}) \tag{3.8}$$

jest martyngałem.

Zadanie

Sprawdź, że N_t dany przez (3.8) jest martynałem.

Podobnie martynałem jest

$$X_t^n = \sum_{i=1}^{k_n} M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n \wedge t} - M_{t_{i-1}^n \wedge t}).$$

Proces $X^n = (X_s^n)_{s \in [0, t]}$, tak jak M , jest ograniczony. Dla dowolnego $j \leq k_n$

$$M_{t_j^n}^2 - 2X_{t_j^n}^n = \sum_{i=1}^j (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2. \quad (3.9)$$

Zadanie

Zweryfikuj poprawność wzoru (3.9).

Lemat 3.37

Przy przyjętych oznaczeniach

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[|X_t^n - X_t^m|^2 \right] = 0.$$

Dowód. Załóżmy, że $n \leq m$. W podwójnej sumie

$$\mathbb{E}[X_t^n X_t^m] = \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{k_m} \mathbb{E} \left[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) M_{t_{j-1}^m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}) \right]$$

jedynie niezerowe składniki odpowiadają indeksom k i j takim, że $(t_{j-1}^m, t_j^m] \subseteq (t_{i-1}^n, t_i^n]$. Rzeczywiście, jeżeli przykładowo $t_i^n \leq t_{j-1}^m$, to warunkując względem $\mathcal{F}_{t_{j-1}^m}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) M_{t_{j-1}^m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) M_{t_{j-1}^m} \mathbb{E}[M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m} | \mathcal{F}_{t_{j-1}^m}] \right] = 0. \end{aligned}$$

Podobnie traktujemy przypadek $t_{i-1}^n > t_j^m$. Dla każdego $j = 1, 2, \dots, k_m$, oznaczmy przez $i_{n,m}(j)$ taki indeks i , że $(t_{j-1}^m, t_j^m] \subseteq (t_{i-1}^n, t_i^n]$. Z poprzedniej obserwacji otrzymujemy

$$\mathbb{E}[X_t^n X_t^m] = \sum_{1 \leq j \leq k_m, i = i_{n,m}(j)} \mathbb{E} \left[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) M_{t_{j-1}^m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}) \right].$$

W każdym ze składników $\mathbb{E} \left[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) M_{t_{j-1}^m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}) \right]$ mamy

$$M_{t_i}^n - M_{t_{i-1}}^n = \sum_{k: i_{n,m}(k)=i} M_{t_k}^m - M_{t_{k-1}}^m.$$

Zauważmy, że jeżeli k i j są takie, że $i_{n,m}(k) = k_{n,m}(j)$ ale $j \neq k$, to

$$\mathbb{E} \left[M_{t_{i-1}}^n (M_{t_k}^m - M_{t_{k-1}}^m) M_{t_{j-1}}^m (M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m) \right] = 0.$$

Stąd

$$\mathbb{E}[X_t^n X_t^m] = \sum_{1 \leq j \leq k_m, i = k_{n,m}(j)} \mathbb{E} \left[M_{t_{i-1}}^n M_{t_{j-1}}^m (M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m)^2 \right].$$

W szczególności dla $n = m$ otrzymujemy

$$\mathbb{E}[(X_t^m)^2] = \sum_{1 \leq j \leq k_m} \mathbb{E} \left[M_{t_{j-1}}^{2m} (M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m)^2 \right].$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_t^n)^2] &= \sum_{1 \leq i \leq k_n} \mathbb{E} \left[M_{t_{i-1}}^{2n} (M_{t_i}^n - M_{t_{i-1}}^n)^2 \right] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k_n} \mathbb{E} \left[M_{t_{i-1}}^{2n} \mathbb{E} \left[(M_{t_i}^n - M_{t_{i-1}}^n)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}}^n \right] \right] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k_n} \mathbb{E} \left[M_{t_{i-1}}^{2n} \sum_{j: i_{n,m}(j)=i} \mathbb{E} \left[(M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}}^n \right] \right] \\ &= \sum_{1 \leq j \leq k_n, i_{n,m}(j)=i} \mathbb{E} \left[M_{t_{i-1}}^{2n} (M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m)^2 \right], \end{aligned}$$

gdzie równość

$$\mathbb{E} \left[(M_{t_i}^n - M_{t_{i-1}}^n)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}}^n \right] = \sum_{j: i_{n,m}(j)=i} \mathbb{E} \left[(M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}}^n \right]$$

wynika z **Zadania 3.27**. Otrzymujemy

$$\mathbb{E} \left[(X_t^n - X_t^m)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{1 \leq j \leq k_n, i_{n,m}(j)=i} (M_{t_{i-1}}^n - M_{t_{j-1}}^m)^2 (M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m)^2 \right]$$

co z nierówności Schwarza daje

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(X_t^n - X_t^m)^2 \right] &\leq \mathbb{E} \left[\sup_{1 \leq j \leq k_m, i = i_{n,m}(j)} (M_{t_{i-1}}^n - M_{t_{j-1}}^m)^4 \right]^{1/2} \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[\left(\sum_{1 \leq j \leq k_m} (M_{t_j}^m - M_{t_{j-1}}^m)^2 \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Ciągłość i ograniczoność trajektorii M w połączeniu z twierdzeniem o zbieżności ograniczonej daje

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty, n \leq m} \mathbb{E} \left[\sup_{1 \leq j \leq k_m, i = i_{n,m}(j)} (M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m})^4 \right] = 0.$$

Pozostaje zatem sprawdzić, że dla dostatecznie dużej stałej

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{1 \leq j \leq k_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right)^2 \right] \leq C.$$

Niech A będzie stałą ograniczającą M , czyli $|M_s| \leq A$ dla każdego $s \in [0, t]$. Stosując jak poprzednio **Zadanie 3.27** otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\sum_{1 \leq j \leq k_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{1 \leq j \leq k_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^4 \right] + 2\mathbb{E} \left[\sum_{1 \leq j < k \leq k_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 (M_{t_k^m} - M_{t_{k-1}^m})^2 \right] \\ &\leq 4A^2 \mathbb{E} \left[\sum_{1 \leq j \leq k_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right] \\ &+ 2 \sum_{j=1}^{k_m-1} \mathbb{E} \left[(M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \mathbb{E} \left[\sum_{k=j+1}^{k_m} (M_{t_k^m} - M_{t_{k-1}^m})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_j^m} \right] \right] \\ &\leq 4A^2 \mathbb{E} \left[\sum_{1 \leq j \leq k_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right] \\ &+ 2 \sum_{j=1}^{k_m-1} \mathbb{E} \left[(M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \mathbb{E} \left[(M_{t_{k-1}^m} - M_{t_{k-2}^m})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_j^m} \right] \right] \\ &\leq 12A^2 \mathbb{E} \left[\sum_{1 \leq j \leq k_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right] = 12A^2 \mathbb{E} \left[(M_b - M_0)^2 \right] \leq 48A^2 = C. \end{aligned}$$

□

Lemat 3.37 w połączeniu z nierównością maksymalną Dooba daje dla dowolnego ustalonego $t > 0$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} (X_s^n - X_s^m)^2 \right] \leq 4\mathbb{E} \left[(X_t^n - X_t^m)^2 \right] \rightarrow 0.$$

W szczególności, dla każdego $s \in [0, t]$ ciąg $(X_t^n)_n$ jest zbieżny w L^2 . Chcemy pokazać, że granica Y jako proces określony na zbiorze $[0, t]$ ma ciągłe trajektorie. Możemy wybrać podciąg $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ taki, że

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} (X_s^{n_k} - X_s^{n_{k+1}})^2 \right] \leq 2^{-k}.$$

Wówczas

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{s \in [0, t]} (X_s^{n_k} - X_s^{n_{k+1}})^2 \right] < \infty$$

a co za tym idzie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{s \in [0, t]} (X_s^{n_k} - X_s^{n_{k+1}})^2 < \infty \quad p.w.$$

Niech N będzie zbiorem, na którym powyższy szereg jest rozbieżny. Wówczas $\mathbb{P}[N] = 0$. Dla $\omega \notin N$, ciąg funkcji $X^{n_k}(\omega)$ jest zbieżny jednostajnie na zbiorze $[0, t]$, więc funkcja graniczna jest ciągła. Połóżmy $Y_s(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} X_s^{n_k}(\omega)$ dla $\omega \notin N$ oraz $Y_s(\omega) = 0$ dla $\omega \in N$. Wówczas proces $Y = (Y_s)_{s \in [0, t]}$ ma ciągłe trajektorie. Dodatkowo dla każdego $s \in [0, t]$, zmienna Y_s jest \mathcal{F}_s mierzalna (tutaj korzystamy ze zwyczajnych warunków, które spełnia $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$, ponieważ wtedy $N \in \mathcal{F}_t$). Skoro granica w L^2 musi być zgodna z granicą p.w. wiemy, że X_s^n zbiega w L^2 do Y_s . Skoro dla każdego n , $(X_s^n)_{s \in [0, t]}$ jest martyngałem, to dla $s > r$, z uzasadnionej właśnie zbieżności w $L^2(\Omega)$,

$$\mathbb{E}[Y_s | \mathcal{F}_r] = Y_r \quad p.w.$$

Oznacza to, że $(Y_{s \wedge t})_{s \in [0, \infty)}$ jest martyngałem o ciągłych trajektoriach. Z drugiej strony wzór (3.9) pokazuje, że trajektorie procesy $M_s^2 - 2X_s^{n_k}$ są niemalejące wzdłuż ciągu $\{t_i^n\}_{i=0}^{k_n}$. Dokładniej

$$M_{t_i^n}^2 - 2X_{t_i^n}^{n_k} \leq M_{t_{i+1}^n}^2 - 2X_{t_{i+1}^n}^{n_k}.$$

Przechodząc $n \rightarrow \infty$ widzimy, że trajektorie $M_s^2 - 2Y_s$ są niemalejące poza zbiorem N . Niech $B_s^{(t)} = M_s^2 - 2Y_s$ dla $\omega \notin N$ oraz $B_s^{(t)} = 0$ dla $\omega \in N$. Wówczas $B_s^{(t)}$ jest \mathcal{F}_s mierzalna dla każdego $s \in [0, t]$, trajektorie $B^{(t)}$ są ciągłe i niemalejące oraz $(M_{s \wedge t} - B_{s \wedge t}^{(t)})_{s \in [0, \infty)}$ jest martyngałem.

Stosujemy powyższą procedurę dla $t = n$, gdzie n przebiega zbiór liczb naturalnych. W ten sposób otrzymujemy ciąg procesów $(B^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $(M_{s \wedge n} - B_{s \wedge n}^{(n)})_{s \in [0, \infty)}$ jest martyngałem. Z uzasadnionej już jednoznaczności, $B^{(n+1)}$ zgadza się z $B^{(n)}$ na przedziale $[0, n]$. Innymi słowy

$$B_{s \wedge n}^{(n+1)} = B_{s \wedge n}^{(n)}.$$

Możemy zadem zdefiniować A_s dla $s \in [0, n]$ jako $A_s = B_s^{(n)}$. Oczywiście $(M_s^2 - A_s)_{s \in [0, \infty)}$ jest martyngałem. Aby uzasadnić zbieżność (3.5) zauważmy, że dla ustalonego $t > 0$ i procesy $A_{t \wedge s}$ oraz $B_{t \wedge s}^{(t)}$ są nierozróżnialne. Wynika to z tego, że $M_s^2 - A_{t \wedge s}$ oraz $M_s^2 - B_{t \wedge s}^{(t)}$ są martyngałami. W szczególności $A_t = B_t^{(t)}$. Pokazaliśmy już, że X_t^n zbiega w L^2 do $Y_t = \frac{1}{2}(M_t^2 - B_t^{(t)})$. Wobec tego tożsamość (3.9) dla $j = k_n$ daje

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} |M_{t_{k+1}^n} - M_{t_k^n}|^2 \rightarrow \mathbb{P} A_t.$$

To kończy dowód w przypadku ograniczonego M startującego z zera. W przypadku dowolnego ciągłego martyngału całkowalnego z kwadratem M startującego z zera rozważmy

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}.$$

Wówczas $M_{t \wedge \tau_n} \leq n$. Stosując pierwszą część dowodu do ciągu ograniczonych martyngałów $M^{\tau_n} = (M_{t \wedge \tau_n})_{t \in [0, \infty)}$ otrzymujemy ciąg rosnących procesów $A^{[n]} = (A_t^{[n]})_{n \in \mathbb{N}}$, $A_t^{[n]} = \langle M^{\tau_n} \rangle_t$. Kładziemy $A_t = \lim_{n \rightarrow \infty} A_t^{[n]}$, przy czym dla ustalonego t ciąg $A_t^{[n]}$ jest stały od pewnego miejsca.

Z konstrukcji wynika, że $M_{t \wedge \tau_n}^2 - A_{t \wedge \tau_n}$ jest martyngałem. Dla każdego $s < t$ i $A \in \mathcal{F}_s$

$$\mathbb{E} \mathbb{1}_A (M_{t \wedge \tau_n}^2 - A_{t \wedge \tau_n}) = \mathbb{E} \mathbb{1}_A (M_{s \wedge \tau_n}^2 - A_{s \wedge \tau_n})$$

Mamy $M_{t \wedge \tau_n}^2 \leq \sup_{s \in [0, t]} M_s^2$ przy czym $\mathbb{E} \sup_{s \in [0, t]} M_s^2 \leq 4\mathbb{E} M_t^2$. Stosując twierdzenie o zbieżności ograniczonej otrzymujemy

$$\mathbb{E} \mathbb{1}_A M_{t \wedge \tau_n}^2 \rightarrow \mathbb{E} \mathbb{1}_A M_t^2.$$

podobnie

$$\mathbb{E} \mathbb{1}_A M_{s \wedge \tau_n}^2 \rightarrow \mathbb{E} \mathbb{1}_A M_s^2.$$

Z kolei z twierdzenia o zbieżności monotonicznej

$$\mathbb{E} \mathbb{1}_A (A_{t \wedge \tau_n}) \rightarrow \mathbb{E} \mathbb{1}_A A_t, \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E} \mathbb{1}_A (A_{s \wedge \tau_n}) \rightarrow \mathbb{E} \mathbb{1}_A A_s.$$

Stąd

$$\mathbb{E} \mathbb{1}_A (M_t^2 - A_t) = \mathbb{E} \mathbb{1}_A (M_s^2 - A_s)$$

co oznacza, że $M^2 - A$ jest martyngałem. \square

3.6 Zadania

Zadanie 3.1

Pokaż, że proces $B \cdot B$ jest \mathbb{F}^B -martyngałem.

Zadanie 3.2

Uzasadnij, że dla $\theta \in \mathbb{R}$ proces

$$M_t = \exp \left\{ \theta B_t - \frac{\theta^2}{2} t \right\}$$

jest \mathbb{F}^B -martyngałem.

Zadanie 3.3

Pokaż, że dla każdego $K > 0$ proces

$$M_t = \left(e^{B_t} - K \right)^+$$

jest \mathbb{F}^B -podmartyngałem.

Zadanie 3.4

Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ będzie podmartyngałem takim, że $\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_t]$ dla każdego $t \in T$. Pokaż, że X jest martyngałem.

Zadanie 3.5

Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ będzie supermartyngałem. Pokaż, że jeżeli $\mathbb{E}[X_t] = \text{const} < \infty$ dla pewnej stałej const i wszystkich $t \in T$, to X jest martyngałem.

Zadanie 3.6

Niech $X = (X_t)_{t \in T}$ będzie adaptowalnym procesem takim, że $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ oraz dla każdego czasu zatrzymania τ ,

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0].$$

Pokaż, że X jest martyngałem.

Zadanie 3.7

Niech $N = (N_t)_{t \in [0, \infty)}$ będzie procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$. Pokaż, że $M_t = (N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$ jest \mathbb{F}^N -martyngałem.

Zadanie 3.8

Pokaż, że

$$Y_t = tB_t - \int_0^t B_s ds$$

jest martyngałem.

Zadanie 3.9

Zaóymy, że proces $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (pod)martyngaem a $H = (H_t)_{t \in \mathbb{N}}$ jest dodatnim, ograniczonym procesem takim, że $H_n \in \mathcal{F}_{n-1}$. Pokaż, że proces

$$Y_0 = X_0, \quad Y_n = Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1}) = \sum_{k=1}^n H_k(X_k - X_{k-1}) + X_0$$

jest (pod)martyngaem.

Zadanie 3.10

Niech $X = (X_n)_{n \in [N]}$ będzie martyngaem lub nieujemnym podmartyngaem. Niech $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ będzie ściśle rosnącą funkcją ciągłą taką, że $f(0) = 0$. Pokaż, że dla $X^* = \sup_{n \in [N]} |X_n|$ zachodzi

$$\mathbb{E}f(X^*) \leq \mathbb{E} \left[|X_N| \int_0^{X^*} \frac{1}{s} df(s) \right].$$

Zastosuj powyższą nierówność dla $f(s) = (s-1)_+$ i wywnioskuj

$$\mathbb{E}[X^*] \leq \frac{e}{e-1} (1 + \mathbb{E}[|X_N| \log^+ |X_N|]).$$

WSKAZÓWKA: dla $a, b > 0$ zachodzi $a \log b \leq a \log^+ a + b/e$.

Zadanie 3.11

Niech $M = (M_t)_{t \in T}$ będzie martyngaem. Pokaż, że dla $s < t$, $\{M_s = 0\} \subseteq \{M_t = 0\}$ p.w.

Zadanie 3.12

Niech $B = (B_t)_{t \in [0, +\infty)}$ będzie ruchem Browna. Niech dla $a, b > 0$, τ pierwszym momentem wyjścia B z odcinka $(-a, b)$, tj. $\tau = \inf\{s \geq 0 : B_s \notin (-a, b)\}$. Uzasadnij, że $\mathbb{E}[B_\tau] = 0$. Wywnioskuj postać rozkładu zmiennej B_τ .

Zadanie 3.13

Niech $B = (B_t)_{t \in [0, +\infty)}$ będzie ruchem Browna. Niech dla $a, b > 0$, τ będzie czasem wyjścia B z odcinka $(-a, b)$, tj. $\tau = \inf\{s \geq 0 : B_s \notin (-a, b)\}$. Oblicz $\mathbb{E}[\tau]$.

Zadanie 3.14

Niech $B = (B_t)_{t \in [0, +\infty)}$ będzie ruchem Browna. Pokaż, że proces $B_t^3 - 3tB_t$ jest martyngaem. Niech dla $a, b > 0$, τ będzie czasem wyjścia B z odcinka $(-a, b)$, tj. $\tau = \inf\{s \geq 0 : B_s \notin (-a, b)\}$. Oblicz $\text{Cov}(\tau, B_\tau)$.

Zadanie 3.15

Niech $M = (M_t)_{t \in [0, \infty)}$ będzie ciągłym martyngałem takim, że $M_0 = x > 0$, $M_t \geq 0$ oraz $M_t \rightarrow 0$ p.w. przy $t \rightarrow \infty$. Pokaż, że dla $y > x$,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \geq 0} M_t \geq y \right) = \frac{x}{y}.$$

Zadanie 3.16

Znajdź rozkład zmiennej losowej

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau_{-x}} B_t,$$

gdzie $B = (B_t)_{t \in [0, +\infty)}$ jest ruchem Browna a $\tau_{-x} = \inf\{s \geq 0 : B_s = -x\}$ dla $x > 0$.

Zadanie 3.17

Niech $B = (B_t)_{t \in [0, +\infty)}$ będzie ruchem Browna. Wykorzystując odpowiedni martyngał wykładniczy pokaż, że dla $\mu > 0$ zmienna

$$\sup_{t \geq 0} (B_t - \mu t)$$

ma rozkład wykładniczy z parametrem 2μ .

Zadanie 3.18

Niech $B = (B_t)_{t \in [0, +\infty)}$ będzie ruchem Browna a τ czasem zatrzymania względem \mathbb{F}^B takim, że $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. Pokaż, że

$$\mathbb{E}[B_\tau] = 0 \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}[B_\tau^2] = \mathbb{E}[\tau].$$

Zadanie 3.19

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], d\omega)$, gdzie $d\omega$ oznacza miarę Lebesguea. Dla $t \in [0, 1]$, niech \mathcal{F}_t będzie σ -ciałem generowanym przez wszystkie podzbiory $[0, t]$ oraz zbiory miary zero. Znajdź prawostronnie ciągłą wersję martyngału

$$X_t(\omega) = \mathbb{E}[f | \mathcal{F}_t](\omega).$$

Niech $H(f)(t) = \frac{1}{1-t} \int_t^1 f(\omega) d\omega$. Wywnioskuj nierówność Hardy'ego

$$\|H(f)\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p} \quad p > 1.$$

Zadanie 3.20

Pokaż, że martyngał M i czasu zatrzymania τ_n pojawiających się w dowodzie Twierdzenia 3.30 zachodzi

$$\sup_{t \in [a, b]} |M_{t \wedge \tau_n}| \leq n \quad \text{oraz} \quad \text{Wah}_{[a, b]} M^{\tau_n} \leq n.$$

Zadanie 3.21

Uzasadnij wzór (3.7)

Zadanie 3.22

Niech $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ będzie ciągłym procesem o ograniczonym wahanii. Pokaż, że dla każdego normalnego ciągu podziałów $\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ odcinka $[0,1]$ zachodzi

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} |X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}|^2 \xrightarrow{p.w.} 0.$$

Zadanie 3.23

Pokaż, że $\langle B \cdot B \rangle_t = \int_0^t B_s^2 ds$. WSKAZÓWKA:

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{2} (B_{t-s} + x)^2 - \frac{t}{2} \right)^2 \right] = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} (2t - 3s) + \frac{t^2}{2} - ts + \frac{3}{4} s^2.$$

Zadanie 3.24

Udowodnij Twierdzenie 3.36.

Zadanie 3.25

Niech $M = (M_t)_{t \in T}$ będzie ciągłym martyngałem całkownym o niezależnych przyrostach. Pokaż, że $\langle M \rangle_t = \mathbb{E} [M_t^2] - \mathbb{E} [M_0^2]$.

Zadanie 3.26

Niech $(M_t)_{t \in [0, \infty)}$ będzie ciągłym martyngałem całkownym z kwadratem. Pokaż, że dla dowolnego czasu zatrzymania τ zachodzi $\langle M^\tau \rangle = \langle M \rangle^\tau$.

Zadanie 3.27

Niech $(M_t)_{t \in [0, +\infty)}$ będzie ciągłym martyngałem całkownym z kwadratem. Niech dla $s < t$ będzie dany podział odcinka $[s, t]$ punktami $s = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = t$. Pokaż, że

$$\mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^k (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} [M_t^2 - M_s^2 \middle| \mathcal{F}_s] = \mathbb{E} [(M_t - M_s)^2 \middle| \mathcal{F}_s].$$

Zadanie 3.28

Zweryfikuj poprawność wzoru (3.9).

Całka stochastyczna dla ruchu Browna

Streszczenie W tym rozdziale skonstruujemy całkę względem ruchu Browna.

Niech $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie ruchem Browna. Celem tego rozdziału jest zdefiniowanie

$$\int_a^b X_s dB_s, \quad (4.1)$$

gdzie $X = (X_t)_{t \in [a,b]}$ jest elementem możliwie szerokiej klasy procesów stochastycznych. Jak już się przekonaliśmy w **rozdziale 1** zmiennej (4.1) nie można zdefiniować dla każdej trajektorii z osobna, tj. nie można zdefiniować (4.1) jako całki Riemana-Stieltjеса, ponieważ funkcja $t \mapsto B_t(\omega)$ ma nieskończone wahanie z prawdopodobieństwem jeden. Zamiast tego posłużymy się teorią martyngałów poznaną w **rozdziale 3**. Aby zdefiniować całkę stochastyczną dla procesu X , będziemy go aproksymować przez procesy postaci

$$X_t^n = \sum_{k=0}^{k_n-1} X(s_k^n) \mathbb{1}_{[t_k^n, t_{k+1}^n)}(t), \quad (4.2)$$

gdzie $a = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k_n}^n = b$ i $t_k^n \leq s_k^n \leq t_{k+1}^n$. Dla takich procesów całkę stochastyczną definiuje się naturalnie przez

$$\int_a^b X_s^n dB_s = \sum_{k=0}^{k_n-1} X(s_k^n) \Delta B_{t_k}, \quad \Delta B_{t_k} = B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}. \quad (4.3)$$

Jeżeli $\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ jest naturalnym ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$, to $X^n \rightarrow X$ i wtedy

$$\int_a^b X_s^n dB_s \rightarrow \int_a^b X_s dB_s.$$

To w jakim sensie zachodzi powyższa zbieżność doprecyzujemy w dalszej części rozdziału. Jak pokazuje poniższy przykład, wybór punktów s_k^n nie jest tutaj bez znaczenia.

Przykład 4.1

Rozważmy procesy postaci

$$X_t^n = \sum_{k=0}^{n-1} B(t_k) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t)$$

oraz

$$Y_t^n = \sum_{k=0}^{n-1} B(t_{k+1}) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t).$$

Oba procesy są rozsądnymi aproksymacjami ruchu Browna. Jednak zmienne

$$\int_a^b X_s^n dB_s \quad \text{oraz} \quad \int_a^b Y_s^n dB_s$$

są od siebie odległe. Wystarczy zauważyć, że

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b X_s^n dB_s \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} B_{t_k} \Delta B_{t_k} = 0$$

oraz

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b Y_s^n dB_s \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} B_{t_{k+1}} \Delta B_{t_k} = \sum_{k=0}^{n-1} t_{k+1} - t_k = b - a.$$

Powyższy przykład pokazuje, że wybór punktów $\{s_k^n\}$ w (4.2) wpływa na wartość całki $\int_a^b X_s^n dB_s$ jest to jeden ze sposobów, w jaki daje o sobie znać nieskończone wahanie trajektorii ruchu Browna. W praktyce oznacza to, że aby zagwarantować spójność definicji całki, należy ograniczyć się do jednego wspólnego sposobu wyboru punktów $\{s_k^n\}$. Najczęściej spotyka się jeden w dwóch wyborów:

1. $s_k^n = t_k$: lewy koniec przedziału $[t_k, t_{k+1})$, który prowadzi do całki $It\hat{o}$, którą oznaczają będziemy przez

$$\int_a^b X_s dB_s.$$

2. $s_k^n = \frac{1}{2}(t_{k+1} + t_k)$: środek przedziału $[t_k, t_{k+1})$, który prowadzi do całki *Stratonowicza*, którą zazwyczaj oznacza się przez

$$\int_a^b X_s \circ dB_s.$$

Skupimy się na *całce It\hat{o}*. Zanim jednak przejdziemy do konstrukcji, musimy zrozumieć, jakie procesy $X = (X_t)_{t \in [a, b]}$ są całkowne względem ruchu Browna. Przypomnijmy, że

$$\text{Wah}_{[0,t]}(B) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{0=t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n=t} \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta B_{t_k}| = \infty \quad p.w.$$

Jeżeli

$$\int_a^b X_s dB_s \approx \sum_{k=0}^n X(t_k) \Delta B_{t_k}$$

to X musi pochodzić z klasy procesów, która uniemożliwia wybór $X(t_k) = \text{sgn} \Delta B_{t_k}$. W przeciwnym wypadku sumy po prawej wybiją $\text{Wah}_{[0,t]}(B)$. Jednym z wyborów jest X_{t_k} mierzalne względem \mathcal{F}_{t_k} , które jest niezależne od $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$. Innymi słowy proces X powinien być adaptowalny. Z przyczyn technicznych, będziemy zmuszeni założyć odrobinę więcej, mianowicie progresywną mierzalność X . To z kolei pociągnie mierzalność $\int_a^b X_s dB_s$ względem σ -ciała \mathcal{F}_b i zagwarantuje dobre własności probabilistyczne procesu całki stochastycznej.

4.1 Procesy elementarne

Zaznajomieni z planem działania jesteśmy gotowi to systematycznego wprowadzenia całki stochastycznej.

Przypomnijmy, że zakładamy, że rozważana filtracja $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [a,b]}$ spełnia zwyczajne warunki. Zakładamy dodatkowo, że dla każdych $s < t$ z przedziału $[a, b]$, zmienna $B_t - B_s$ jest niezależna od \mathcal{F}_s .

Z **Przykładu 2.44** wynika, że za filtrację \mathbb{F} możemy wybrać naturalną filtrację ruchu Browna uzupełnioną o zbiory miary zero.

Definicja 4.2

Przez $L^2([a, b], B)$ oznaczamy będziemy przestrzeń wszystkich (z dokładnością do nierozróżnialności) procesów progresywnie mierzalnych X , takich, że

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b X_s^2 ds \right] < \infty. \quad (4.4)$$

Procesy z $L^2([a, b], B)$ nazywać będziemy B -całkowalnymi.

Zauważmy, że każdy ciągły proces X spełnia

$$\int_a^b X_s^2 ds < \infty.$$

Przypomnijmy, że na mocy **Faktu 2.57**, każdy ciągły i adaptowalny proces jest progresywnie mierzalny. Zauważmy również, że na mocy Twierdzenia Fubinięgo

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b X_s^2 ds \right] = \int_a^b \mathbb{E} [X_s^2] ds.$$

Zatem do weryfikacji warunku (4.4) wystarcza znajomość funkcji $s \mapsto \mathbb{E} [X_s^2]$. Jak sugeruje oznaczenie, $L^2([a, b], B)$ jest przestrzenią Hilberta. Aby się o tym przekonać oznaczymy przez $\mathcal{P}_{[a, b]}$ progresywne σ -ciało podzbiorów $[a, b] \times \Omega$. Przypomnijmy, że z **Zadania 2.44**, X jest progresywnie mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest mierzalny jako $X: ([a, b] \times \Omega, \mathcal{P}_{[a, b]}) \rightarrow (\mathbb{R}, \text{Bor}(\mathbb{R}))$. Wobec powyższego

$$L^2([a, b], B) = L^2([a, b] \times \Omega, \mathcal{P}_{[a, b]}, dt \otimes \mathbb{P}),$$

gdzie dt oznacza miarę Lebesgue'a. W szczególności $L^2([a, b], B)$ z iloczynem skalarnym

$$\langle X | Y \rangle_{L^2([a, b], B)} = \mathbb{E} \left[\int_a^b X_s Y_s ds \right] = \int_a^b \mathbb{E} [X_s Y_s] ds$$

jest przestrzenią Hilberta, w której norma jest dana przez

$$\|X\|_{L^2([a, b], B)} = \sqrt{\mathbb{E} \left[\int_a^b X_s^2 ds \right]}.$$

Definicja 4.3

Procesem elementarnym nazywamy $X = (X_t)_{t \in [a, b]}$ postaci

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t) \quad (4.5)$$

dla $a = t_0 < t_1 \dots < t_n = b$ i X_k mierzalnych względem \mathcal{F}_{t_k} takich, że $\mathbb{E} X_k^2 < \infty$. Przestrzeń wszystkich procesów elementarnych oznaczamy przez \mathcal{E} .

Procesy postaci (4.5) są prawostronnie ciągłe i adaptowalne. Z **Faktu 2.57** wynika, że każdy taki proces jest progresywnie mierzalny. Dodatkowo dla X postaci (4.5),

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b X_s^2 ds \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [X_k^2] (t_{k+1} - t_k) < \infty.$$

To pokazuje, że $\mathcal{E} \subseteq L^2([a, b], B)$. Jak już wspomnieliśmy wcześniej, dla procesów elementarnych definicja całki względem ruchu Browna jest naturalna.

Definicja 4.4

Niech $X \in \mathcal{E}$ będzie postaci (4.5). Całkę stochastyczną Itô procesu X względem B definiujemy przez

$$\int_a^b X_s dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \Delta B_{t_k}, \quad \Delta B_{t_k} = B_{t_{k+1}} - B_{t_k}.$$

Łatwo przekonać się że powyższa definicja jest poprawna oraz że całka $\int_a^b X_s dB_s$ jest liniowa względem $X \in \mathcal{E}$. Dodatkowo, dla każdego $c \in (a, b)$ i $X \in \mathcal{E}$,

$$\int_a^c X_s dB_s + \int_c^b X_s dB_s = \int_a^b X_s dB_s.$$

Lemat 4.5

Niech $X \in \mathcal{E}$. Wówczas

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_a^b X_s dB_s \middle| \mathcal{F}_a \right] &= 0, \\ \mathbb{E} \left[\left(\int_a^b X_s dB_s \right)^2 \middle| \mathcal{F}_a \right] &= \mathbb{E} \left[\int_a^b X_s^2 ds \middle| \mathcal{F}_a \right]. \end{aligned}$$

W szczególności, całka stochastyczna procesu elementarnego jest scentrowaną zmienną losową taką, że

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_a^b X_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b X_s^2 ds \right].$$

Dowód. Przyjmijmy, że X jest postaci (4.5). Skoro X_k jest całkowne z kwadratem i mierzalne względem \mathcal{F}_{t_k} , to

$$\mathbb{E}[X_k \Delta B_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k}] = X_k \mathbb{E}[\Delta B_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k}] = X_k \mathbb{E}[\Delta B_{t_k}] = 0.$$

Stąd

$$\mathbb{E}[X_k \Delta B_{t_k} | \mathcal{F}_a] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_k \Delta B_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k}] | \mathcal{F}_a] = 0$$

co dowodzi pierwszej postulowanej tożsamości. Aby uzasadnić drugą rozpisujemy kwadrat całki jako

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_a^b X_s dB_s \right)^2 \middle| \mathcal{F}_a \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{i,j=0}^{n-1} X_i \Delta B_{t_i} X_j \Delta B_{t_j} \middle| \mathcal{F}_a \right]. \quad (4.6)$$

Dla dowolnego i , $\mathbb{E}[X_i^2(\Delta B_{t_i})^2] = \mathbb{E}[X_i^2](t_{i+1} - t_i) < \infty$. W szczególności dla każdych i oraz j zmienna $X_i\Delta B_{t_i}X_j\Delta B_{t_j}$ jest całkowalna. Dlatego, dla $i < j$ możemy napisać

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_i\Delta B_{t_i} \cdot X_j\Delta B_{t_j} \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right] &= X_i\Delta B_{t_i} \cdot X_j\mathbb{E}\left[\Delta B_{t_j} \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right] \\ &= X_i\Delta B_{t_i} \cdot X_j\mathbb{E}[\Delta B_{t_j}] = 0.\end{aligned}$$

Co, podobnie jak poprzednio, pociąga

$$\mathbb{E}\left[X_i\Delta B_{t_i} \cdot X_j\Delta B_{t_j} \middle| \mathcal{F}_a\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_i\Delta B_{t_i} \cdot X_j\Delta B_{t_j} \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right] \middle| \mathcal{F}_a\right] = 0.$$

W sumie (4.6) pozostają tylko wyrazy na przekątnej, tj. $i = j$, dla których

$$\mathbb{E}\left[X_i^2(\Delta B_{t_i})^2 \middle| \mathcal{F}_a\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_i^2(\Delta B_{t_i})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] \middle| \mathcal{F}_a\right] = \mathbb{E}\left[X_i^2(t_{i+1} - t_i) \middle| \mathcal{F}_a\right].$$

Podsumowując

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_s dB_s\right)^2 \middle| \mathcal{F}_a\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} X_i^2(t_{i+1} - t_i) \middle| \mathcal{F}_a\right] = \mathbb{E}\left[\int_a^b X_s^2 ds \middle| \mathcal{F}_a\right].$$

□

4.2 Definicja całki stochastycznej

Zdefiniowaliśmy już całkę $\int_a^b X_s dB_s$ dla procesów elementarnych. **Lemat 4.5** mówi, że na \mathcal{E} całka jest izometrią. Rozszerzymy ją do całego $L^2([a, b], B)$. Aby tego dokonać musimy upewnić się, że \mathcal{E} jest gęstą podprzestrzenią. Dla funkcji $f \in L^p[a, b]$, $p > 1$, i podziału $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ danego wzorem $t_{k+1} - t_k = \frac{1}{n}(b - a)$ kładziemy

$$G_n f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t), \quad (4.7)$$

gdzie f_k dla $k \geq 0$ jest średnią f na przedziale $[t_{k-1}, t_k)$

$$f_k = \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{[t_{k-1}, t_k)} f(s) ds$$

i $f_0 = 0$. Z liniowości całki odwzorowanie $f \mapsto G_n f$ również jest liniowe. Nierówność Jensena gwarantuje

$$|f_k|^p = \left| \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(s) ds \right|^p \leq \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(s)|^p ds$$

a co za tym idzie

$$\begin{aligned} \int_a^b |G_n f(s)|^p ds &= \sum_{k=0}^{n-1} |f_k|^p (t_{k+1} - t_k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(s)|^p ds \\ &= \int_a^{t_{n-1}} |f(s)|^p ds \leq \int_a^b |f(s)|^p ds. \end{aligned}$$

W szczególności $G_n f \in L^p[a, b]$. Zauważmy, że skoro $G_{2^n}(G_{2^{n+1}}(f)) = G_{2^n}(f)$, to powyższa nierówność implikuje

$$\int_a^b |G_{2^n} f(s)|^p ds \leq \int_a^b |G_{2^{n+1}} f(s)|^p ds.$$

Lemat 4.6

Jeśli $f \in L^p[a, b]$, to przy $n \rightarrow \infty$,

$$\int_a^b |G_n f(s) - f(s)|^p ds \rightarrow 0.$$

Dowód. Jeżeli f jest funkcją ciągłą, to teza jest bezpośrednią konsekwencją jednostajnej ciągłości f : Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje n takie, że $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dla $|x - y| < \frac{2}{n}(b - a)$ oraz $\int_a^{t_1} f(s)^p ds \leq \varepsilon^p$. Dla $i \geq 1$, jeżeli $s \in [t_i, t_{i+1})$ i $u \in [t_{i-1}, t_i)$, to $|s - u| < \frac{2}{n}(b - a)$ a co za tym idzie $|f(s) - f(u)| < \varepsilon$. Wówczas

$$|G_n f(s) - f(s)| \leq \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(u) - f(s)| du \leq \varepsilon.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \int_a^b |G_n f(s) - f(s)|^p ds &= \int_a^{t_1} |G_n f(s) - f(s)|^p ds + \int_{t_1}^b |G_n f(s) - f(s)|^p ds \\ &\leq \varepsilon^p (1 + b - a). \end{aligned}$$

To dowodzi lematu w przypadku ciągłej funkcji f . Aby uzasadnić zbieżność dla dowolnej $f \in L^p[a, b]$ wystarczy powołać się na gęstość funkcji ciągłych w L^p oraz liniowość G_n : Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla $f \in L^p[a, b]$ wybieramy $\varphi \in C[a, b]$ tak, aby $\|f - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon$. Wówczas

$$\|G_n f - G_n \varphi\|_{L^p} = \|G_n(f - \varphi)\|_{L^p} \leq \|f - \varphi\|_{L^p} < \varepsilon$$

co z kolei wymusza

$$\begin{aligned} \|G_n f - f\|_{L^p} &\leq \|G_n f - G_n \varphi\|_{L^p} + \|G_n \varphi - \varphi\|_{L^p} + \|f - \varphi\|_{L^p} \\ &= 2\varepsilon + \|G_n \varphi - \varphi\|_{L^p}, \end{aligned}$$

gdzie $\|G_n \varphi - \varphi\|_{L^p} \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$. □

Lemat 4.7

$\bar{\mathcal{E}} = L^2([a, b], B)$. Dla każdego $X \in L^2([a, b], B)$ istnieje ciąg procesów elementarnych $(X^n)_n$ taki, że $\int_a^b |X_s^n|^2 ds$ jest rosnący oraz

$$\|X^n - X\|_{L^2([a, b], B)}^2 = \mathbb{E} \left[\int_a^b |X_s^n - X_s|^2 ds \right] \rightarrow 0.$$

Dowód. Jeżeli $X \in L^2([a, b], B)$, to poza zbiorem o prawdopodobieństwie zero funkcja $t \mapsto X_t(\omega)$ jest w $L^2[a, b]$. Niech $X^n = G_{2^n} X$. Wówczas na zbiorze $[t_i, t_{i+1})$, X^n przyjmuje wartość $\frac{1}{b-a} 2^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} X_s ds$, która jest \mathcal{F}_{t_i} mierzalna. Z nierówności Jensena

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} X_s ds \right)^2 \right] &\leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} X_s^2 ds \right] \\ &\leq \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \mathbb{E} \left[\int_b^a X_s^2 ds \right] < \infty. \end{aligned}$$

Zatem dla każdego n proces X^n jest elementarny. Z **Lematu 4.6** otrzymujemy

$$\int_a^b |X_s^n|^2 ds \rightarrow \int_a^b |X_s|^2 ds \quad p.w.$$

Z kolei z konstrukcji

$$\int_a^b |X_s^n|^2 ds \leq \int_a^b |X_s|^2 ds \quad p.w.$$

co pociąga za sobą

$$\int_a^b |X_s^n - X_s|^2 ds \leq 2 \int_a^b |X_s|^2 + |X_s^n|^2 ds \leq 4 \int_a^b |X_s|^2 ds \quad p.w.$$

Ostatnia zmienna losowa jest całkowna, ponieważ $X \in L^2([a, b], B)$. Teza wynika z twierdzenia o zbieżności ograniczonej. \square

Z **Lematu 4.7** oraz **Faktu 4.5** liniowe odwzorowanie $\mathcal{E} \rightarrow L^2(\Omega)$ zadane wzorem

$$X \mapsto \int_a^b X_s dB_s$$

rozszerza się do izometrii z $L^2([a, b], B)$ w $L^2(\Omega)$.

Definicja 4.8

Dla $X \in L^2([a, b], B)$ całkę Itô procesu X względem ruchu Browna definiujemy jako granicę w $L^2(\Omega)$,

$$\int_a^b X_s dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b X_s^n dB_s,$$

gdzie $X^n \in \mathcal{E}$ są takie, że

$$\|X^n - X\|_{L^2([a,b],B)}^2 = \mathbb{E} \left[\int_a^b |X_s^n - X_s|^2 ds \right] \rightarrow 0.$$

Przykład 4.9

Rozważmy $X_s = s$. Wówczas $X \in L^2([a,b],B)$ jako deterministyczna funkcja ciągła. Ustalmy $\epsilon > 0$ i rozważmy ciąg procesów elementarnych zadanych przez

$$X_s^{(n)} = t_k^{(n)}, \quad s \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)})$$

gdzie $\{t_k^{(n)}\}_{k \leq k_n}$ jest normalnym ciągiem podziałów odcinka $[0, t]$. Wówczas

$$\int_a^b X_s^{(n)} dB_s = \sum_{k=0}^{k_n-1} t_k \Delta B_{t_k} = t_n B_{t_n} - t_0 B_{t_0} - \sum_{k=0}^{k_n-1} B_{t_k} \Delta t_k. \quad (4.8)$$

Skoro

$$\|X^n - X\|_{L^2([a,b],B)}^2 = \sum_{k=0}^{k_n-1} (\Delta t_k^{(n)})^2 \leq t \cdot \max_{0 \leq k \leq k_n-1} |\Delta t_k^{(n)}| \rightarrow 0,$$

to $\int_a^b X_s^{(n)} dB_s \rightarrow \int_a^b s dB_s$. Z kolei suma obecna po prawej stronie równania (4.8) zbiega do $\int_a^b B_s ds$. Stąd

$$\int_a^b s dB_s = bB_b - aB_a - \int_a^b B_s ds.$$

Fakt 4.10

Niech $X \in L^2([a,b],B)$. Wówczas

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_a^b X_s dB_s \middle| \mathcal{F}_a \right] &= 0, \\ \mathbb{E} \left[\left(\int_a^b X_s dB_s \right)^2 \middle| \mathcal{F}_a \right] &= \mathbb{E} \left[\int_a^b X_s^2 ds \middle| \mathcal{F}_a \right]. \end{aligned}$$

W szczególności, całka stochastyczna procesu z $L^2([a,b],B)$ jest scentrowaną zmienną losową taką, że

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_a^b X_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b X_s^2 ds \right].$$

Dowód. Z **Lematu 4.7** możemy wybrać $X^n \in \mathcal{E}$ takie, że ciąg $\int_a^b |X_s^n|^2 ds$ jest rosnący i $\|X^n - X\|_{L^2([a,b],B)} \rightarrow 0$. Z **Lematu 4.5** dla dowolnego $A \in \mathcal{F}_a$ zachodzi

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b X_s^n dB_s \mathbb{1}_A \right] = 0.$$

Skoro

$$\int_a^b X_s^n dB_s \rightarrow^{L^2(\Omega)} \int_a^b X_s dB_s,$$

to

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b X_s dB_s \mathbb{1}_A \right] = 0.$$

Podobnie mamy

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_a^b X_s^n dB_s \right)^2 \mathbb{1}_A \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b (X_s^n)^2 ds \mathbb{1}_A \right].$$

Przechodząc $n \rightarrow \infty$ możemy po lewej stronie wejść z granicą pod wartość oczekiwaną dzięki zbieżności w $L^2(\Omega)$. Po prawej stronie wchodzimy z granicą pod wartość oczekiwaną na mocy twierdzenia o zbieżności monotonicznej. \square

Zadanie

Niech $X, Y \in L^2([a, b], B)$. Pokaż, że

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b X_s dB_s \cdot \int_a^b Y_s dB_s \right] = \int_a^b \mathbb{E}[X_s Y_s] ds.$$

Całka stochastyczna $\int_a^b X_s dB_s$ jest liniowa ze względu na X co w połączeniu z ostatnią tożsamością w **Fakcie 4.10** daje następujący wniosek.

Wniosek 4.11

Jeżeli $X^n, X \in L^2([a, b], B)$ są takie, że

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b |X_s^n - X_s|^2 ds \right] \rightarrow 0$$

to

$$\int_a^b X^n(s) dB_s \rightarrow^{L^2(\Omega)} \int_a^b X(s) dB_s.$$

Fakt 4.12

Niech $X = (X_t)_{t \in [a,b]}$ oraz $Y = (Y_t)_{t \in [a,b]}$ będą procesami z $L^2([a, b], B)$. Jeżeli $X = Y$ na zbiorze $A \in \mathcal{F}$, tzn.

$$X(\omega) = Y(\omega), \quad \omega \in A,$$

to to samo zachodzi dla całek stochastycznych. Dokładniej

$$\left(\int_a^b X_s dB_s \right) (\omega) = \left(\int_a^b Y_s dB_s \right) (\omega), \quad \omega \in A.$$

Dowód. Z założenia

$$\mathbb{P} [\forall t \in [a, b] X_t \mathbb{1}_A = Y_t \mathbb{1}_A] = 1.$$

Niech $X^k = G_{2^k} X$ oraz $Y^k = G_{2^k} Y$, gdzie G_n jest zdefiniowany przez (4.7). Dla każdej $\omega \in \Omega$ funkcje $X^n(\omega)$ i $Y^n(\omega)$ są określone jedynie w terminach $X(\omega)$ i $Y(\omega)$. Stąd $X^n = Y^n$ na zbiorze A . Teza wynika z jedyności granicy w $L^2(\Omega)$. \square

4.3 Całka stochastyczna jako ciągły martyngał

Niech $X \in L^2([0, b], B)$. Skupimy się teraz na własnościach procesu $I = (I(t))_{t \in [0, b]}$ danego przez

$$I(t) = \int_0^t X_s dB_s.$$

Jeżeli $X \in \mathcal{E}$ jest postaci (4.5), to

$$I(t) = \sum_{k=1}^{n-1} X_{t_k} (B_{t_{k+1} \wedge t} - B_{t_k \wedge t}).$$

W szczególności, dla $X \in \mathcal{E}$, $I(t)$ jest ciągłym martyngałem. Dla $X \in L^2([0, b], B)$, wybierzmy $X^n \in \mathcal{E}$ takie, że $X^n \rightarrow X$ w $L^2([0, b], B)$. Wówczas $I_n(t) = \int_0^t X_s^n dB_s \rightarrow I(t)$ w $L^2(\Omega)$. Zatem dla pewnego podciągu ostatnia zbieżność zachodzi p.w. W szczególności $I(t) \in \mathcal{F}_t$. Dodatkowo, z addytywności całki ze względu na obszar, dla $0 \leq s < t \leq b$,

$$I(t) - I(s) = \int_s^t X_u dB_u.$$

Twierdzenie 4.13

Niech $X \in L^2([a, b], B)$. Proces $(I(t))_{t \in [0, b]}$ jest martyngałem całkowalnym z kwadratem, który posiada ciągłą modyfikację.

Dowód. Dla $s < t$ na mocy **Faktu 4.10**

$$\mathbb{E} [I(t) - I(s) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E} \left[\int_s^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0,$$

co pokazuje, że $I(t)$ jest martyngałem. Całkowalność z kwadratem wynika z konstrukcji całki stochastycznej. Pozostaje uzasadnić istnienie ciągłej modyfikacji. Wybierzmy $X^n \in \mathcal{E}$ taki, że $X^n \rightarrow X$ w $L^2([a, b], B)$. Wówczas

$$I_n(t) = \int_0^t X_s^n dB_s \rightarrow I(t) \quad \text{w } L^2(\Omega).$$

Jak już zauważyliśmy, dla każdego n , $(I_n(t))_{t \in [0, b]}$ jest ciągłym procesem. Aby zagwarantować ciągłość granicy należy uzasadnić, że istnieje podciąg $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dla którego p.w. zbieżność zachodzi jednostajnie na $[0, b]$. Dokładniej uzasadnimy, że dla odpowiedniego doboru $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, zdarzenie

$$A = \left\{ \lim_{k, j \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, b]} |I_{n_j}(t) - I_{n_k}(t)| = 0 \right\}$$

ma prawdopodobieństwo 1. Wówczas proces $(J_t)_{t \in [0, b]}$ zadany przez

$$J_t(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} I_{n_k}(t)(\omega) \mathbb{1}_A(\omega)$$

jest procesem ciągłym (ponieważ na A , I_{n_k} zbiegają jednostajnie) oraz jest modyfikacją $(I_t)_{t \in [0, b]}$ (ponieważ $I_{n_k}(t) \rightarrow I(t)$ w $L^2(\Omega)$ dla każdego ustalonego t).

Uzasadnijmy, że $\mathbb{P}[A] = 1$. Dla ciągu $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, który dobierzemy za chwilę mamy

$$I_{n_k}(t) = I_{n_1}(t) + \sum_{j=2}^k I_{n_j}(t) - I_{n_{j-1}}(t).$$

Wystarczy wybrać ciąg $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ w taki sposób, aby $\sup_{t \in [0, b]} |I_{n_j}(t) - I_{n_{j-1}}(t)| \rightarrow 0$ p.w. wykładniczo szybko. Dla każdych $m, n \in \mathbb{N}$, proces $I_n - I_m$ jako suma ciągłych martyngałów jest ciągłym martyngałem. Z nierówności maksymalnej Dooba (a dokładniej z **Wniosku 3.13**) dla dowolnego $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, b]} |I_n(t) - I_m(t)|^2 > \varepsilon \right] &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \left[|I_n(b) - I_m(b)|^2 \right] \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t X_s^n - X_s^m dB_s \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \left[\int_0^t |X_s^n - X_s^m|^2 ds \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \|X^n - X^m\|_{L^2([a, b], B)}. \end{aligned}$$

Skoro $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L^2([a, b], B)$, to

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|X^n - X^m\|_{L^2([a, b], B)} = 0.$$

Dla każdego k , liczbę n_k wybieramy na tyle dużą, by dla każdego $m > n_k$ zachodziło

$$\|X^{n_k} - X^m\|_{L^2([a, b], B)} \leq k^{-2} 2^{-2k}.$$

Wówczas

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, b]} |I_m(t) - I_{n_k}(t)|^2 > 2^{-k} \right] \leq 2^{2k} \|X^n - X^m\|_{L^2([a, b], B)} \leq k^{-2}.$$

Wtedy też

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, b]} |I_{n_{k+1}}(t) - I_{n_k}(t)|^2 > 2^{-k} \right] \leq k^{-2},$$

co oznacza, że spełnione jest założenie pierwszego lematu Borela-Cantelliego:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, b]} |I_{n_{k+1}}(t) - I_{n_k}(t)|^2 > 2^{-k} \right] < \infty.$$

Skoro

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, b]} |I_{n_{k+1}}(t) - I_{n_k}(t)|^2 > 2^{-k} \text{ dla nieskończenie wielu } k \right] = 0$$

to

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, b]} |I_{n_{k+1}}(t) - I_{n_k}(t)|^2 \leq 2^{-k} \text{ dla dostatecznie dużych } k \right] = 1$$

co pokazuje postulowaną zbieżność. \square

Definicja 4.14

Niech $X \in L^2([a, b], B)$. Przez $X \cdot B = ((X \cdot B)_t)_{t \in [0, b]}$ oznaczać będziemy ciągłą modyfikację procesu $(I(t))_{t \in [0, b]}$.

Twierdzenie 4.13 mówi, że $X \cdot B$ jest ciągłym martyngałem. Okazuje się, że istnieje dla niego prosta reprezentacja procesu nawiasu skośnego.

Twierdzenie 4.15Dla $X \in L^2([a, b], B)$,

$$\langle X \cdot B \rangle_t = \int_0^t X_s^2 ds.$$

Dowód. Należy sprawdzić, że

$$M_t = ((X \cdot B)_t)^2 - \int_0^t X_u^2 du = \left(\int_0^t X_u dB_u \right)^2 - \int_0^t X_u^2 du$$

jest martyngałem. Skoro

$$M_t = \left(\int_0^s X_u dB_u + \int_s^t X_u dB_u \right)^2 - \int_0^s X_u^2 du - \int_s^t X_u^2 du$$

i całki po przedziale $[0, s]$ są \mathcal{F}_s mierzalne, to

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E} \left[2 \int_0^s X_u dB_u \int_s^t X_u dB_u + \left(\int_s^t X_u dB_u \right)^2 - \int_s^t X_u^2 du \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= 2 \int_0^s X_u dB_u \mathbb{E} \left[\int_s^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] + \mathbb{E} \left[\left(\int_s^t X_u dB_u \right)^2 - \int_s^t X_u^2 du \middle| \mathcal{F}_s \right]. \end{aligned}$$

Z **Faktu 4.10** wynika, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_s^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] &= 0, \\ \mathbb{E} \left[\left(\int_s^t X_u dB_u \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[\int_s^t X_u^2 du \middle| \mathcal{F}_s \right] \end{aligned}$$

co pociąga $\mathbb{E}[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] = 0$. □

Przykład 4.16

Skoro $B_t = \int_0^t 1 dB_s$, to z **Twierdzenia 4.15**, $\langle B \rangle_t = \int_0^t 1^2 ds = t$ co sprowadza się do znanego już nam faktu, że $B_t^2 - t$ jest martyngałem. Z drugiej strony

$$X_t = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t = \int_0^t B_s dB_s,$$

więc $\langle X \rangle_t = \int_0^t B_s^2 ds$ co oznacza, że

$$X_t^2 - \langle X \rangle_t = \frac{1}{4} (B_t^2 - t)^2 - \int_0^t B_s^2 ds$$

jest martyngałem.

Ciągłość trajektorii $X \cdot B$ pozwala nam zastosować aparat wypracowany w **rozdziale 3**. Dla przykładu nierówności maksymalne dają

$$\mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, b]} |(X \cdot B)_t| \geq \lambda \right] \leq \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{E} \left[(X \cdot B)_b^2 \right] = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^b \mathbb{E} \left[X_s^2 \right] ds \quad \lambda > 0$$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, b]} (X \cdot B)_t^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} \left[(X \cdot B)_b^2 \right] = 4 \int_0^b \mathbb{E} \left[X_s^2 \right] ds.$$

Podobne szacowanie możemy wnioskować dla aproksymacji $X \cdot B$.

Wniosek 4.17

Jeżeli $X, X^n \in L^2([a, b], B)$ są takie, że $X^n \rightarrow X$ w $L^2([a, b], B)$, to

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq b} |(X^n \cdot B)_t - (X \cdot B)_t|^2 \right] \leq 4 \|X^n - X\|_{L^2([a, b], B)}^2 \rightarrow 0.$$

Twierdzenie 4.18 (o zatrzymaniu całki stochastycznej)

Niech τ będzie czasem zatrzymania takim, że $\tau \leq b$. Jeżeli $X \in L^2([0, b], B)$, to $(X_t \mathbb{1}_{\{\tau > t\}})_{t \in [0, b]} \in L^2([0, b], B)$ oraz

$$\int_0^\tau X_s dB_s = \int_0^b X_s \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} dB_s. \quad (4.9)$$

Dowód. $(X_t \mathbb{1}_{\{\tau > t\}})_{t \in [0, b]} \in L^2([0, b], B)$ ponieważ proces $(\mathbb{1}_{\{\tau > t\}})_{t \in [0, b]}$ jest prawostronnie ciągły i adaptowalny więc i progresywnie mierzalny. Aby uzasadnić (4.9) załóżmy na początek, że τ przyjmuje skończenie wiele wartości t_1, t_2, \dots, t_n . Wówczas

$$\int_0^\tau X_s dB_s = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau = t_k\}} \int_0^{t_k} X_s dB_s.$$

Zauważmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$, $(X_s)_{s \in [0, t_k]} = (X_s \mathbb{1}_{\{\tau > s\}})_{s \in [0, t_k - \varepsilon]}$ na zbiorze $\{\tau = t_k\}$. Z **Faktu 4.12** otrzymujemy $\int_0^{t_k - \varepsilon} X_s dB_s = \int_0^{t_k - \varepsilon} \mathbb{1}_{\{\tau \geq s\}} X_s dB_s$ na zbiorze $\{\tau = t_k\}$. Z ciągłości całki $\int_0^{t_k} X_s dB_s = \int_0^{t_k} \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} X_s dB_s$. Stąd

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau = t_k\}} \int_0^{t_k} X_s dB_s = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau = t_k\}} \int_0^{t_k} \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} X_s dB_s.$$

Podobnie na zbiorze $\{\tau = t_k\}$, $(X_s \mathbb{1}_{\{\tau > s\}})_{s \in [t_k, b]} = (0)_{s \in [t_k, b]}$, więc $\int_{t_k}^b X_s \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} dB_s = 0$. Wobec tego

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau=t_k\}} \int_0^{t_k} \mathbb{1}_{\{\tau>s\}} X_s dB_s &= \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau=t_k\}} \int_0^b \mathbb{1}_{\{\tau>s\}} X_s dB_s \\ &= \int_0^b \mathbb{1}_{\{\tau>s\}} X_s dB_s. \end{aligned}$$

Niech teraz τ będzie dowolnym czasem zatrzymania. Rozważmy ciąg czasów zatrzymania $\tau_n \searrow \tau$ dany wzorem

$$\tau_n = \sum_{0 \leq k \leq nb} \left(b - \frac{k}{n} \right) \mathbb{1}_{\{b-k/n \leq \tau < b-(k+1)/n\}}.$$

Z ciągłości trajektorii $X \cdot B$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\tau_n} X_s dB_s = \int_0^{\tau} X_s dB_s. \quad (4.10)$$

Dodatkowo

$$\int_0^b \left| X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau_n\}} - X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau\}} \right|^2 ds = \int_0^b X_s^2 \mathbb{1}_{\{\tau \leq s < \tau_n\}} ds.$$

Z twierdzenia o zbieżności ograniczonej zastosowanej do miary Lebesguea na $[0, b]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \left| X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau_n\}} - X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau\}} \right|^2 ds \leq \int_0^b X_s^2 \mathbb{1}_{\{\tau=s\}} ds = 0.$$

Odwołując się po raz kolejny do twierdzenia o zbieżności ograniczonej zastosowanego tym razem do \mathbb{P} ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^b \left| X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau_n\}} - X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau\}} \right|^2 ds \right] = 0$$

co oznacza $X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau_n\}} \rightarrow X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau\}}$ w $L^2([0, b], B)$. Stąd

$$\int_0^b X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau_n\}} dB_s \rightarrow \int_0^b X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau\}} dB_s \quad \text{w } L^2(\Omega).$$

Powyższa zbieżność w połączeniu z (4.10) i pierwszą częścią dowodu kończy rozumowanie. \square

4.4 Całka w $L^2_{loc}(B)$

Okazuje się, że z punktu widzenia zastosowań klasa procesów $L^2([a, b], B)$ jest niewystarczająca. Zajmiemy się teraz rozszerzeniem definicji całki stochastycznej do procesów stochastycznych od których nie będziemy wymagać skończonego drugiego momentu.

Definicja 4.19

Przez $L^2_{loc}([a, b], B)$ oznaczać będziemy przestrzeń procesów progresywnie mierzalnych takich, że

$$\mathbb{P} \left[\int_a^b X_s^2 ds < \infty \right] = 1.$$

Przestrzeń $L^2_{loc}(B)$ definiujemy jako

$$L^2_{loc}(B) = \bigcap_{b>0} L_{loc}([0, b], B).$$

Przy definiowaniu całki stochastycznej $X \cdot B$ dla $X \in L_{loc}(B, [a, b])$ kluczem do sukcesu jest proces redukowania X . Dla $n \geq 1$ rozważmy ciąg czasów zatrzymania

$$\tau_n = b \wedge \inf \left\{ t < a : \int_a^t X_s ds > n \right\}. \quad (4.11)$$

Zauważmy, że skoro $\int_a^b X_s^2 ds < \infty$ p.w. to $\tau_n \rightarrow \infty$ p.w. Dodatkowo ciąg procesów $X_t^n = X_t \mathbb{1}_{\{\tau_n > t\}}$ leży w $L(B, [a, b])$. Istotnie, mamy

$$\int_a^b (X_s^n)^2 ds = \int_a^b X_s^2 \mathbb{1}_{\{s < \tau_n\}} ds = \int_a^{\tau_n} X_s^2 ds \leq n.$$

Zatem dla każdego n mamy dobrze określoną całkę stochastyczną

$$I_n(t) = \int_a^t X_s^n dB_s = \int_a^t X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau_n\}} dB_s.$$

Wobec monotoniczności $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dla $n < m$, $\{\tau_n = b\} \subseteq \{\tau_m = b\}$ oraz $X^n = X^m$ na zbiorze $\{\tau_n = b\}$. **Fakt 4.12** pociąga $I_n(\cdot) = I_m(\cdot)$ na zbiorze $\{\tau_n = b\}$. W skutek czego na zbiorze o prawdopodobieństwie jeden $\Omega_0 = \bigcup_n \{\tau_n = b\}$ dla każdego $t \in [a, b]$ ciąg $I_n(t)$ jest od pewnego miejsca stały.

Definicja 4.20

Dla $X \in L^2_{loc}([a, b], B)$ całkę stochastyczną definiujemy jako proces $X \cdot B = ((X \cdot B)_t)_{t \in [a, b]}$ zadany przez

$$(X \cdot B)_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^t X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau_n\}} dB_s.$$

W przyszłości będziemy korzystali z ciągłości całki stochastycznej na $L^2_{loc}([a, b], B)$. W dowodzie skorzystamy z pomocniczego lematu.

Lemat 4.21

Dla $X \in L^2_{loc}([a, b], B)$ oraz dowolnych $\epsilon, \rho > 0$ zachodzi

$$\mathbb{P} \left[\left| \int_a^b X_s dB_s \right| > \epsilon \right] \leq \mathbb{P} \left[\int_a^b X_s^2 dB_s > \rho \right] + \frac{\rho}{\epsilon^2}.$$

Dowód. Niech $\sigma_\rho = \inf \left\{ t > 0 : \int_a^t X_s^2 ds > \rho \right\}$. Mamy

$$\mathbb{P} \left[\left| \int_a^b X_s dB_s \right| > \epsilon \right] \leq \mathbb{P} \left[\left| \int_a^b X_s dB_s \right| > \epsilon, \sigma_\rho > b \right] + \mathbb{P}[\sigma_\rho \leq b].$$

Zauważmy, że drugi składnik to po prostu

$$\mathbb{P}[\sigma_\rho \leq b] = \mathbb{P} \left[\int_a^b X_s^2 dB_s > \rho \right].$$

Pierwszy składnik, przez zastosowanie **Faktu 4.12** oraz nierówności Czebyszewa możemy oszacować przez

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\left| \int_a^b X_s dB_s \right| > \epsilon, \sigma_\rho > b \right] &= \mathbb{P} \left[\left| \int_a^b X_s \mathbb{1}_{\{\sigma_\rho > s\}} dB_s \right| > \epsilon, \sigma_\rho > b \right] \\ &\leq \epsilon^{-2} \mathbb{E} \left[\left| \int_a^b X_s \mathbb{1}_{\{\sigma_\rho > s\}} dB_s \right|^2 \right] \\ &= \epsilon^{-2} \mathbb{E} \left[\int_a^b X_s^2 \mathbb{1}_{\{\sigma_\rho > s\}} ds \right] \leq \epsilon^{-2} \rho, \end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność jest konsekwencją definicji σ_ρ . □

Fakt 4.22

Dla $X, X_n \in L^2_{loc}([a, b], B)$,

$$\int_a^b |X_s - X_s^n|^2 ds \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

pociąga

$$\int_a^b X_s^n dB_s \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_a^b X_s dB_s$$

Dowód. Z **Lematu 4.21**, dla dowolnych $\epsilon, \rho > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\left| \int_a^b X_s^n dB_s - \int_a^b X_s dB_s \right| > \epsilon \right] &\leq \mathbb{P} \left[\left| \int_a^b X_s^n - X_s dB_s \right| > \epsilon \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[\int_a^b (X_s^n - X_s)^2 dB_s > \rho \right] + \frac{\rho}{\epsilon^2}. \end{aligned}$$

Drugi składnik może być uczyniony dowolnie małym poprzez dobór ρ . Z założenia pierwszy składnik po prawej zbiega do zera dla dowolnej wartości ρ . \square

Fakt 4.23

Dla ciągłego procesu $X \in L_{loc}(B, [a, b])$ i $\{t_j^{(n)}\}_{j=0}^{k_n}$ będącym normalnym ciągiem podziałów odcinka $[a, b]$,

$$\sum_{j=1}^n X(t_j^{(n)}) (B(t_{j+1}^{(n)}) - B(t_j^{(n)})) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_a^b X_s dB_s.$$

Dowód. Niech

$$X^n(t) = \sum_{j=1}^n X(t_j^{(n)}) \mathbb{1}_{[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)})}(t).$$

Skoro X^n jest procesem elementarnym,

$$\sum_{j=1}^n X(t_j^{(n)}) (B(t_{j+1}^{(n)}) - B(t_j^{(n)})) = \int_a^b X^n(s) dB_s.$$

Z drugiej strony, z ciągłości trajektorii X ,

$$\int_a^b (X(s) - X^n(s))^2 ds \rightarrow 0.$$

Teza wynika po zastosowaniu **Faktu 4.22**. \square

Fakt 4.24

Niech $Y_t = Y_0 + (X \cdot B)_t$ dla $X \in L_{loc}(B, [a, b])$ i $\mathbb{E}Y_0 < \infty$. Jeżeli $Y_t \geq 0$, to Y jest supermartyngałem.

Dowód. Z definicji całki stochastycznej

$$Y_t = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{t \wedge \tau_n} = Y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{t \wedge \tau_n} X_s dB_s$$

dla ciągu czasów zatrzymania τ_n zadanego przez (4.11). Z lematu Fatou

$$\mathbb{E}[Y_t] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[Y_0 + \int_a^{t \wedge \tau_n} X_s dB_s \right] = \mathbb{E}Y_0.$$

W szczególności Y_t jest całkowalna. Pokażemy, że dla dowolnego $s > 0$ i $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}[(Y_t - Y_s) \mathbb{1}_A] \leq 0.$$

Skoro Y^{τ_n} jest martyngałem

$$\mathbb{E}[(Y_{t \wedge \tau_n} - Y_s) \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau_n > s\}}] = \mathbb{E}[(Y_{t \wedge \tau_n} - Y_{s \wedge \tau_n}) \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau_n > s\}}] = 0.$$

Skoro

$$Y_{t \wedge \tau_n} - Y_s) \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau_n > s\}} \rightarrow (Y_t - Y_s) \mathbb{1}_A$$

oraz

$$(Y_{t \wedge \tau_n} - Y_s) \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau_n > s\}} \geq -Y_s,$$

gdzie ostatnia zmienna losowa jest całkowna, to z lematu Fatou

$$0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(Y_{t \wedge \tau_n} - Y_s) \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{\tau_n > s\}}] \geq \mathbb{E}[(Y_t - Y_s) \mathbb{1}_A].$$

□

4.5 Zadania

Zadanie 4.1

Pokaż, że $\mathcal{P}_{[a,b]}$ jest σ -ciałem podzbiorów $[a, b] \times \Omega$. Uzasadnij, że $A \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap ([a, t] \times \Omega) \in \mathcal{Bor}[a, t] \otimes \mathcal{F}_t$ dla każdego $t \in [a, b]$.

Zadanie 4.2

Uzasadnij, że jeżeli $X = (X_t)_{t \in [a,b]}$ jest progresywnie mierzalny a $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją borelowską, to proces $\varphi(X) = (\varphi(X_t))_{t \in [a,b]}$ jest progresywnie mierzalny.

Zadanie 4.3

Niech $X, Y \in L^2([a, b], B)$. Pokaż, że

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b X_s dB_s \cdot \int_a^b Y_s dB_s \right] = \int_a^b \mathbb{E}[X_s Y_s] ds.$$

Zadanie 4.4

Oblicz

$$\mathbb{E} \left[\int_0^2 B_s dB_s \cdot \int_0^3 B_s^2 dB_s \right].$$

Zadanie 4.5

Oblicz

$$\mathbb{E} \left[B_s \int_0^t B_u dB_u \right].$$

Zadanie 4.6

Znajdź jawną postać $\int_0^1 \mathbb{1}_{\{B_s=0\}} dB_s$.

Zadanie 4.7

Niech $f \in L^2[a, b]$ Znajdź rozkład zmiennej losowej $\int_a^b f(s) dB_s$.

Zadanie 4.8

Niech $Z = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{B_s \geq 0\}} dB_s$. Oblicz $\mathbb{E}[Z]$ oraz $\text{Var}[Z]$.

Zadanie 4.9

Niech $X \in L^2([a, b], B)$ a A będzie \mathcal{F}_a -mierzalną, ograniczoną zmienną losową. Pokaż, że $(AX_t)_{t \in [a, b]} \in L^2([a, b], B)$ oraz, że

$$\int_a^b AX_s dB_s = A \int_a^b X_s dB_s.$$

Zadanie 4.10

Niech $Y_t = \int_0^t e^s dB_s$ oraz $Z_t = \int_0^t Y_s dB_s$. Oblicz $\mathbb{E}[Z_t]$, $\mathbb{E}[Z_t^2]$ oraz $\mathbb{E}[Z_t Z_s]$.

Zadanie 4.11

Uzasadnij wzór na całkowanie przez części: dla ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o skończonym wahanii

$$\int_a^b f(s) dB_s = f(b)B_b - f(a)B_a - \int_a^b B_s df(s).$$

Zadanie 4.12

Niech $Y_t = t^3 B_t - \int_0^t B_s 3s^2 ds$. Pokaż, że proces $Y = (Y_t)_{t \in [0, \infty)}$ jest ciągłym martyngałem całkowanym z kwadratem. Znajdź $\langle Y \rangle$.

Stochastyczny rachunek całkowy

5.1 Pierwszy wzór Itô

Zanim zobaczymy pierwsze poważne zastosowania całki stochastycznej będziemy musieli nieco dokładniej zrozumieć proces całki stochastycznej względem ruchu Browna. Zbadamy związki z procesami X , które są funkcją ruchu Browna, dokładniej $X_t = f(B_t)$ dla dostatecznie gładkiej funkcji f . Przy względnie niewielkim wysiłku udowodnimy pierwszy wzór Itô. Stanowi on stochastyczny odpowiednik zasadniczego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego.

Lemat 5.1

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Dla $t > 0$ oraz normalnego ciągu podziałów $\{t_k^{(n)}\}_{k=0}^{k_n}$ odcinka $[0, t]$ zachodzi zbieżność

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} f\left(B_{t_k^{(n)}}\right) \left(\Delta B_{t_{k+1}^{(n)}}\right)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t f(B_s) ds. \quad (5.1)$$

Przed przejściem do dowodu zauważmy, że dla $f(x) = 1$ teza **Lematu 5.1** zapisuje się jako

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} \left(\Delta B_{t_{k+1}^{(n)}}\right)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle B \rangle_t = t = \int_0^t f(B_s) ds,$$

gdzie zbieżność według prawdopodobieństwa wynika z **Twierdzenia 3.31**.

Dowód. Załóżmy najpierw, że f jest funkcją ograniczoną. Niech proces F będzie zadany przez

$$F_s^{(n)} = f\left(B_{t_k^{(n)}}\right) \quad s \in \left[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}\right).$$

Wówczas z twierdzenia o zbieżności ograniczonej,

$$\int_0^t F_s^{(n)} ds \xrightarrow{pw} \int_0^t f(B_s) ds. \quad (5.2)$$

Z drugiej strony

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} f\left(B_{t_k^{(n)}}\right) \left(\Delta B_{t_k^{(n)}}\right)^2 - \int_0^t F_s^{(n)} ds = \sum_{k=0}^{k_n-1} f\left(B_{t_k^{(n)}}\right) \left(\left(\Delta B_{t_k^{(n)}}\right)^2 - \Delta t_k^{(n)}\right)$$

jest zbieżne w L^2 do zera. Istotnie, korzystając z tego, że

$$\mathbb{E} \left[\left(\Delta B_{t_k^{(n)}}\right)^2 - \Delta t_k^{(n)} \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right] = 0$$

możemy uprościć

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{k_n-1} f\left(B_{t_k^{(n)}}\right) \left(\left(\Delta B_{t_k^{(n)}}\right)^2 - \Delta t_k^{(n)}\right) \right)^2 \right] = \\ \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{k_n-1} f\left(B_{t_k^{(n)}}\right)^2 \left(\left(\Delta B_{t_k^{(n)}}\right)^2 - \Delta t_k^{(n)}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Skorzystamy teraz z oszacowania $f\left(B_{t_k^{(n)}}\right)^2 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|^2 = C$ oraz tego, że $t_{k+1}^{(n)} \geq t_k^{(n)}$ (wyraz mieszany we wzorze skróconego mnożenia jest ujemny) aby powyższe wyrażenie oszacować z góry przez

$$C \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{k_n-1} \left(\Delta B_{t_k^{(n)}}\right)^4 + \left(\Delta t_k^{(n)}\right)^2 \right] \leq Ct \left(\mathbb{E} B_1^4 + 1\right) \max_{1 \leq k \leq k_n} |t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}| \rightarrow 0.$$

Uzasadniona właśnie zbieżność do 0 w L^1 , a co za tym idzie zbieżność według prawdopodobieństwa w połączeniu z (5.2) dowodzi tezy dla ograniczonej funkcji f .

Niech teraz f będzie dowolną funkcją ciągłą. Dla $K > 0$ niech $\tau_K = \inf\{s > 0 : B_s \notin (-K, K)\}$, $M_K = \sup_{x \in [-K, K]} f(x)$ oraz $f_K(x) = f(x) \wedge M_K$. Na zbiorze $\{\tau_K > t\}$,

$$\int_0^t f(B_s) ds = \int_0^t f_K(B_s) ds$$

oraz

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} f\left(B_{t_k^{(n)}}\right) \left(\Delta B_{t_{k+1}^{(n)}}\right)^2 = \sum_{k=0}^{k_n-1} f_K\left(B_{t_k^{(n)}}\right) \left(\Delta B_{t_{k+1}^{(n)}}\right)^2.$$

Korzystając zatem z oszacowania

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\left| \int_0^t f(B_s) ds - \sum_{k=0}^{k_n-1} f \left(B_{t_k^{(n)}} \right) \left(\Delta B_{t_{k+1}^n} \right)^2 \right| > \delta \right] \leq \\ \mathbb{P} \left[\left| \int_0^t f_K(B_s) ds - \sum_{k=0}^{k_n-1} f_K \left(B_{t_k^{(n)}} \right) \left(\Delta B_{t_{k+1}^n} \right)^2 \right| > \delta \right] \\ + \mathbb{P}[\tau_k \leq t] \end{aligned}$$

możemy powołać się na pierwszą część dowodu aby stwierdzić, że pierwszy składnik będzie zbiegał do zera przy $n \rightarrow \infty$. Druki z kolei możemy uczynić dowolnie małym wybierając duże $K > 0$. \square

Przy pomocy udowodnionego właśnie lematu udowodnimy zapowiadany stochastyczny odpowiednik zasadniczego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego. Przypomnijmy, że w klasycznej wersji, dla funkcji f różniczkowalnej w sposób ciągły na odcinku (a, b) ,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(s) ds.$$

W stochastycznym odpowiedniku tego rezultatu pojawia się dodatkowy składnik.

Twierdzenie 5.2 (Pierwszy wzór Itô)

Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w sposób ciągły. Wówczas z prawdopodobieństwem jeden dla wszystkich $t \in [0, b]$,

$$f(B_t) - f(0) = \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds.$$

Zauważmy, że dla różniczkowalnej w sposób ciągły f , proces $X_t = f'(B_t)$ leży w $L_{loc}^2(B)$, więc całka $\int_0^t f'(B_s) dB_s$ jest dobrze określona.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $\mathbb{E} \left[\int_0^b f'(B_s)^2 ds \right] < \infty$. Skorzystamy z modułu ciągłości f'' zadanego dla $M, \delta > 0$ przez

$$w(\delta, M) = \sup_{x, y \in [-M, M], |x-y| < \delta} |f''(x) - f''(y)|.$$

Ze wzoru Taylora, dla $x, y \in [-M, M]$ i $|x - y| < \delta$,

$$\left| f(y) - f(x) - f'(x)(y - x) - \frac{1}{2} f''(x)(y - x)^2 \right| \leq w(\delta, M)(y - x)^2.$$

Ustalmy $t \in [0, b]$ i normalny ciąg podziałów $\{t_k^{(n)}\}_{k=0}^{k_n}$ odcinka $[0, t]$. Dla $\delta_B = \max_{1 \leq k \leq k_n} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|$ oraz $M_B = \sup_{s \in [0, t]} |B_s|$ mamy

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{k_n-1} f(B_{t_{k+1}^{(n)}}) - f(B_{t_k^{(n)}}) - \sum_{k=0}^{k_n-1} f'(B_{t_k^{(n)}}) (\Delta B_{t_{k+1}^{(n)}}) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=0}^{k_n-1} \frac{1}{2} f''(B_{t_k^{(n)}}) (\Delta B_{t_{k+1}^{(n)}})^2 \right| \\ & \leq w(\delta_B, M_B) \sum_{k=0}^{k_n-1} (\Delta B_{t_{k+1}^{(n)}})^2. \end{aligned}$$

Zauważmy, że pierwsza suma to $f(B_t) - f(B_0)$. Druga i trzecia suma są zbieżne według prawdopodobieństwa do $\int_0^t f'(B_s) dB_s$ i $\frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$ odpowiednio. Ostatnia suma zbiega według prawdopodobieństwa do 0. Dodatkowo z ciągłości trajektorii B , $\delta_B \rightarrow 0$ p.w. przy $n \rightarrow \infty$. To pokazuje słuszność postulowanego wzoru dla ustalonego $t \in [0, b]$. Implikuje to, że proces $f(B_t) - f(B_0)$ jest modyfikacją procesu $\int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$. Skoro oba te procesy są ciągłe, to muszą być one nierozróżnialne.

Niech teraz f będzie dowolna. Dla ustalonego n niech f będzie funkcją różniczkowalną w sposób ciągły taką, że $f_n(s) = f(s)$ dla $|s| \leq n$ oraz $\sup_{s \in \mathbb{R}} |f'_n(s)| < \infty$. Dla $\tau_n = \inf\{s > 0 : |B_s| \geq n\}$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_n \wedge t} f'(B_s) dB_s &= \int_0^{\tau_n \wedge t} f'_n(B_s) dB_s \\ &= f_n(B_{t \wedge \tau_n}) - f_n(B_0) - \int_0^{\tau_n \wedge t} f''_n(B_s) ds \\ &= f(B_{t \wedge \tau_n}) - f(B_0) - \int_0^{\tau_n \wedge t} f''(B_s) ds. \end{aligned}$$

Przechodząc z $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy tezę. □

Przykład 5.3

Niech $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Stosując pierwszy wzór Itô otrzymujemy znaną nam z rozdziału pierwszego reprezentację

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t.$$

5.2 Proces Itô

Całki stochastyczne, jako ciągłe martyngały, są bardzo wygodne w analizie. Wielokrotnie przy analizowaniu procesu X kluczem do sukcesu jest znalezienie reprezentacji X w terminach całek. Zajmiemy się teraz problemem

wyznaczania takiej reprezentacji. Przez $L_{loc}^1(B)$ będziemy oznaczali przestrzeń progresywnie mierzalnych procesów $F = (F_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ dla których

$$\mathbb{P} \left[\int_0^b |F_s| ds < \infty \right] = 1$$

dla każdego $b > 0$. Wówczas proces

$$\int_0^t F_s ds, \quad t \in [0, \infty)$$

jest dobrze określonym, ciągłym procesem adaptowalnym.

Fakt 5.4

Dla $F \in L_{loc}^1(B)$, proces $X_t = \int_0^t F_s ds$ z prawdopodobieństwem jeden ma ograniczone wahania na każdym ograniczonym przedziale.

Dowód. Ustalmy $b > 0$. Istotnie, dla każdego podziału $\{t_k\}_{k=0}^n$ odcinka $[0, b]$ mamy

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta X_{t_k}| &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_0^{t_{k+1}} F_s ds - \int_0^{t_k} F_s ds \right| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} F_s ds \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |F_s| ds \leq \int_0^b |F_s| ds. \end{aligned}$$

Stąd $\text{Wah}_{[0,b]} X < \infty$ p.w. dla każdego $b > 0$. Biorąc przekrój po wszystkich $b \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$1 = \lim_{b \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\text{Wah}_{[0,b]} X < \infty] = \mathbb{P}[\forall b \in \mathbb{N} \text{Wah}_{[0,b]} X < \infty]$$

co stanowi naszą tezę. □

Definicja 5.5

Dla $G \in L_{loc}^2(B)$ i $F \in L_{loc}^1(B)$ proces $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t F_s ds + \int_0^t G_s dB_s, \quad (5.3)$$

gdzie $X_0 \in \mathcal{F}_0$ nazywamy *procesem Itô*. Mówimy wtedy, że X posiada *różniczkę stochastyczną* postaci

$$dX_t = F_t dt + G_t dB_t.$$

Przykład 5.6

Możemy zapisać

$$B_t = 0 + \int_0^t 0 ds + \int_0^t 1 dB_s.$$

Ruch Browna jest zatem procesem Itô z $F \equiv 0$ i $G \equiv 1$.

Przykład 5.7

Skoro $(B \cdot B)_t = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$, to $(B_t^2)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest procesem Itô z reprezentacją

$$B_t^2 = \int_0^t 1 ds + \int_0^t 2B_s dB_s.$$

Dla procesu Itô postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t F_s ds + \int_0^t G_s dB_s,$$

drugi składnik stanowi ciągły martyngał. Pierwszy zaś z **Faktu 5.4** ma ograniczone wahanie. Można pokazać, że implikuje to jednoznaczność reprezentacji procesu Itô (patrz **Zadanie 5.15**). W istocie drugi składnik wzoru (5.3) stanowi część martyngałową procesu X . W tym duchu rozszerzymy definicję nawiasu skośnego.

Definicja 5.8

Niech X będzie procesem Itô postaci (5.3). Przez $\langle X \rangle$ oznaczać będziemy niemalejący proces zadany wzorem

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t G_s^2 ds.$$

Zauważmy, że dla procesu Itô X postaci (5.3), proces $\langle X \rangle$ również jest procesem Itô. Przyjmuje on różniczkę stochastyczną

$$d\langle X \rangle_s = G_s^2 ds.$$

Przykład 5.9

Rozważmy proces $f(B) = (f(B_t))_{t \in \mathbb{R}_+}$, gdzie f jest dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły na \mathbb{R} . Ze wzoru Itô (**Twierdzenie 5.2**) wnioskujemy, że $f(B)$ jest procesem Itô o różniczce stochastycznej

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt.$$

Dodatkowo

$$d\langle f(B) \rangle_t = f'(B_t)^2 dt.$$

Fakt 5.10

Dla procesu Itô $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, dowolnego $t > 0$ oraz normalnego ciągu $\{t_k^n\}_{k=1}^{k_n}$ podziałów odcinka $[0, t]$ zachodzi

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} (X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X \rangle_t.$$

Dowód. Pozostawiamy jako **Zadanie 5.11** □

Dla procesu Itô X , jego różniczka stochastyczna $dX_t = F_t dt + G_t dB_t$ sugeruje, że

$$X_{t+h} - X_t \approx F_t h + G_t (B_{t+h} - B_t).$$

To z kolei sprawia, że w naturalny sposób nasuwa się kandydat na całkę stochastyczną względem procesu X .

Definicja 5.11

Dla procesów Itô X, Y , definiujemy całkę stochastyczną z Y względem X poprzez

$$(Y \cdot X)_t = \int_0^t Y_s dX_s = \int_0^t Y_s F_s ds + \int_0^t Y_s G_s dB_s,$$

dla $t > 0$.

Należy się teraz upewnić, że zdefiniowany przez nas byt $\int_0^t Y_s dX_s$ rzeczywiście jest granicą odpowiednich sum Riemannowskich. Niech Y będzie procesem Itô. Rozważmy Y^n jest ciąg procesów elementarnych postaci

$$Y_t^n = \sum_{k=0}^n Y_{t_k} \mathbb{1}_{[t_k^n, t_{k+1}^n)},$$

gdzie $\{t_k^n\}_{k=0}^{k_n}$ jest normalnym ciągiem podziałów odcinka $[0, b]$. Wówczas $Y_s^n \rightarrow Y_s$. Skoro Y_{t_k} jest \mathcal{F}_{t_k} mierzalna,

$$\begin{aligned} \int_0^b Y_t dX_t &= \int_0^b Y_s F_s ds + \int_0^b Y_s G_s dB_s = \\ &= \sum_{k=0}^n Y_{t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} F_s ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} Y_{t_k} G_s dB_s = \sum_{k=0}^n Y_{t_k} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}). \end{aligned}$$

Z twierdzenia o zbieżności ograniczonej

$$\int_0^b Y_s^n F_s ds \rightarrow \int_0^b Y_s F_s ds.$$

Odwołując się do twierdzenia o zbieżności ograniczonej po raz kolejny

$$\int_0^b |Y_s^n - Y_s|^2 G_s^2 ds \rightarrow 0.$$

Fakt 4.22 pociąga, że

$$\int_0^b Y_s^n G_s dB_s \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^b Y_s G_s dB_s.$$

5.3 Drugi wzór Itô

Kluczowym zjawiskiem dla teorii całki stochastycznej jest to, że gładkie odwzorowania procesów Itô są procesami Itô. Zanim sformułujemy pierwszą regułę rozkażmy następujący przykład.

Przykład 5.12

Niech $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas

$$x_t = \int_0^t f_s ds$$

jest różniczkowalną w sposób ciągły funkcją zmiennej t , taką, że $x'_t = f_t$. Jeżeli $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to

$$\varphi(x_t) - \varphi(x_0) = \int_0^t \frac{d}{ds} (\varphi(x_s)) ds = \int_0^t x'_s \varphi'(x_s) ds = \int_0^t f_s \varphi'(x_s) ds.$$

Zobaczymy teraz jak wygląda stochastyczny odpowiednik powyższej reguły.

Twierdzenie 5.13 (Formuła Itô dla jednej zmiennej)

Niech $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie procesem Itô. Dla dwukrotnie różniczkowalnej $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi

$$d\varphi(X_t) = \varphi'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} \varphi''(X_t) d\langle X \rangle_t.$$

Z **Twierdzenia 5.13** wynika, że dla każdego procesu Itô Y ,

$$\int_a^b Y_s d\varphi(X_s) = \int_a^b Y_s \varphi'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_a^b Y_s \varphi''(X_s) d\langle X \rangle_s.$$

Jeżeli X ma różniczkę stochastyczną postaci

$$dX_t = F_t ds + G_t dB_t.$$

to wzór z powyższego twierdzenia rozpisuje się jawnie jako

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi'(X_s) F_s + \frac{1}{2} \varphi''(X_s) G_s^2 ds + \int_0^t \varphi'(X_s) G_s dB_s.$$

Do dowodu powyższego **Twierdzenia 5.13** będzie nam potrzebny poniższy lemat.

Lemat 5.14

Ustalmy $t > 0$. Załóżmy, że

- (i) miary μ_n na odcinku $[0, t]$ zbiegają słabo do μ_∞ ;
- (ii) $\{g_n\}$ jest ciągiem wspólnie ograniczonych funkcji takich, że dla $s_n \rightarrow s$, $g_n(s_n) \rightarrow g(s)$.

Wówczas

$$\int g_n(s) \mu_n(ds) \rightarrow \int g(s) \mu_\infty(ds).$$

Dowód. Bez zmieszania ogólności możemy założyć, że miary μ_n są probabilistyczne. Istnieją zmienne losowe $X_n \sim \mu_n$ takie, że $X_n \rightarrow X_\infty$ p.w. Z założenia na funkcje $\{g_n\}$, $g_n(X_n) \rightarrow g(X)$. Teza wynika z twierdzenia o zbieżności ograniczonej. \square

Dowód Twierdzenia 5.13. Rozważając czas zatrzymania $\tau_M = \inf\{s > 0 : |X_s| > M \text{ lub } |\langle X \rangle_s > M\}$ możemy bez zmniejszania ogólności założyć, że $|X_t|, |\langle X \rangle_t| \leq M$. Z twierdzenia o wartości średniej dla $a < b$ istnieje $c(a, b) \in (a, b)$ takie, że

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(a) + \frac{1}{2}(b - a)^2 f''(c(a, b)).$$

Rozpisując różnicę w sumę teleskopową i stosując powyższy wzór otrzymujemy

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{k=0}^{k_n-1} f'(X_{t_k})(\Delta X_{t_k}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k_n-1} G_k^n (\Delta X_{t_k})^2,$$

gdzie $G_k^n = f''(c(X_{t_{k+1}}, X_{t_k}))$. Wystarczy pokazać, że

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} G_k^n (\Delta X_{t_k})^2 \rightarrow \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s.$$

Niech

$$A_s^n = \sum_{0 \leq k < k_n, t_{k+1} \leq s} (\Delta X_{t_k})^2.$$

Rozważmy kawałkami stały proces H^n taki, że $H_s^n = G_k^n$ dla $s \in [t_k, t_{k+1})$. Wówczas

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} G_k^n (\Delta X_{t_k})^2 = \int_0^t H_s^n dA_s^n.$$

Zbieżność

$$\int_0^t H_s^n dA_s^n \rightarrow \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s$$

wynika z **Lematu 5.14**. Istotnie, ciągłość f'' implikuje $H_s^n \rightarrow f''(X_{s \wedge t})$ p.w. jednostajnie dla $s \in [0, t]$. Z **Faktu 5.10**, poprzez przejście do podciągu, dla prawie każdej ω ,

$$\mu_n(\omega)[0, s] = A_s^n \rightarrow \mu_\infty(\omega)[0, s] = \langle X \rangle_s.$$

□

5.4 Całkowanie przez części

Zbadamy teraz jak reprezentuje się różniczka stochastyczna $dX_t Y_t$ dla dwóch procesów Itô. Rezultat będzie dany wzorem na całkowanie przez części. Zaczniemy jednak od prostego przykładu.

Przykład 5.15

W sytuacji, gdzie $X = Y = B$, różniczka stochastyczna $dX_t Y_t$ wynika z **Twierdzenia 5.2** zastosowanego do funkcji $f(x) = x^2$,

$$dX_t Y_t = dB_t^2 = dt + 2B_t dB_t.$$

Przykład 5.16

Sprawdzimy bezpośrednim rachunkiem jaka jest różniczka dtB_t . Dla ustalonego $t > 0$ i normalnego ciągu $\{t_k\}_{k=0}^{k_n}$ podziałów odcinka $[0, t]$, na mocy wzoru (3.7) mamy

$$tB_t = \sum_{k=0}^{k_n-1} \Delta(t_k B_t t_k) = \sum_{k=0}^{k_n-1} B_{t_k} \Delta t_k + \sum_{k=0}^{k_n-1} t_k \Delta B_{t_k} + \sum_{k=0}^{k_n-1} \Delta t_k \Delta B_{t_k}.$$

Pierwsze dwa składniki mają granice w postaci całek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_n-1} B_{t_k} \Delta t_k = \int_0^t B_s ds$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_n-1} t_k \Delta B_{t_k} = \int_0^t s dB_s.$$

Moduł trzeciego składnika możemy oszacować z góry przez $t \max_{|\Delta B_{t_k}|}$ które jest zbieżne do zera dzięki ciągłości trajektorii B . Pokazaliśmy właśnie, że

$$dtB_t = B_t dt + t dB_t.$$

W analogii do **Definicji 5.11** rozszerzymy definicję nawiasu skośnego do procesów Itô.

Definicja 5.17

Dla procesów Itô $dX_t = F_t dt + G_t dB_t$ oraz $dY_t = E_t dt + H_t dB_t$ definiujemy proces nawiasów skośnych $\langle X, Y \rangle$ procesów X i Y wzorem

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t G_s H_s ds.$$

W powyższej definicji ważne jest, że oba procesy mają w swoich różniczkach stochastycznych ten sam ruch Browna. Sytuację gdy procesy Itô są niesione przez różne ruchy Browna będziemy badali w **rozdziale 8**.

Twierdzenie 5.18 (Wzór na całkowanie przez części)

Dla procesów Itô X i Y zachodzi

$$dX_t Y_t = Y_t dX_t + X_t dY_t + d\langle X, Y \rangle_t.$$

Dowód. ... □

Wyraz $\int_0^t G_t H_t dt$ pojawiający się na końcu wzoru na całkowanie przez części będzie nas prześladował w wielu tego typu wzorach. Wprowadzimy na niego specjalne oznaczenie.

5.5 Trzeci wzór Itô

Prostota Twierdzenia 5.13 niesie ze sobą jednak pewne ograniczenia. Potrzebna nam będzie jego dwuwymiarowa wersja.

Twierdzenie 5.19 (Formuła Itô dla dwóch zmiennych)

Niech $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ oraz $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będą procesami Itô a $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją zmiennych (x, y) dwukrotnie różniczkowalną. Zachodzi

$$\begin{aligned} d\varphi(X_t, Y_t) &= \frac{\partial}{\partial x} \varphi(X_t, Y_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} \varphi(X_t, Y_t) d\langle X \rangle_t \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(X_t, Y_t) dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y} \varphi(X_t, Y_t) d\langle Y \rangle_t \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi(X_t, Y_t) d\langle X, Y \rangle_t \end{aligned}$$

Dowód. ... □

Twierdzenie 5.13 wynika z **Twierdzenia 5.19**. Szczegółowy dowód przedstawimy w **rozdziale ??**

Przykład 5.20

Powyższe twierdzenie dla $X = B$ i $Y_t = t$ daje

$$\varphi(t, B_t) = \varphi(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, B_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 t}(t, B_t) ds + \int_0^t \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, B_t) dB_s.$$

Co dla $\varphi(t, x) = e^{t/2} \sin(x)$ daje

$$e^{t/2} \sin(B_t) = \int_0^t e^{s/2} \cos(B_s) dB_s.$$

Oznacza to w szczególności, że $(e^{t/2} \sin(B_t))_{t \in [0, \infty)}$ jest martyngałem.

5.6 Zadania

Zadanie 5.1

Pokaż, że $\mathcal{P}_{[a,b]}$ jest σ -ciałem podzbiorów $[a, b] \times \Omega$. Uzasadnij, że $A \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap ([a, t] \times \Omega) \in \mathcal{Bor}[a, t] \otimes \mathcal{F}_t$ dla każdego $t \in [a, b]$.

Zadanie 5.2

Uzasadnij, że jeżeli $X = (X_t)_{t \in [a,b]}$ jest progresywnie mierzalny a $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją borelowską, to proces $\varphi(X) = (\varphi(X_t))_{t \in [a,b]}$ jest progresywnie mierzalny.

Zadanie 5.3

Niech $X, Y \in L^2([a, b], B)$. Pokaż, że

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b X_s dB_s \cdot \int_a^b Y_s dB_s \right] = \int_a^b \mathbb{E}[X_s Y_s] ds.$$

Zadanie 5.4

Oblicz

$$\mathbb{E} \left[\int_0^2 B_s dB_s \cdot \int_0^3 B_s^2 dB_s \right].$$

Zadanie 5.5

Oblicz

$$\mathbb{E} \left[B_s \int_0^t B_u dB_u \right].$$

Zadanie 5.6

Znajdź jawną postać $\int_0^1 \mathbb{1}_{\{B_s=0\}} dB_s$.

Zadanie 5.7

Niech $f \in L^2[a, b]$ Znajdź rozkład zmiennej losowej $\int_a^b f(s) dB_s$.

Zadanie 5.8

Niech $Z = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{B_s \geq 0\}} dB_s$. Oblicz $\mathbb{E}[Z]$ oraz $\text{Var}[Z]$.

Zadanie 5.9

Niech $X \in L^2([a, b], B)$ a A będzie \mathcal{F}_a -mierzalną, ograniczoną zmienną losową. Pokaż, że $(AX_t)_{t \in [a, b]} \in L^2([a, b], B)$ oraz, że

$$\int_a^b AX_s dB_s = A \int_a^b X_s dB_s.$$

Zadanie 5.10

Niech $Y_t = \int_0^t e^s dB_s$ oraz $Z_t = \int_0^t Y_s dB_s$. Oblicz $\mathbb{E}[Z_t]$, $\mathbb{E}[Z_t^2]$ oraz $\mathbb{E}[Z_t Z_s]$.

Zadanie 5.11

Pokaż, że dla procesu Itô $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, dowolnego $t > 0$ oraz normalnego ciągu $\{t_k^n\}_{k=1}^{k_n}$ podziałów odcinka $[0, t]$ zachodzi

$$\sum_{k=0}^{k_n-1} (X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X \rangle_t.$$

Zadanie 5.12

Uzasadnij wzór na całkowanie przez części: dla ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o skończonym wahanii

$$\int_a^b f(s) dB_s = f(b)B_b - f(a)B_a - \int_a^b B_s df(s).$$

Zadanie 5.13

Niech $Y_t = t^3 B_t - \int_0^t B_s 3s^2 ds$. Pokaż, że proces $Y = (Y_t)_{t \in [0, \infty)}$ jest ciągłym martyngałem całkowanym z kwadratem. Znajdź $\langle Y \rangle$.

Zadanie 5.14

Niech $x(t) = \int_0^t f(s) ds$ dla $f \in L^1[0, b]$. Pokaż, że funkcja x ma ograniczone wanie na $[0, b]$.

Zadanie 5.15

Uzasadnij, że reprezentacja procesu Itô jest jednoznaczna: Jeżeli dla $F^1, F^2, G^1, G^2 \in L^2([0, b], B)$ zachodzi

$$\int_0^t F_s^1 ds + \int_0^t G_s^1 dB_s = \int_0^t F_s^2 ds + \int_0^t G_s^2 dB_s$$

to $F^1 = F^2$ oraz $G^1 = G^2$.

Zadanie 5.16

Pokaż, że proces Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t F_s ds + \int_0^t G_s dB_s$$

jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy $F = 0$.

Zadanie 5.17

Pokaż, że

$$X_t = \int_0^t e^{-B_s^2} dB_s$$

jest martyngałem całkownym z kwadratem. Czy jest on jednostajnie całkowny?

Zadanie 5.18

Niech $g \in L^2[0, \infty)$. Pokaż, że

$$Y_t = \exp \left\{ \int_0^t g(s) dB_s - \int_0^t g(s)^2 ds \right\}$$

jest jednostajnie całkownym martyngałem.

Zadanie 5.19

Pokaż, że dla $a, b > 0$ proces $X_t = (b - B_t)(a + B_t) + t$ jest procesem Itô.

Zadanie 5.20

Pokaż, że

$$M_t = (B_t + t)e^{-B_t^2 - t/2}$$

jest procesem Itô. Wywnioskuj, że jest on martyngałem.

Zadanie 5.21

Pokaż, że dla $\theta > 0$,

$$\int_0^t e^{\theta B_s - \theta^2 s/2} dB_s = \frac{1}{\theta} \left(e^{\theta B_t - \theta^2 t/2} - 1 \right).$$

Zadanie 5.22

Niech $B = (B_t)_{t \in [0, +\infty)}$ będzie ruchem Browna a dla $a, b > 0$, τ będzie czasem wyjścia B z odcinka $(-a, b)$, tj. $\tau = \inf\{s \geq 0 : B_s \notin (-a, b)\}$. Znajdź $\mathbb{E}[\int_0^\tau B_t dt]$.

Zadanie 5.23

Niech

$$Y_t = tB_t - \int_0^t B_s ds, \quad Z_t = \exp \left\{ Y_t - \frac{1}{6}t^3 \right\}.$$

Pokaż, że $Z = (Z_t)_{t \in [0, \infty)}$ jest martyngałem.**Zadanie 5.24**

Pokaż, że

$$M_t = e^{\lambda t} B_t - \lambda \int_0^t e^{\lambda s} B_s ds$$

jest martyngałem całkownym z kwadratem. Wyznacz $\langle M \rangle$. Pokaż, że

$$Z_t = \exp \left\{ M_t - \frac{1}{4\lambda} (e^{2\lambda t} - 1) \right\}$$

jest martyngałem.

Zadanie 5.25Niech B będzie jednowymiarowym ruchem Browna. Pokaż, że proces $X_t = e^{B_t}$ spełnia

$$dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + X_t dB_t.$$

Zadanie 5.26Niech B będzie jednowymiarowym ruchem Browna. Proces *Ornsteina-Uhlenbecka* U definiujemy jako rozwiązanie stochastycznego równania różniczkowego

$$\begin{aligned} dU_t &= -\lambda U_t dt + \sigma dB_t \\ U_0 &= x, \end{aligned}$$

gdzie $x, \lambda, \sigma \in \mathbb{R}$. Znajdź jawną postać procesu U . Wyznacz $\mathbb{E}U_t$ oraz $\text{Var}[U_t]$.**Zadanie 5.27**Niech U będzie procesem Ornsteina-Uhlenbecka a $Y_t = U_t^2$. Znajdź stochastyczne równanie różniczkowe, które rozwiązuje Y .**Zadanie 5.28**Niech G będzie dany jest przez stochastyczne równanie różniczkowe

$$\begin{aligned} dG_t &= \mu G_t dt + \sigma G_t \\ G_0 &= 1. \end{aligned}$$

Dla jakiej liczby rzeczywistej α proces $(G_t^\alpha)_{t \in [0, \infty)}$ jest martyngałem? Niech $\tau = \inf\{t : G_t \notin (1/2, 2)\}$. Znajdź $\mathbb{P}[G_\tau = 2]$.

Zadanie 5.29

Niech B będzie dwuwymiarowym ruchem Browna. Dla $\nu \in \mathbb{R}$ rozważmy dwuwymiarowe stochastyczne równanie różniczkowe

$$\begin{aligned}dX_t &= Y_t dB_1(t) \\dY_t &= \nu Y_t dt + Y_t dB_2(t) \\X_0 &= x, Y_0 = y > 0.\end{aligned}$$

Znajdź jawną postać X i Y . Czy X jest martyngałem? Znajdź $\mathbb{E}X_t$ oraz $\text{Var}[X_t]$.

Zadanie 5.30

Niech B będzie n -wymiarowym ruchem Browna. Pokaż, że proces $X_t = AB_t$ również jest n -wymiarowym ruchem Browna dla dowolnej macierzy ortogonalnej A (tj. $AA^* = Id$).

Zadanie 5.31

Niech $B = (B_1, B_2)$ będzie dwuwymiarowym ruchem Browna. Wiemy już, że proces $M_t = B_1(t)B_2(t)$ jest martyngałem. Wyznacz $\langle M \rangle_t$.

Zadanie 5.32

Niech B będzie n -wymiarowym ruchem Browna. Pokaż, że proces $X_t = \|B(t)\|^2$ spełnia

$$dX_t = ndt + B(t)dB(t).$$

Zadanie 5.33

Niech B będzie n -wymiarowym ruchem Browna a τ momentem jego pierwszego wyjścia z kuli o promieniu $r > 0$, tj. $\tau = \inf\{t \geq 0 : \|B(t)\| > r\}$. Znajdź $\mathbb{E}[\tau]$.

Zadanie 5.34

Niech B będzie n -wymiarowym ruchem Browna a $A \in \mathcal{Bor}(\mathbb{R}^n)$ zbiorem o skończonej i dodatniej mierze Lebesgue'a. Oznaczmy przez S_A losowy zbiór chwil, w których B trafia w zbiór A , tj.

$$S_A(\omega) = \{t : B_t(\omega) \in A\}.$$

Wówczas z mierzalności B i twierdzenia Fubiniego miara Lebesgue'a $\lambda(S_A)$ powyższego zbioru jest zmienną losową, która reprezentuje czas jaki ruch Browna spędził w zbiorze A . Pokaż, że

$$\mathbb{E}[\lambda(S_A)] = \begin{cases} \infty & n \leq 2 \\ \frac{1}{2\pi^{n/2}} \Gamma(n/2 - 1) \int_A \|x\|^{2-n} dx & n > 2, \end{cases}$$

gdzie $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

Stochastyczne równania różniczkowe

Wróćmy do **Pytania 1.2** postawionego na samym początku wykładu. Szukamy procesu $G = (G_t)_{t \in [0, \infty)}$ spełniającego dla małych $h > 0$

$$G_{t+h} - G_t \approx \mu G_t \cdot h + \sigma G_t \cdot (B_{t+h} - B_t).$$

Wykorzystując zgromadzony aparat jesteśmy w stanie zinterpretować G jako rozwiązanie stochastycznego równania całkowego

$$G_t = G_0 + \int_0^t \mu G_s ds + \int_0^t \sigma G_s dB_s.$$

Tego typu równania będziemy zapisywali w skróconej formie różniczkowej.

Definicja 6.1

Powiemy, że proces $X = (X_t)_{t \in [0, b]} \in L^2(B, \mathbb{F})$ rozwiązuje *stochastyczne równanie różniczkowe*

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_a &= \eta, \quad \eta \in \mathcal{F}_a, \end{aligned}$$

jeżeli dla wszystkich $t \in [a, \infty)$,

$$X_t = \eta + \int_a^t \mu(s, X_s)ds + \int_a^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Uwaga 6.2

Formuła Itô zapisuje się wygodnie przy pomocy różniczki stochastycznej. Jeżeli X spełnia

$$dX_t = F_t dt + G_t dB_t$$

a przykładowo $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^2 , to

$$d\varphi(t, X_t) = \left(\varphi_t(t, X_t) + \varphi_x(t, X_t)F_t + \frac{1}{2}\varphi_{xx}(t, X_t)G_t^2 \right) dt + \varphi_x(t, X_t)G_t dB_t.$$

Przykład 6.3

Korzystając z powyższej uwagi sprawdzimy, że proces $X_t = \frac{1}{t+1}B_t$ spełnia

$$\begin{aligned} dX_t &= -\frac{1}{t+1}X_t dt + \frac{1}{t+1}dB_t, \\ X_0 &= 0. \end{aligned}$$

Rzeczywiście, dla $\varphi(t, x) = \frac{1}{t+1}x$ mamy

$$\begin{aligned} \varphi_t(t, x) + \frac{1}{2}\varphi_{xx}(t, x) &= -\frac{x}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1}\varphi(t, x) \\ \varphi_x(t, x) &= \frac{1}{t+1}. \end{aligned}$$

Stosując wzór z **Uwagi 6.2** otrzymujemy tezę.

Stochastyczne równanie różniczkowe, które spełnia proces $G = (G_t)_{t \in [0, \infty)}$ zapisuje się jako

$$dG_t = \mu G_t dt + \sigma G_t dB_t. \quad (6.1)$$

Jednym z bardziej naiwnych (acz wyjątkowo skutecznym) sposobem rozwiązywania tego typu równań jest szukanie rozwiązania postaci $G_t = \varphi(t, B_t)$. Mamy

$$d\varphi(t, B_t) = \left(\varphi_t(t, B_t) + \frac{1}{2}\varphi_{xx}(t, B_t) \right) dt + \varphi_x(t, B_t)dB_t.$$

Jeżeli więc φ będzie spełniała deterministyczne równanie różniczkowe cząstkowe

$$\begin{aligned} \mu\varphi(t, x) &= \varphi_t(t, x) + \frac{1}{2}\varphi_{xx}(t, x) \\ \sigma\varphi(t, x) &= \varphi_x(t, x), \end{aligned}$$

to

$$d\varphi(t, B_t) = \mu\varphi(t, B_t)dt + \sigma\varphi(t, B_t)dB_t.$$

Wtedy istotnie $G_t = \varphi(t, B_t)$ spełnia (6.1). Z drugiego równania na φ otrzymujemy, dla pewnej funkcji $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(t, x) = c(t)e^{\sigma x}$$

co po wstawieniu do pierwszego równania daje i uproszczeniu daje

$$\mu c(t) = c'(t) + \frac{\sigma^2}{2}c(t).$$

Oznacza to, że

$$c(t) = \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\}.$$

Podsumowując proces

$$G_t = G_0 \cdot \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right\}$$

spełnia (6.1). Proces G nazywamy *geometrycznym ruchem Browna*. Podobnie jak w przypadku klasycznych równań różniczkowych w naturalny sposób powstaje pytanie o istnienie i jedność rozwiązania.

Twierdzenie 6.4

Założmy, że η jest \mathcal{F}_0 mierzalną zmienną losową całkowalną z kwadratem oraz, że dla pewnych stałych M, L ,

$$\begin{aligned} |\mu(x, t)| &\leq M(1 + |x|) & |\sigma(x, t)| &\leq M(1 + |x|) \\ |\mu(x, t) - \mu(y, t)| &\leq L|x - y| & |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| &\leq L|x - y| \end{aligned}$$

dla $t \in [0, b]$ oraz $x \in \mathbb{R}$. Wówczas istnieje $X \in L^2([0, b], B)$ dla którego

$$X_t = \eta + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s. \quad (6.2)$$

Dodatkowo taki proces jest jedyny. Dokładniej, jeżeli $X' \in L^2([0, b], B)$ również spełnia powyższe równanie, to X i X' są nierozróżnialne.

Przykład 6.5

Dla $\sigma(s, x) = 0$ oraz $\mu(s, x) = x^2$ otrzymujemy równanie Różniczkowe zwyczajne

$$dX_t = X_t^2 dt.$$

Mimo, że założenia **Twierdzenia 6.4** nie są spełnione, to powyższe równanie ma jedyne rozwiązanie postaci

$$X_t = \eta + \frac{1}{1-t}, \quad t \in [0, 1).$$

W szczególności nie ma procesu spełniającego powyższe równanie na przedziale większym niż $[0, 1)$.

Dowód **Twierdzenia 6.4** przebiega bardzo podobnie do dowodu jedności rozwiązań deterministycznych równań różniczkowych. Skorzystamy z klasycznego lematu.

Lemat 6.6 (Lemat Gronwalla)

Założmy, że v i w są nieujemnymi funkcjami określonymi na przedziale $[a, b]$ takimi, że w jest całkowalna a v jest ograniczona i mierzalna. Jeżeli dla pewnej stałej $c > 0$ zachodzi

$$v(t) \leq c + \int_a^t v(s)w(s)ds, \quad t \in [a, b],$$

to

$$v(t) \leq c \exp \left\{ \int_a^t w(s)ds \right\}, \quad t \in [a, b].$$

Dowód. Rozważmy funkcję

$$f(x) = \int_a^x v(s)w(s)ds \cdot e^{-\int_a^x w(s)ds}.$$

Wówczas

$$f'(x) = \left(v(x) - \int_a^x v(s)w(s)ds \right) w(x)e^{-\int_a^x w(s)ds} \leq cw(x)e^{-\int_a^x w(s)ds}.$$

Całkując obustronnie po $x \in [a, t]$ otrzymujemy

$$f(t) = f(t) - f(a) \leq \int_a^t cw(x)e^{-\int_a^x w(s)ds} dx = c - c \exp \left\{ -\int_a^t w(s)ds \right\}$$

Możemy wywnioskować, że

$$v(t) \leq c + \int_a^t v(s)w(s)ds = c + f(t)e^{\int_a^t w(s)ds} \leq c \exp \left\{ \int_a^t w(s)ds \right\}.$$

□

Dowód Twierdzenia 6.4. Założmy dla uproszczenia, że $a = 0$. Rozważmy ciąg procesów X^n zadany rekurencyjnie przez $X_s^0 = \eta$,

$$X_t^{n+1} = \eta + \int_0^t \mu(s, X_s^n)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n)dB_s. \quad (6.3)$$

Pokażemy, że trajektorie X^n zbiegają jednostajnie na $[0, b]$. Granica będzie szukanym rozwiązaniem. Zaczniemy do indukcyjnego pokazania nierówności

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |X_s^n - X_s^{n+1}|^2 \right] \leq \frac{(Rt)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (6.4)$$

dla pewnej stałej R i wszystkich $t \in [0, b]$. Dla $n = 0$, korzystając z $(\alpha + \beta)^2 \leq 2\alpha^2 + 2\beta^2$ możemy napisać

$$\sup_{s \in [0, t]} |\eta - X_s^1|^2 \leq 2 \sup_{s \in [0, t]} \left| \int_0^s \mu(x, \eta) dx \right|^2 + 2 \sup_{s \in [0, t]} \left| \int_0^s \sigma(x, \eta) dB_x \right|^2.$$

Z założonego oszacowania na $\mu(x, \eta)$ pierwszą całkę szacujemy przez

$$2 \sup_{s \in [0, t]} \left| \int_0^s \mu(x, \eta) dx \right|^2 \leq 2 \left(\int_0^t |\mu(s, \eta)| ds \right)^2 \leq 2M^2 t^2 (1 + |\eta|)^2.$$

Stosując nierówność maksymalną Dooba do drugiego składnika a następnie korzystając z założonych oszacowań na funkcję σ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[2 \sup_{s \in [0, b]} \left| \int_0^s \sigma(x, \eta) dB_x \right|^2 \right] &\leq 2 \cdot 4 \mathbb{E} \left[\left| \int_0^t \sigma(x, \eta) dB_x \right|^2 \right] \\ &= 8 \int_0^t \sigma(x, \eta)^2 dx \leq 8tM^2(1 + |\eta|)^2. \end{aligned}$$

Łącząc powyższe szacowania otrzymujemy

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, b]} |\eta - X_s^1|^2 \right] \leq 2M^2 t^2 (1 + |\eta|)^2 + 8tM^2 (1 + |\eta|)^2 \leq \tilde{R}t$$

dla $\tilde{R} = 2M^2 b \mathbb{E} [(1 + |\eta|)^2] + 8tM^2 \mathbb{E} [(1 + |\eta|)^2] \leq R$. To pokazuje słuszność (6.4) dla $n = 0$. Przypuśćmy, że (6.4) zachodzi dla $n - 1$ dla pewnego $n \geq 1$. Wówczas

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [0, t]} |X_s^n - X_s^{n+1}|^2 &\leq 2 \sup_{s \in [0, t]} \left| \int_0^s \mu(x, X_x^{n-1}) - \mu(x, X_x^n) dx \right|^2 \\ &\quad + 2 \sup_{s \in [0, t]} \left| \int_0^s \sigma(x, X_x^{n-1}) - \sigma(x, X_x^n) dB_x \right|^2. \end{aligned}$$

Stosując nierówność Jensa oraz założone oszacowania na μ otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2 \sup_{s \in [0, t]} \left| \int_0^s \mu(x, X_x^{n-1}) - \mu(x, X_x^n) dx \right|^2 &\leq 2t \int_0^t |\mu(x, X_x^{n-1}) - \mu(x, X_x^n)|^2 dx \\ &\leq 2bL^2 \int_0^t |X_x^{n-1} - X_x^n|^2 dx. \end{aligned}$$

Z drugim składnikiem uporamy się przy pomocy nierówności maksymalnej Dooba

$$\begin{aligned} 2 \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} \left| \int_0^s \sigma(x, X_x^{n-1}) - \sigma(x, X_x^n) dB_x \right|^2 \right] \\ \leq 8 \mathbb{E} \left[\int_0^t |\sigma(x, X_x^{n-1}) - \sigma(x, X_x^n)|^2 dx \right] \leq 8L^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t |X_x^{n-1} - X_x^n|^2 dx \right]. \end{aligned}$$

Jeżeli $R \geq \tilde{R} + 2bL^2 + 8L^2$ to ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |X_s^n - X_s^{n+1}|^2 \right] \\ & \leq 2bL^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t |X_x^{n-1} - X_x^n|^2 dx \right] + 8L^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t |X_x^{n-1} - X_x^n|^2 dx \right] \\ & \leq R \mathbb{E} \left[\int_0^t |X_x^{n-1} - X_x^n|^2 dx \right] \leq R \int_0^t \frac{(Rx)^n}{n!} dx = \frac{(Rt)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

co dowodzi (6.4). Nierówność Czebyszewa daje

$$\mathbb{P} \left[\sup_{s \in [0, b]} |X_s^n - X_s^{n+1}| > 2^{-n} \right] \leq 2^{2n} \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, b]} |X_s^n - X_s^{n+1}|^2 \right] \leq 2^{2n} \frac{(Rb)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Skoro prawa strona tworzy wyrazy zbieżnego szeregu, to z lematu Borela-Cantelliego wnioskujemy, że

$$\mathbb{P} \left[\sup_{s \in [0, b]} |X_s^n - X_s^{n+1}| > 2^{-n} \text{ dla nieskończenie wielu } n \right] = 0.$$

Stąd z prawdopodobieństwem jeden, dla dostatecznie dużych n ,

$$\sup_{s \in [0, b]} |X_s^n - X_s^{n+1}| \leq 2^{-n}$$

a co za tym idzie ciąg

$$\eta + \sum_{k=0}^{n-1} X_s^{k+1} - X_s^k = X_s^n$$

jest zbieżny jednostajnie na $[0, b]$ do ciągłego procesu, który oznaczmy przez $X = (X_t)_{t \in [0, b]}$. Z jednostajnej zbieżności mamy

$$\sup_{t \in [0, b]} |\mu(X_t, t) - \mu(X_t^n, t)| \leq L \sup_{t \in [0, b]} |X_t - X_t^n| \rightarrow 0 \quad p.w.$$

co pociąga

$$\int_0^t \mu(s, X_s^n) ds \rightarrow \int_0^t \mu(s, X_s) ds \quad p.w.$$

Podobnie argumentujemy zbieżność składnika z całką stochastyczną. Dokładniej, skoro

$$\sup_{s \in [0, b]} |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n)| \leq L \sup_{s \in [0, b]} |X_s - X_s^n| \rightarrow 0 \quad p.w.$$

co wymusza

$$\mathbb{E} \left[\int_0^b |\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s)|^2 ds \right] \rightarrow 0.$$

Z Wniosku 4.17

$$\int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s \rightarrow \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \quad \text{w } L^2(\Omega).$$

Przechodząc z $n \rightarrow \infty$ w (6.3) wynika, że X jest rozwiązaniem (6.2). Pokażemy teraz jego jednoznaczność. Niech X' spełnia

$$X'_t = \eta + \int_0^t \mu(s, X'_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X'_s) dB_s.$$

Z oszacowania

$$|X_t - X'_t| \leq \left| \int_0^t \mu(s, X_s) - \mu(s, X'_s) ds \right| + \left| \int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s) dB_s \right|$$

oraz nierówności maksymalnej zastosowanej do całki stochastycznej otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |X_s - X'_s|^2 \right] &\leq 2\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} \left| \int_0^s \mu(u, X_u) - \mu(u, X'_u) du \right|^2 \right] \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} \left| \int_0^s \sigma(u, X_u) - \sigma(u, X'_u) dB_u \right|^2 \right] \\ &\leq 2b\mathbb{E} \left[\int_0^t |\mu(u, X_u) - \mu(u, X'_u)|^2 du \right] \\ &\quad + 8\mathbb{E} \left[\int_0^t |\sigma(u, X_u) - \sigma(u, X'_u)|^2 du \right] \\ &\leq L^2(2b + 8)\mathbb{E} \left[\int_0^t |X_u - X'_u|^2 ds \right]. \end{aligned}$$

Oznacza to, że funkcja

$$v(t) = \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |X_t - X'_t|^2 \right]$$

spełnia $v(t) \leq \int_0^t wv(s) ds$, gdzie $w = L^2(2b + 8)$. Z Lematu 6.6 wynika nierozróżnialność X i X' . \square

Następny przykład stanowi wstęp do bardziej usystematyzowanych metod. Czytelnik nie powinien być zniechęcony szarlatańskim charakterem rachunków.

Przykład 6.7

Rozważmy następujące zagadnienie

$$dX_t = X_t dt + dB_t.$$

Stosując naiwną metodę szukania rozwiązania postaci $X_t = \varphi(t, B_t)$ otrzymujemy równania różniczkowe na φ postaci

$$\begin{aligned}\varphi_t(t, x) + \frac{1}{2}\varphi_{xx}(t, x) &= \varphi(t, x) \\ \varphi_x(t, x) &= 1.\end{aligned}$$

Drugie równanie wymusza $\varphi_{xx} = 0$, więc pierwsze daje $\varphi(t, x) = c(x)e^t$. Lecz taka funkcja nigdy nie spełni drugiego równania. Sprzeczność powyższego układu sugeruje, że rozwiązanie X_t nie będzie zwykłą funkcją zmiennych t i B_t . Jak się niebawem przekonamy X_t będzie zależał od całej trajektorii B na odcinku $[0, t]$. Zauważmy, że

$$dX_t - X_t dt = dB_t.$$

Podczas analizowania lewej strony równania naturalnie nasuwa się zastosowanie metody czynnika całkującego, który w tym przypadku wynosi $f_t = e^{-t}$. Stosując wzór na całkowanie przez części

$$d(f_t X_t) + d\langle f, X \rangle_t = e^{-t} dB_t.$$

Skoro f jest deterministyczna, to $\langle f, X \rangle_t = 0$, więc powyższy wzór upraszcza się do $d(f_t X_t) = e^{-t} dB_t$. Po odcałkowaniu na przedziale $[0, t]$ daje

$$X_t = X_0 e^t + \int_0^t e^{t-s} dB_s.$$

6.1 Dyfuzje Itô

Przejdziemy teraz do analizowania klasy stochastycznych równań różniczkowych, w których współczynniki są jednorodne w czasie. Okazuje się, że rozwiązania takich równań posiadają własność braku pamięci, co z kolei sprawia, iż możemy dobrze opisać ich strukturę probabilistyczną.

Definicja 6.8

Dyfuzją Itô nazywamy rozwiązanie stochastycznego równania różniczkowego

$$\begin{aligned}dX_t &= \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \\ X_0 &= \eta,\end{aligned}$$

gdzie $\eta \in \mathcal{F}_0$ i $\mu, \sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są lipschitzowskie, tj. dla pewnej dodatniej stałej L ,

$$\|\mu(x) - \mu(y)\| + \|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leq L\|x - y\| \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dyfuzje Itô są szczególnym przypadkiem procesu dyfuzji, które przedyskutujemy w **rozdziale ??**.

Przykład 6.9

Proces Ornsteina-Uhlenbecka zadany przez równanie

$$dX_t = -X_t dt + dB_t$$

oraz $X_0 = 0$ jest przykładem dyfuzji Itô. Jak pokazaliśmy w **Przykładzie 6.7**, proces X zadaje się jawnie przez

$$X_t = \int_0^t e^{t-s} dB_s$$

Naszym pierwszym celem jest zbadanie struktury probabilistycznej dyfuzji Itô. Zauważmy, że dla X rozwiązującego

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \\ X_0 &= \eta, \end{aligned} \tag{6.5}$$

oraz $s < t$ mamy z definicji i własności całek

$$\begin{aligned} X_t &= \eta + \int_0^t \mu(X_u)du + \int_0^t \sigma(X_u)dB_u \\ &= X_s + \int_s^t \mu(X_u)du + \int_s^t \sigma(X_u)dB_u. \end{aligned}$$

Proces X jest zatem jedynym rozwiązaniem

$$\begin{aligned} dY_t &= \mu(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dB_t \\ Y_s &= X_s. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Możemy to zinterpretować w następujący sposób. Powiedzmy, że interesuje nas wyznaczenie wartości X_t . Jeżeli nie mamy żadnych dodatkowych informacji, to zmuszeni jesteśmy rozwiązać zagadnienie początkowe (6.5) i symulować proces przez czas t . Jeżeli jednak mamy informację o wartości procesu w chwili s , to możemy rozwiązać zagadnienie początkowe (6.6) i symulować proces przez czas $t - s$. Ta obserwacja widoczna jest w sformułowaniu **Twierdzenia 6.13** do którego wkrótce przejdziemy. Potrzebna nam będzie jeszcze jedna definicja.

Definicja 6.10

Dla $x \in \mathbb{R}$ przez X^x będziemy oznaczać dyfuzję Itô rozwiązującą

$$\begin{aligned}dX_t &= \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \\ X_0 &= x.\end{aligned}$$

Przykład 6.11

Zauważmy, że ruch Browna B zadany jest przez zagadnienie

$$\begin{aligned}dX_t &= dB_t \\ X_0 &= 0.\end{aligned}$$

Ruch Browna B^x zapoczątkowany w punkcie $x \in \mathbb{R}$ zadany jest przez

$$\begin{aligned}dX_t &= dB_t \\ X_0 &= x.\end{aligned}$$

W tym przypadku istnieje prosta zależność między B i B^x , która wyraża się wzorem $B_t^x = B_t + x$.

Definicja 6.12

Niech X będzie dyfuzją Itô. Dla funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ z klasy $C_0(\mathbb{R})$ funkcji ciągłych znikających w nieskończoności i $t \geq 0$ definiujemy funkcję $S_t f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$S_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t^x)].$$

W pełnej ogólności trudno jest wyznaczyć jawną postać funkcji $S_t f$. Nie będzie to też naszym celem. Funkcje te posłużą nam do wyznaczenia reprezentacji rozkładów warunkowych procesu X^x .

Twierdzenie 6.13

Dla $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ i $t > s$,

$$\mathbb{E}[f(X_t^x) | \mathcal{F}_s] = S_{t-s} f(X_s^x). \quad (6.7)$$

Zacniemy od kilku technicznych faktów. Pierwszy z nich jest uogólnieniem obserwacji z **Zadania 2.29**.

Fakt 6.14

Niech $\mathcal{G}, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ będą niezależnymi σ -ciałami. Niech X będzie \mathcal{D} -mierzalnym,

n -wymiarowym wektorem losowym. Niech $\psi: \mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie $\mathcal{Bor}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{G}$ mierzalna taka, że $\mathbb{E}[|\psi(X(\cdot), \cdot)|] < \infty$. Wówczas

$$\mathbb{E}[\psi(X(\cdot), \cdot) | \mathcal{G}] = \Psi(X), \quad (6.8)$$

gdzie $\Psi(x) = \mathbb{E}[\psi(x, \cdot)]$.

Dowód. Załóżmy na początek, że $\psi(x, \cdot, \omega) = \mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_G(x)$ dla $B \in \mathcal{Bor}(\mathbb{R}^n)$ i $G \in \mathcal{G}$. Wówczas $\mathbb{1}_G(X)$ jest \mathcal{D} mierzalna przez co jest niezależna od \mathcal{G} . Wobec tego

$$\mathbb{E}[\psi(X(\cdot), \cdot) | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B(X) \mathbb{1}_G(x) | \mathcal{G}] = \mathbb{1}_B(X) \mathbb{E}[\mathbb{1}_G(x) | \mathcal{G}] = \mathbb{1}_B(X) \mathbb{P}[G].$$

Z kolei

$$\Psi(x) = \mathbb{E}[\psi(x, \cdot)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_G] = \mathbb{1}_B(x) \mathbb{P}[G].$$

Pokazuje to, że (6.8) zachodzi dla $\psi(x, \cdot, \omega) = \mathbb{1}_B(x) \mathbb{1}_G(x)$. Rozważmy

$$\mathcal{M} = \{M \in \mathcal{Bor}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{G} \mid \psi(x, \omega) = \mathbb{1}_M(x, \omega) \text{ spełnia (6.8)}\}.$$

Rodzina \mathcal{M} jest λ -układem zawierającym π -układ

$$\mathcal{C} = \left\{ \bigcup_{k=1}^n B_k \times G_k \mid B_k \in \mathcal{Bor}(\mathbb{R}^n), G_k \in \mathcal{G} \right\}.$$

Z lematu o π i λ -układach $\mathcal{Bor}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{M}$. To pokazuje, że $\psi(x, \omega) = \mathbb{1}_M(x, \omega)$ spełnia (6.8) dla wszystkich $M \in \mathcal{Bor}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{G}$. W następnej kolejności pokazujemy słuszność tezy dla funkcji prostych i (stosując monotoniczne przejścia graniczne) funkcji nieujemnych. \square

Na potrzeby dowodu **Twierdzenia 6.13** wprowadzimy pewne tymczasowe oznaczenia. Niech \mathcal{H}_s będzie σ -ciałem generowanym przez zmienne $B_t - B_s$, $t \geq s$ uzupełnionym o zbiory miary zero. Wówczas \mathcal{H}_s jest niezależne of \mathcal{F}_s . Przez $X^{x,s}$ oznaczać będziemy rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \\ X_s &= x. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Fakt 6.15

Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i dowolnego $s \geq 0$ procesy $(X_t^{s,x})_{t \geq s}$ oraz $(X_{t-s}^x)_{t \geq s}$ mają ten sam rozkład. Dodatkowo dla każdych $t > s$, $X_t^{s,x}$ jest \mathcal{H}_s mierzalna.

Dowód. Proces $(X_t^{s,x})_{t \geq s}$ rozwiązuje $X_s^{x,s} = x$ oraz dla $t > s$

$$dX_t^{s,x} = \mu(X_t^{x,s})dt + \sigma(X_t^{x,s})dB_t = \mu(X_t^{x,s})dt + \sigma(X_t^{x,s})d(B_t - B_s).$$

Proces $\hat{B}_t = B_t - B_s, t \geq s$ jest ruchem Browna i jest niezależny od \mathcal{F}_s . Wracając do konstrukcji rozwiązań dla stochastycznych równań różniczkowych, skoro

$$dX_t^{s,x} = \mu(X_t^{x,s})dt + \sigma(X_t^{x,s})d\hat{B}_t,$$

to $(X_t^{s,x})_{t \geq s}$ jest granicą iteracji $\hat{X}_t^0 = x$ i

$$\hat{X}_t^{n+1} = x + \int_s^t \mu(\hat{X}_u^n)du + \int_s^t \sigma(\hat{X}_u^n)d\hat{B}_u.$$

Skoro dla każdego n , proces \hat{X}_t^n jest niezależny od \mathcal{F}_s , to proces graniczny $(X_t^{s,x})_{t \geq s}$ również jest niezależny do \mathcal{F}_s . Podobnie, proces $(X_{t-s}^x)_{t \geq s}$ spełnia

$$dX_{t-s}^x = \mu(X_{t-s}^x)dt + \sigma(X_{t-s}^x)dB_{t-s}.$$

Tak jak poprzednio proces $\tilde{B}_t = B_t - B_s, t \geq s$ jest ruchem Browna a zatem $(X_{t-s}^x)_{t \geq s}$ jest granicą iteracji

$$\tilde{X}_{t-s}^{n+1} = x + \int_0^{t-s} \mu(\tilde{X}_u^n)du + \int_0^{t-s} \sigma(\tilde{X}_u^n)d\tilde{B}_u.$$

Wystarczy indukcyjnie uzasadnić, że dla każdego n proces \tilde{X}_t^n ma ten sam rozkład co proces \hat{X}_t^n , co już pociąga tezę. \square

Dowód Twierdzenia 6.13. Niech $f \in C_0(\mathbb{R})$. Oznaczmy

$$\psi(y, \omega) = f(X_t^{y,s}(\omega)).$$

Skoro $X_t^{y,s}$ jest \mathcal{H}_s mierzalna, to ψ jest $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{H}_s$ mierzalna. Korzystając z **Faktu 6.14** otrzymujemy

$$\mathbb{E}[f(X_t^x) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[f\left(X_t^{X_s^x, s}\right) \middle| \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}[\psi(X_s^x(\cdot), \cdot) | \mathcal{F}_s] = \Psi(X_s^x),$$

gdzie

$$\Psi(x) = \mathbb{E}[\psi(x, \cdot)] = \mathbb{E}[f(X_t^{x,s})] = \mathbb{E}[f(X_{t-s}^x)] = S_{t-s}f(x).$$

\square

Zauważmy, że całkując obustronnie (6.7) otrzymujemy

$$\mathbb{E}[f(X_t^x)] = \mathbb{E}[S_{t-s}f(X_s^x)].$$

Oznacza to, że S_t spełniają warunek półgrupy.

Wniosek 6.16

Dla $f \in C_0(\mathbb{R})$ i $t, s > 0$ mamy

$$S_t(S_s f) = S_{t+s}f$$

Niech $f \in C^2(\mathbb{R})$. Stosując wzór Itô do dyfuzji Itô otrzymujemy

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle X \rangle_t \\ &= \left(\mu(X_t)f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2(X_t)f''(X_t) \right) dt + \sigma(X_t)dB_t. \end{aligned}$$

Wyrażenie obecne w części o ograniczonym wahanii okazuje się być szczególnie istotne z punktu zastosowań.

Definicja 6.17

Generatorem *infinitesimalnym* procesu Itô X nazywamy $A: C_c^2(\mathbb{R}) \rightarrow C_c(\mathbb{R})$ zadany przez

$$Af(x) = \mu(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x).$$

Przykład 6.18

Na początek sprawdzimy, jaki jest generator infinitesimalny ruchu Browna. Skoro B jest rozwiązaniem równania

$$dX_t = dB_t,$$

to $\mu(x) = 0$ i $\sigma(x) = 1$. Stąd

$$Af(x) = \frac{1}{2}f''(x).$$

Przykład 6.19

Dla procesu Ornsteina-Uhlenbecka generator dany jest przez

$$Af(x) = xf'(x) + \frac{1}{2}f''(x).$$

Wzór Itô dla dyfuzji Itô zapisuje się za pomocą generatora infinitesimalnego jako

$$df(X_t) = Af(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t.$$

Oznacza to, że

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Af(X_s)ds = \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$$

Wniosek 6.20

Dla dyfuzji Itô X_t o generatorze A i $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ proces

$$D_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Af(X_s) ds$$

jest martyngałem. D_t jest nazywany niekiedy *Martyngałem Dynkina*.

Twierdzenie o zatrzymaniu martynałów zastosowane do procesu D_t skutkuje wyjątkowo poręcznym worem.

Twierdzenie 6.21 (Wzór Dynkina)

Dla dyfuzji Itô X_t^x o generatorze A , $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ i czasu zatrzymania τ takiego, że $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ zachodzi

$$\mathbb{E}[f(X_\tau^x)] = f(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^\tau Af(X_s^x) ds\right].$$

Dowód. Z Wniosku 6.20 i Twierdzenia 3.26,

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau \wedge t}^x)] = f(x) + \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau \wedge t} Af(X_s^x) ds\right].$$

Przechodząc z $t \rightarrow \infty$ wchodzimy z granicą pod obie całki na mocy twierdzenia o zbieżności ograniczonej. Po lewej wystarczy powołać się na ciągłość f i zwartość jego nośnika. Po prawej stronie korzystamy z tego, że f', f'', μ i σ są ograniczone a zatem

$$\int_0^{\tau \wedge t} Af(X_s^x) ds \leq C\tau$$

dla dostatecznie dużej stałej C . Założenia twierdzenia o zbieżności ograniczonej są spełnione ponieważ zakładamy, że $\mathbb{E}[\tau] < \infty$. \square

Najczęstszym przykładem czasu zatrzymania $\tau = \inf\{s \geq 0 : X_s \notin D\}$ dla otwartego zbioru D . Potrzebne jest nam jednak warunek wymuszający $\mathbb{E}[\tau] < \infty$.

Twierdzenie 6.22

Założmy, że D jest ograniczonym zbiorem otwartym. Niech X będzie dyfuzją Itô taką, że dla pewnych $c, \lambda > 0$ mamy

$$\mu(y) > -c, \quad \sigma(y) > \lambda, \quad y \in D.$$

Niech $x \in D$. Wówczas czas zatrzymania $\tau^x = \inf\{s \geq 0 : X_s^x \notin D\}$ jest całkowny, czyli $\mathbb{E}[\tau^x] < \infty$.

Dowód. Niech $R > 0$ będzie tak duże by $D \subseteq [-R, R]$. Rozważmy funkcję $F(y) = \beta(e^{\alpha R} - e^{\alpha y})$, gdzie $\alpha, \beta > 0$ będą określone później. Z doboru parametrów, $F(y) \geq 0$ dla $y \in D$. Jeżeli przez A oznaczymy generator X , to

$$\begin{aligned} AF(y) &= -\beta e^{\alpha y} \left(\frac{1}{2} \alpha^2 \sigma^2(y) + \alpha \mu(y) \right) \leq -\alpha \beta e^{\alpha y} \left(\frac{1}{2} \alpha \lambda - c \right) \\ &\leq -\alpha \beta e^{\alpha R} \left(\frac{1}{2} \alpha \lambda - c \right). \end{aligned}$$

Wybierając dużą wartość α możemy zagwarantować $\frac{1}{2} \alpha \lambda - c$. Następnie wybierając dostatecznie dużą wartość β zapewniamy $AF(y) \leq -1$. Ze wzoru Dynkina zastosowanego do czasu zatrzymania $\tau^x \wedge t$,

$$0 \leq \mathbb{E}[F(X_{\tau^x \wedge t}^x)] = F(x) + \mathbb{E} \left[\int_0^{\tau^x \wedge t} AF(X_s^x) ds \right] \leq F(x) - \mathbb{E}[\tau^x \wedge t].$$

Z powyższej nierówności, po zastosowaniu twierdzenia o zbieżności monotonicznej wnioskujemy, że $\mathbb{E}[\tau^x] \leq F(x) < \infty$. \square

Twierdzenia 6.21 i 6.22 można zastosować do problemu ruiny dla dyfuzji Itô.

Przykład 6.23

Niech X^0 będzie procesem Ornsteina-Uhlenbecka zapoczątkowanym w $X_0 = 0$. jakie jest prawdopodobieństwo, że X^0 opuści przedział $[a, b]$, dla $a < 0 < b$, przez jego prawy koniec? Niech $\tau_0 = \inf\{s > 0 : X_s^0 \notin [a, b]\}$. Z **Twierdzenia 6.22**, $\mathbb{E}[\tau^0] < \infty$. Zastosujemy **Twierdzenie 6.21** dla odpowiednio dobranej funkcji f . Wyborem, który przybliży nas do znalezienia szukanego prawdopodobieństwa będzie f , która jest A -harmoniczna, czyli spełniająca

$$Af(x) = 0.$$

Istotnie, wówczas

$$\mathbb{E}[f(X_\tau^x)] = f(x).$$

Skoro generator A jest dany jawnie, f powinna spełniać równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$xf'(x) + \frac{1}{2}f''(x) = 0.$$

Powyższe równanie ma rozwiązanie ogólne postaci

$$f(x) = c_1 \int_0^x e^{t^2} dt + c_2.$$

Wybermy c_1 i c_0 tak, aby $f(a) = 0$ i $f(b) = 1$, innymi słowy

$$f(x) = \int_a^x e^{t^2} dt.$$

Skoro $f(a) = 0$, to $\mathbb{E}[f(X_\tau^x)] = f(b)\mathbb{P}[X_\tau^x = b]$ a co za tym idzie

$$\mathbb{P}[X_\tau^x = b] = \frac{\int_a^x e^{t^2} dt}{\int_a^b e^{t^2} dt}.$$

6.2 Zadania

Zastosowania

Zmierzamy teraz w kierunku sformułowania i udowodnienia Twierdzenia Girsanova. Opisuje ono zjawisko jak przez zamianę miary z jednego procesu stochastycznego otrzymać drugi. Rozważmy następujący wprowadzający przykład.

Przykład 7.1

Niech Z_1, Z_2, \dots, Z_n określone na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będą niezależnymi zmiennymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$. Rozważmy nową miarę na Ω zadaną przez

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \mu_k Z_k(\omega) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \mu_k^2 \right\}. \quad (7.1)$$

Wówczas \mathbb{Q} jest miarą probabilistyczną. Istotnie, wynika to z niezależności zmiennych Z_k względem miary \mathbb{P} połączonej ze wzorem $\mathbb{E} [e^{\mu_k Z_k}] = e^{\mu_k^2/2}$. Sprawdźmy teraz jaki rozkład mają zmienne Z_k względem prawdopodobieństwa \mathbb{Q} . Niech $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ oznacza wartość oczekiwaną liczoną względem miary \mathbb{Q} . Bezpośrednim rachunkiem znajdujemy wzór na funkcję tworzącą momenty

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ \sum_{k=1}^n \beta_k Z_k \right\} \right] = \prod_{k=1}^n \exp \left\{ \mu_k \beta_k + \frac{1}{2} \beta_k^2 \right\}.$$

Oznacza to, że względem miary \mathbb{Q} zmienne Z_k są niezależne o rozkładach $\mathcal{N}(\mu_k, 1)$.

Naszym celem będzie uogólnienie powyższego zjawiska na przypadek ciągły. Zaczniemy od badania procesów o strukturze podobnej do wyrażenia po lewej stronie (7.1).

7.1 Martyngały wykładnicze

Dla $X \in L^2_{loc}(B)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$ rozważmy procesy

$$Z_t = \lambda(X \cdot B)_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle X \cdot B \rangle_t.$$

oraz $Y_t = e^{Z_t}$. Różniczka stochastyczna $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ zapisuje się jako

$$\begin{aligned} dY_t &= e^{Z_t} dZ_t + \frac{1}{2} e^{Z_t} d\langle Z \rangle_t \\ &= e^{Z_t} \left(\lambda X_t dB_t - \frac{\lambda^2}{2} X_t^2 dt \right) + \frac{1}{2} e^{Z_t} \lambda^2 X_t^2 dt = \lambda X_t Y_t dB_t. \end{aligned}$$

Proces Y jest zazwyczaj nazywany eksponentą stochastyczną procesu X . Zauważmy, że z **Faktu 4.24** Y jest supermartyngałem. Sprawdźmy teraz kiedy Y jest martyngałem.

Twierdzenie 7.2

Niech $X \in L^2_{loc}(B, [0, b])$, $M = X \cdot B$ oraz

$$Z_t = e^{M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t}.$$

Rozważmy następujące warunki:

- a) $\mathbb{E} \left[e^{-\langle M \rangle_b / 2} \right] < \infty$.
- b) M jest martyngałem ograniczonym w L^2 oraz $\mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2} M_b} \right] < \infty$.
- c) Z jest jednostajnie całkownym martyngałem.

Wówczas a) \Rightarrow b) \Rightarrow c).

Dowód. Zaczniemy od uzasadnienia a) \Rightarrow b). Skoro $\langle M \rangle_b$ jest nieujemna, warunek a) pociąga

$$\mathbb{E} [\langle M \rangle_b] = \mathbb{E} \left[\int_0^b X_s^2 ds \right] < \infty.$$

Oznacza to, że $X \in L^2(B, \mathbb{F}, [0, b])$ i dodatkowo X jest ograniczony w L^2 . Zauważmy, że

$$e^{M_b/2} = \sqrt{Z_b} e^{\langle M \rangle_b/4}$$

a więc z nierówności Schwarzera

$$\mathbb{E} \left[e^{M_b/2} \right] \leq \sqrt{\mathbb{E}[Z_b]} \sqrt{\mathbb{E} \left[e^{\langle M \rangle_b/2} \right]}.$$

Pozostaje uzasadnić, że $\mathbb{E}[Z_b] < \infty$. Mamy

$$Z_b = Z_0 + \int_0^b \lambda X_t Z_t dB_t.$$

Skoro $\tilde{X} = \lambda XZ \in L_{loc}(B, \mathbb{F}, [0, b])$, to z konstrukcji całki stochastycznej

$$Z_b = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_0 + \int_0^b \tilde{X}_t \mathbb{1}_{\{\tau_n > t\}} dB_t, \quad \tau_n = b \wedge \inf \left\{ s > 0 : \int_0^s X_s^2 ds > n \right\}$$

Z lematu Fatou $\mathbb{E}Z_b \leq \mathbb{E}Z_0 = 1$.

b) \Rightarrow c) Stosując twierdzenie Dooba o zatrzymaniu połączone z warunkową wersją nierówności Jensena, dla dowolnego czasu zatrzymania τ ,

$$e^{M_\tau/2} \leq \mathbb{E} \left[e^{M_b/s} \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \quad (7.2)$$

Zauważmy, że rodzina

$$\left\{ \mathbb{E} \left[e^{M_b/s} \middle| \mathcal{F}_\tau \right] : \tau \leq b \text{ jest czasem zatrzymania} \right\}$$

jest jednostajnie całkowna (jak w **Przykładzie 3.23**). Z nierówności (7.2) wynika, że jednostajnie całkowna jest również

$$\left\{ e^{M_\tau/2} : \tau \leq b \text{ jest czasem zatrzymania} \right\}.$$

Rozważmy, teraz $Y_t = \exp\{M_t a / (a + 1)\}$ dla $a \in (0, 1)$. Mamy

$$e^{aM_t - \frac{1}{2}a^2 \langle M \rangle_t} = \left(e^{M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t} \right)^{a^2} Y_t^{1-a^2}.$$

Dla zdarzenie $A \in \mathcal{F}_b$ i czasu zatrzymania $\tau \leq b$ na mocy nierówności Höldera mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_A e^{aM_\tau - \frac{1}{2}a^2 \langle M \rangle_\tau} \right] &\leq \mathbb{E} \left[e^{M_\tau - \frac{1}{2} \langle M \rangle_\tau} \right]^{a^2} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_A Y_\tau \right]^{1-a^2} \\ \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_A Y_\tau \right]^{1-a^2} &\leq \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_A Y_\tau \right] \end{aligned}$$

Przejście $a \rightarrow 1$ kończy dowód. □

Wniosek 7.3

Przy notacji **Twierdzenia 7.2**, jeżeli dla pewnego $\mu > 0$,

$$\sup_{t \in [0, b]} \mathbb{E} \left[e^{\mu X_t^2} \right] < \infty,$$

to Z jest martyngałem.

Dowód. Korzystając z nierówności Jensena możemy napisać dla $t_1 < t_2$,

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} X_s^2 ds \right\} &= \exp \left\{ \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} (t_2 - t_1) X_s^2 ds \right\} \\ &\leq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \exp \left\{ \frac{1}{2} (t_2 - t_1) X_s^2 \right\} ds. \end{aligned}$$

Biorąc wartości oczekiwane skrajnych wyrażen otrzymujemy, dla $t_2 - t_1 < 2\mu$,

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} X_s^2 ds \right\} \right] \leq \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} (t_2 - t_1) X_s^2 \right\} \right] ds < \infty.$$

Wybermy teraz $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ tak aby $t_{j+1} - t_j < 2\mu$. Rozważmy procesy $X_j(s) = X_s \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(s)$. Każdy z nich spełnia warunek a)

Twierdzenia 7.2,

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^b X_j(s)^2 ds \right\} \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} X_s^2 ds \right\} \right] < \infty.$$

Stąd każdy z procesów

$$Z_j(t) = \exp \left\{ \int_0^b X_j(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^b X_j(s) ds \right\}$$

jest martyngałem. Mamy $Z_b = \prod_{j=1}^{n-1} Z_j(b)$. Zauważmy, że $Z_j(t_j) = 1$ co z kolei pociąga $\mathbb{E} [Z_j(b) | \mathcal{F}_{t_j}] = Z_{t_j}(t_j) = 1$. Rozumując indukcyjnie pokazujemy, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Z_b] &= \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^{n-1} Z_j(b) \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^{n-2} Z_j(b) \mathbb{E} [Z_{t_{n-1}}(b) | \mathcal{F}_{t_{n-1}}] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^{n-2} Z_{t_j}(b) \right] = \dots = 1. \end{aligned}$$

Teza wynika z **Zadania ??**. □

Przykład 7.4

Sprawdzimy, że proces $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ zadany przez

$$Z_t = \exp \left\{ \theta \int_0^t B_s dB_s - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds \right\}$$

jest martyngałem. Zastosowanie **Wniosku 7.3** wymaga sprawdzenia, że dla każdego $b > 0$ istnieje $\mu > 0$ takie, że

$$\sup_{t \in [0, b]} \mathbb{E} \left[\exp \left\{ \mu \theta B_t^2 \right\} \right] < \infty.$$

Z własności rozkładu normalnego wiemy, że prawdziwy jest wzór

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \alpha B_s \right\} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha s}}.$$

Wystarczy zatem wybrać $2\mu\theta^2 b < 1$.

7.2 Zamiana czasu

Zanim przejdziemy do Twierdzenia Girsanowa pokażemy jak martyngały wykładnicze mogą być wykorzystane o dowodu twierdzenia o zamianie czasu dla całki stochastycznej.

Twierdzenie 7.5

Niech $X \in L_{loc}^2(B)$ będzie procesem takim, że

$$\int_0^\infty X_s^2 ds = \infty \quad p.w.$$

Wówczas dla

$$\tau(t) = \inf \left\{ u > 0 : \int_0^u X_s^2 dB_s > t \right\}$$

proces $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ zadany przez

$$W_t = \int_0^{\tau(t)} X_s dB_s$$

jest ruchem Browna.

Dowód. Sprawdźmy najpierw, że procesy W i B są równoważne (**Definicja 2.11**).

Ustalmy $m \in \mathbb{N}$. Dla dowolnych $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$ mamy

$$W_{t_j} = \int_0^{\tau(t_j)} X_s dB_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\tau(t_j) \wedge t} X_s dB_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau(t_j)\}} dB_s.$$

Sprawdźmy rozkład wektora losowego $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_m})$ znajdziemy funkcję charakterystyczną

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \sum_{j=1}^m i\theta_j W_{t_j} \right\} \right].$$

Niech $X_j(s) = X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau(t_j)\}}$. Rozważmy proces

$$M = \sum_{j=1}^m i\theta_j X_j \cdot B$$

oraz proces $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ zadany przez

$$Y_t = \exp \left\{ M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t \right\}.$$

Wówczas Y jest rozwiązaniem

$$Y_t = 1 + \int_0^t M_s Y_s dB_s.$$

Zauważmy, że $\langle M \rangle_t = -\sum_{k,j=1}^n \theta_k \theta_j \int_0^t X_k(s) X_j(s) ds$ przy czym

$$\int_0^t X_k(s) X_j(s) ds = \int_0^{t \wedge \tau(t_k) \wedge \tau(t_j)} X_s^2 ds \leq t_k \wedge t_j.$$

Stąd

$$|Y_t| \leq \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^n \theta_k \theta_j (t_k \wedge t_j) \right\}$$

i w szczególności Y jest martyngałem. Korzystając z $\mathbb{E}[Y_t] = 1$ i przechodząc z $t \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ \sum_{j=1}^m i\theta_j W_{t_j} \right\} \right] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^m \theta_j \theta_k (t_j \wedge t_k) \right\},$$

więc W istotnie jest równoważny ruchowi Browna. Pozostaje pokazać, że trajektorie W są ciągłe. Pozostawiamy to jako **Zadanie** \square

7.3 Twierdzenie Grisanova

Jednym z typowych narzędzi w teorii prawdopodobieństwa jest zamiana miary. Poprzez odpowiednią modyfikację miary probabilistycznej \mathbb{P} możemy zmienić własności rozkładów rozważanych procesów, by były one łatwiejsze w analizie. Do tego celu używa się zazwyczaj martyngałów.

Przykład 7.6

Dla $\lambda \in \mathbb{R}$ i $b > 0$ rozważmy martyngał wykładniczy

$$M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t}, \quad t \in [0, b].$$

Definiujemy nową miarę probabilistyczną $\hat{\mathbb{P}}$ jako absolutnie ciągłą względem \mathbb{P} z gęstością

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = M_b.$$

$\hat{\mathbb{P}}$ istotnie jest probabilistyczna, ponieważ $\mathbb{E}[M_b] = 1$. Sprawdźmy teraz jaki jest rozkład zmiennej losowej B_t , $t \in [0, b]$ względem prawdopodobieństwa $\hat{\mathbb{P}}$. Niech $\hat{\mathbb{E}}$ będzie wartością oczekiwaną odpowiadającą mierze $\hat{\mathbb{P}}$. Wystarczy sprawdzić wartość

$$\hat{\mathbb{E}} \left[e^{i\theta B_t} \right] = \mathbb{E} \left[e^{i\theta B_t} M_b \right]$$

dla $\theta \in \mathbb{R}$. Korzystając w własności ruchu Browna możemy napisać

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{i\theta B_t} M_b \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[e^{i\theta B_t} M_b \mid \mathcal{F}_t \right] \right] = \mathbb{E} \left[e^{i\theta B_t} M_t \right] \\ &= e^{-i\theta \frac{\lambda^2}{2} t} \mathbb{E} \left[e^{(i\theta + \lambda) B_t} \right] = e^{-\frac{1}{2} \theta^2 t + i\lambda \theta t}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 7.7 (Girsanov)

Dla $X \in L(B, \mathbb{F})$ rozważmy proces

$$Y_t = e^{\int_0^t X_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t X_s^2 ds}.$$

Rozważmy miarę probabilistyczną na (Ω, \mathcal{F}_T) , gdzie $0 < T < \infty$.

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = Y_T.$$

Wówczas proces

$$\hat{B}_t = B_t - \int_0^t X_s ds$$

jest ruchem Browna na przedziale $[0, T]$ określonym na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}_T, \hat{\mathbb{P}})$.

Dowód. Pokażemy, że proces

$$Y_t^\lambda = \exp \left\{ i\lambda \hat{B}_t + \frac{1}{2} \lambda^2 t \right\}$$

jest martyngałem. □

Przykład 7.8

Rozważmy

$$\tau_a = \inf\{s > 0 : B_s + \mu t > a\}$$

7.4 Zadania

Całka stochastyczna dla wielowymiarowego ruchu Browna

Z punktu widzenia zastosowań jednowymiarowa całka stochastyczna jest niewystarczająca. Zdefiniujemy wielowymiarowy ruch Browna a następnie przekonamy się, że całka stochastyczna bardzo łatwo przenosi się do wielu wymiarów.

Definicja 8.1

n-wymiarowym ruchem Browna nazywamy proces stochastyczny $B = (B(t))_{t \in [0, +\infty)}$ taki, że

- (B1) $B(0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ p.w;
- (B2) B ma niezależne przyrosty: dla dowolnych $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, +\infty)$, $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, wektory losowe $B(t_n) - B(t_{n-1}), \dots, B(t_1) - B(t_0)$ są niezależne;
- (B3) dla każdych $t > s$, wektor $B_t - B_s$ ma rozkład $\mathcal{N}(\mathbf{0}, (t-s)I)$;
- (B4) funkcja $t \mapsto B(\omega, t)$ jest ciągła dla wszystkich $\omega \in \Omega$.

Dla *n*-wymiarowego ruchu Browna B przez $B_j(t)$ oznaczać będziemy *j*-tą współrzędną wektora $B(t)$. Wówczas $B_1, B_2 \dots B_n$ są niezależnymi ruchami Browna. Zauważmy, że dla każdych *i* oraz *j* przestrzenie procesów całkowalnych względem B_i oraz B_j są takie same, tj. $L^2([a, b], B_i) = L^2([a, b], B_j)$. Zakładać będziemy, że B jest $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$ adaptowalny oraz, że wektor $B_t - B_s$ jest niezależny od \mathcal{F}_s .

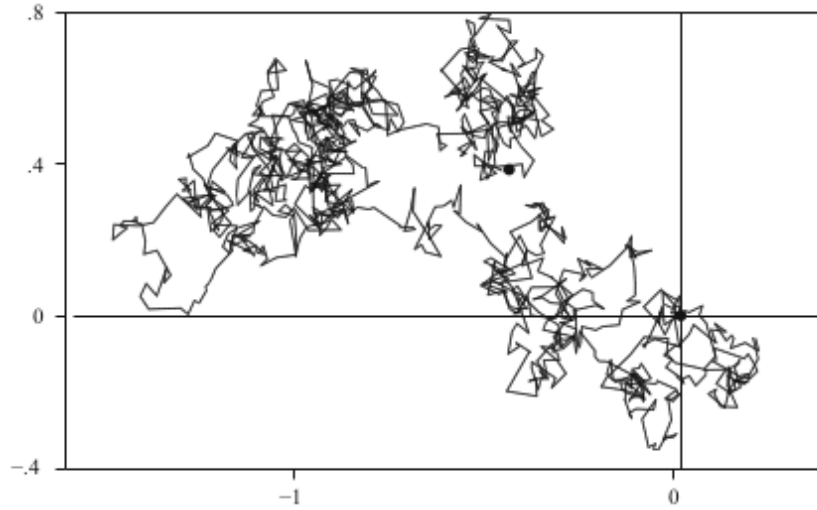
Niech B będzie dwuwymiarowym ruchem Browna. Niech $G_1, G_2 \in L^2([a, b], B_1) = L^2([a, b], B_2)$. Rozważmy procesy

$$X_1(t) = \int_a^t G_1(s) dB_1(s) \quad X_2(t) = \int_a^t G_2(s) dB_2(s). \quad (8.1)$$

Zobaczmy teraz jak proces X_1 i X_2 mają się do siebie.

Lemat 8.2

Niech X_1 i X_2 będą zadane przez (8.1). Wówczas dla dowolnych $0 \leq s <$



Rysunek 8.1. trajektoria dwuwymiarowego ruchu Browna dla $t \in [0, 1]$. Czarnymi kropkami oznaczone są punkt startu i punkt osiągnięty w chwili 1

$t \leq b$,

$$\mathbb{E} \left[\int_s^t G_1(s) B_1(s) \cdot \int_s^t G_2(s) B_2(s) \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0.$$

W szczególności proces $X_1 X_2$ jest martyngałem.

Dowód. Załóżmy na początek, że $G_1, G_2 \in \mathcal{E}$ są postaci

$$G_1(t) = \sum_{k=0}^{n-1} G_k^{(1)} \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t), \quad G_2(t) = \sum_{k=0}^{n-1} G_k^{(2)} \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t).$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_s^t G_1(s) B_1(s) \cdot \int_s^t G_2(s) B_2(s) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \\ \sum_{k,j} \mathbb{E} \left[G^{(1)}(B_1(t_{k+1}) - B_1(t_k)) G^{(2)}(B_2(t_{j+1}) - B_2(t_j)) \middle| \mathcal{F}_s \right]. \end{aligned}$$

Dla $t_j > t_k$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[G_k^{(1)}(B_1(t_{k+1}) - B_1(t_k)) G_j^{(2)}(B_2(t_{j+1}) - B_2(t_j)) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \\ \mathbb{E} \left[G_k^{(1)}(B_1(t_{k+1}) - B_1(t_k)) G_j^{(2)} \mathbb{E} \left[B_2(t_{j+1}) - B_2(t_j) \middle| \mathcal{F}_{t_j} \right] \middle| \mathcal{F}_s \right] = \\ \mathbb{E} \left[G_k^{(1)}(B_1(t_{k+1}) - B_1(t_k)) G_j^{(2)} 0 \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0. \end{aligned}$$

Podobnie dla $t_k = t_j$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[G_k^{(1)} (B_1(t_{k+1}) - B_1(t_k)) G_k^{(2)} (B_2(t_{k+1}) - B_2(t_k)) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \\ & \mathbb{E} \left[G_k^{(1)} G_k^{(2)} \mathbb{E} [(B_1(t_{k+1}) - B_1(t_k))(B_2(t_{k+1}) - B_2(t_k)) | \mathcal{F}_{t_k}] \middle| \mathcal{F}_s \right] = \\ & \mathbb{E} \left[G_k^{(1)} G_k^{(2)} 0 \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0 \end{aligned}$$

co dowodzi lematu w przypadku $G_1, G_2 \in \mathcal{E}$. Przypadek ogólny wynika z gęstości \mathcal{E} w $L^2([0, b], B)$. \square

Niech $G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22} \in L^2([0, b], B_1) = L^2([0, b], B_2)$. Rozważmy teraz dwuwymiarowy proces $X = (X_1, X_2)$ dany przez

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \int_0^t G_{11}(s) dB_1(s) + \int_0^t G_{12}(s) dB_2(s) \\ X_2(t) &= \int_0^t G_{21}(s) dB_1(s) + \int_0^t G_{22}(s) dB_2(s). \end{aligned}$$

Stosować będziemy skrócony zapis. Mamy

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \int_0^t G_{11}(s) dB_1(s) + G_{12}(s) dB_2(s) \\ X_2(t) &= \int_0^t G_{21}(s) dB_1(s) + G_{22}(s) dB_2(s). \end{aligned}$$

co skracamy do

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \int_0^t G_{11}(s) dB_1(s) + G_{12}(s) dB_2(s) \\ \int_0^t G_{21}(s) dB_1(s) + G_{22}(s) dB_2(s) \end{pmatrix} \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} G_{11}(s) dB_1(s) + G_{12}(s) dB_2(s) \\ G_{21}(s) dB_1(s) + G_{22}(s) dB_2(s) \end{pmatrix} \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} B_1(s) \\ B_2(s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jeżeli oznaczymy macierz losową

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{pmatrix}$$

to powyższa wnosić zapisuje się jako

$$X(t) = \int_0^t G(s) dB(s).$$

Definicja 8.3

Niech B będzie n -wymiarowym ruchem Browna. Proces o wartościach macierzowych $G = (G_{ij})_{i,j}$ jest elementem $L^2([a, b], B)$ jeżeli dla każdych i, j jednowymiarowy proces $G_{i,j}$ jest progresywnie mierzalny i

$$\int_a^b \mathbb{E}[G_{ij}(s)^2] ds < \infty.$$

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym $L^2([a, b], B)$ jest przestrzenią Hilberta z normą

$$\|G\|_{L^2([a,b],B)}^2 = \int_a^b \mathbb{E}[\|G(s)\|_{HS}^2] ds,$$

gdzie

$$\|G(s)\|_{HS}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{i,j}(s)^2 = \text{Tr}(G(s)G(s)^*).$$

Definicja 8.4

Niech B będzie n -wymiarowym ruchem Browna. Dla $G \in L^2([a, b], B)$ określamy n -wymiarową całkę stochastyczną z G względem B jako wektor losowy

$$\int_a^b G(s) dB(s) = \left(\sum_{j=1}^n \int_a^b G_{ij}(s) dB_j(s) \right)_i.$$

Fakt 8.5

Dla n -wymiarowego ruchu Browna B oraz $G \in L^2([a, b], B)$,

$$\mathbb{E} \left[\left\| \int_a^b G(s) dB(s) \right\|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b \text{Tr}(G(s)G(s)^*) ds \right] = \|G\|_{L^2([a,b],B)}^2.$$

Dowód. Niech

$$X = \int_a^b G(s) dB(s).$$

Dla ustalonego k .

$$X_k^2 = \left(\sum_{j=1}^n \int_a^b G_{kj}(s) dB_j(s) \right)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_a^b G_{kj}(s) dB_j(s) \int_a^b G_{ki}(s) dB_i(s).$$

Z Lematu 8.2 dla $i \neq j$

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b G_{kj}(s) dB_j(s) \int_a^b G_{ki}(s) dB_i(s) \right] = 0.$$

Dla $i = j$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_a^b G_{ki}(s) dB_i(s) \int_a^b G_{ki}(s) dB_i(s) \right] &= \int_a^b \mathbb{E} [G_{ki}(s)G_{ki}(s)] ds \\ &= \int_a^b \mathbb{E} [G_{ki}(s)^2] ds. \end{aligned}$$

Stąd

$$\mathbb{E}[X_k^2] = \sum_{i=1}^n \int_a^b \mathbb{E} [G_{ki}(s)^2] ds$$

co już pociąga tezę

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left\| \int_a^b G(s) dB(s) \right\|^2 \right] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2] = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \int_a^b \mathbb{E} [G_{ki}(s)^2] ds \\ &= \mathbb{E} \left[\int_a^b \text{Tr}(G(s)G(s)^*) ds \right]. \end{aligned}$$

□

Jeżeli n wymiarowy proces X jest postaci

$$X(t) = X_0 + \int_0^t F(s) ds + \int_0^t G(s) dB(s)$$

to nazywamy go wielowymiarowym procesem Itô i piszemy

$$dX(t) = F(t) dt + G(t) dB(t).$$

Twierdzenie 8.6 (Formuła Itô dla n zmiennych)

Niech $X = (X_t)_{t \in [0, \infty)}$ będzie procesem Itô postaci

$$dX(t) = F(t) dt + G(t) dB(t).$$

Wówczas dla dwukrotnie różniczkowalnej $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zachodzi

$$d\varphi(X_t) = \sum_{k=1}^n \varphi_{x_k} dX_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \varphi_{x_j x_i}(X_t) A_{ij}(t) dt,$$

gdzie $A = GG^*$.

Przykład 8.7

Jeżeli $X = B$, to $G = Id$ oraz

$$\begin{aligned} d\varphi(B(t)) &= \sum_{k=1}^n \varphi_{x_k}(B(t)) dB_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \varphi_{x_j x_j}(B(t)) dt \\ &= \nabla \varphi(B(t)) dB(t) + \frac{1}{2} \Delta \varphi(B(t)) dt. \end{aligned}$$

Jeżeli $n = 2$ w $\varphi(x_1, x_2) = x_1 x_2$, to

$$d(B_1(t)B_2(t)) = B_1(t)dB_2(t) + B_2(t)dB_1(t)$$

co oznacza w szczególności, że $B_1(t)B_2(t)$ jest martyngałem.

8.1 Wielowymiarowe stochastyczne równania różniczkowe

8.2 Rekurencyjność i tranzytywność wielowymiarowego ruchu Browna

8.3 Probabilistyczny dowód zasadniczego twierdzenia algebry

8.4 Zadania

Zadanie 8.1

Pokaż, że $\mathcal{P}_{[a,b]}$ jest σ -ciałem podzbiorów $[a, b] \times \Omega$. Uzasadnij, że $A \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap ([a, t] \times \Omega) \in \mathcal{Bor}[a, t] \otimes \mathcal{F}_t$ dla każdego $t \in [a, b]$.

Zadanie 8.2

Uzasadnij, że jeżeli $X = (X_t)_{t \in [a,b]}$ jest progresywnie mierzalny a $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją borelowską, to proces $\varphi(X) = (\varphi(X_t))_{t \in [a,b]}$ jest progresywnie mierzalny.

Zadanie 8.3

Niech $X, Y \in L^2([a, b], B)$. Pokaż, że

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b X_s dB_s \cdot \int_a^b Y_s dB_s \right] = \int_a^b \mathbb{E}[X_s Y_s] ds.$$

Zadanie 8.4

Oblicz

$$\mathbb{E} \left[\int_0^2 B_s dB_s \cdot \int_0^3 B_s^2 dB_s \right].$$

Zadanie 8.5

Oblicz

$$\mathbb{E} \left[B_s \int_0^t B_u dB_u \right].$$

Zadanie 8.6Znajdź jawną postać $\int_0^1 \mathbb{1}_{\{B_s=0\}} dB_s$.**Zadanie 8.7**Niech $f \in L^2[a, b]$ Znajdź rozkład zmiennej losowej $\int_a^b f(s) dB_s$.**Zadanie 8.8**Niech $Z = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{B_s \geq 0\}} dB_s$. Oblicz $\mathbb{E}[Z]$ oraz $\text{Var}[Z]$.**Zadanie 8.9**Niech $X \in L^2([a, b], B)$ a A będzie \mathcal{F}_a -mierzalną, ograniczoną zmienną losową. Pokaż, że $(AX_t)_{t \in [a, b]} \in L^2([a, b], B)$ oraz, że

$$\int_a^b AX_s dB_s = A \int_a^b X_s dB_s.$$

Zadanie 8.10Niech $Y_t = \int_0^t e^s dB_s$ oraz $Z_t = \int_0^t Y_s dB_s$. Oblicz $\mathbb{E}[Z_t]$, $\mathbb{E}[Z_t^2]$ oraz $\mathbb{E}[Z_t Z_s]$.**Zadanie 8.11**Uzasadnij wzór na całkowanie przez części: dla ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o skończonym wahanii

$$\int_a^b f(s) dB_s = f(b)B_b - f(a)B_a - \int_a^b B_s df(s).$$

Zadanie 8.12Niech $Y_t = t^3 B_t - \int_0^t B_s 3s^2 ds$. Pokaż, że proces $Y = (Y_t)_{t \in [0, \infty)}$ jest ciągłym martyngałem całkowanym z kwadratem. Znajdź $\langle Y \rangle$.**Zadanie 8.13**Niech $x(t) = \int_0^t f(s) ds$ dla $f \in L^1[0, b]$. Pokaż, że funkcja x ma ograniczone wanie na $[0, b]$.**Zadanie 8.14**Uzasadnij, że reprezentacja procesu Itô jest jednoznaczna: Jeżeli dla $F^1, F^2, G^1, G^2 \in L^2([0, b], B)$ zachodzi

$$\int_0^t F_s^1 ds + \int_0^t G_s^1 dB_s = \int_0^t F_s^2 ds + \int_0^t G_s^2 dB_s$$

to $F^1 = F^2$ oraz $G^1 = G^2$.

Zadanie 8.15

Pokaż, że proces Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t F_s ds + \int_0^t G_s dB_s$$

jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy $F = 0$.

Zadanie 8.16

Pokaż, że

$$X_t = \int_0^t e^{-B_s^2} dB_s$$

jest martyngałem całkownym z kwadratem. Czy jest on jednostajnie całkowny?

Zadanie 8.17

Niech $g \in L^2[0, \infty)$. Pokaż, że

$$Y_t = \exp \left\{ \int_0^t g(s) dB_s - \int_0^t g(s)^2 ds \right\}$$

jest jednostajnie całkownym martyngałem.

Zadanie 8.18

Pokaż, że dla $a, b > 0$ proces $X_t = (b - B_t)(a + B_t) + t$ jest procesem Itô.

Zadanie 8.19

Pokaż, że

$$M_t = (B_t + t)e^{-B_t^2 - t/2}$$

jest procesem Itô. Wywnioskuj, że jest on martyngałem.

Zadanie 8.20

Pokaż, że dla $\theta > 0$,

$$\int_0^t e^{\theta B_s - \theta^2 s/2} dB_s = \frac{1}{\theta} \left(e^{\theta B_t - \theta^2 t/2} - 1 \right).$$

Zadanie 8.21

Niech $B = (B_t)_{t \in 0, +\infty}$ będzie ruchem Browna a dla $a, b > 0$, τ będzie czasem wyjścia B z odcinka $(-a, b)$, tj. $\tau = \inf\{s \geq 0 : B_s \notin (-a, b)\}$. Znajdź $\mathbb{E}[\int_0^\tau B_t dt]$.

Zadanie 8.22

Niech

$$Y_t = tB_t - \int_0^t B_s ds, \quad Z_t = \exp \left\{ Y_t - \frac{1}{6}t^3 \right\}.$$

Pokaż, że $Z = (Z_t)_{t \in [0, \infty)}$ jest martyngałem.

Zadanie 8.23

Pokaż, że

$$M_t = e^{\lambda t} B_t - \lambda \int_0^t e^{\lambda s} B_s ds$$

jest martyngałem całkowalnym z kwadratem. Wyznacz $\langle M \rangle$. Pokaż, że

$$Z_t = \exp \left\{ M_t - \frac{1}{4\lambda} (e^{2\lambda t} - 1) \right\}$$

jest martyngałem.

Zadanie 8.24

Niech B będzie jednowymiarowym ruchem Browna. Pokaż, że proces $X_t = e^{B_t}$ spełnia

$$dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + X_t dB_t.$$

Zadanie 8.25

Niech B będzie jednowymiarowym ruchem Browna. Proces *Ornsteina-Uhlenbecka* U definiujemy jako rozwiązanie stochastycznego równania różniczkowego

$$\begin{aligned} dU_t &= -\lambda U_t dt + \sigma dB_t \\ U_0 &= x, \end{aligned}$$

gdzie $x, \lambda, \sigma \in \mathbb{R}$. Znajdź jawną postać procesu U . Wyznacz $\mathbb{E}U_t$ oraz $\text{Var}[U_t]$.

Zadanie 8.26

Niech U będzie procesem Ornsteina-Uhlenbecka a $Y_t = U_t^2$. Znajdź stochastyczne równanie różniczkowe, które rozwiązuje Y .

Zadanie 8.27

Niech G będzie dany jest przez stochastyczne równanie różniczkowe

$$\begin{aligned} dG_t &= \mu G_t dt + \sigma G_t \\ G_0 &= 1. \end{aligned}$$

Dla jakiej liczby rzeczywistej α proces $(G_t^\alpha)_{t \in [0, \infty)}$ jest martyngałem? Niech $\tau = \inf\{t : G_t \notin (1/2, 2)\}$. Znajdź $\mathbb{P}[G_\tau = 2]$.

Zadanie 8.28

Niech B będzie dwuwymiarowym ruchem Browna. Dla $\nu \in \mathbb{R}$ rozważmy dwuwymiarowe stochastyczne równanie różniczkowe

$$\begin{aligned}dX_t &= Y_t dB_1(t) \\dY_t &= \nu Y_t dt + Y_t dB_2(t) \\X_0 &= x, Y_0 = y > 0.\end{aligned}$$

Znajdź jawną postać X i Y . Czy X jest martyngałem? Znajdź $\mathbb{E}X_t$ oraz $\text{Var}[X_t]$.

Zadanie 8.29

Niech B będzie n -wymiarowym ruchem Browna. Pokaż, że proces $X_t = AB_t$ również jest n -wymiarowym ruchem Browna dla dowolnej macierzy ortogonalnej A (tj. $AA^* = Id$).

Zadanie 8.30

Niech $B = (B_1, B_2)$ będzie dwuwymiarowym ruchem Browna. Wiemy już, że proces $M_t = B_1(t)B_2(t)$ jest martyngałem. Wyznacz $\langle M \rangle_t$.

Zadanie 8.31

Niech B będzie n -wymiarowym ruchem Browna. Pokaż, że proces $X_t = \|B(t)\|^2$ spełnia

$$dX_t = ndt + B(t)dB(t).$$

Zadanie 8.32

Niech B będzie n -wymiarowym ruchem Browna a τ momentem jego pierwszego wyjścia z kuli o promieniu $r > 0$, tj. $\tau = \inf\{t \geq 0 : \|B(t)\| > r\}$. Znajdź $\mathbb{E}[\tau]$.

Zadanie 8.33

Niech B będzie n -wymiarowym ruchem Browna a $A \in \mathcal{Bor}(\mathbb{R}^n)$ zbiorem o skończonej i dodatniej mierze Lebesgue'a. Oznaczmy przez S_A losowy zbiór chwil, w których B trafia w zbiór A , tj.

$$S_A(\omega) = \{t : B_t(\omega) \in A\}.$$

Wówczas z mierzalności B i twierdzenia Fubiniego miara Lebesguea $\lambda(S_A)$ powyższego zbioru jest zmienną losową, która reprezentuje czas jaki ruch Browna spędził w zbiorze A . Pokaż, że

$$\mathbb{E}[\lambda(S_A)] = \begin{cases} \infty & n \leq 2 \\ \frac{1}{2\pi^{n/2}} \Gamma(n/2 - 1) \int_A \|x\|^{2-n} dx & n > 2, \end{cases}$$

gdzie $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

Literatura

- B.65. Ash R. B. *Information Theory*. Interscience Publishers, New York, 1965.
- Bal17. Paolo Baldi. *Stochastic Calculus*. Springer, 2017.
- Fic72. GM Fichtenholz. *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 3*. PWN, Warszawa, 1972.
- Gra46. Lawrence M Graves. *The theory of functions of real variables*. Courier Corporation, 1946.
- KS12. Ioannis Karatzas and Steven Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media, 2012.

Indeks

- całka Itô, 13
- całka Riemanna-Stieltjesa, 7
- filtracja, 37, 57
- funkcja
 - hölderowsko ciągła, 27
- martyngał, 58
- modyfikacja procesu, 27
- most Browna, 20
- nadmartyngał, 58
- normalny ciąg podziałów, 6
- podmartyngał, 58
- prawo
 - iterowanego logarytmu, 31
- Prawo 0-1 Blumenthala, 40
- proces
 - o niezależnych przyrostach, 19
 - o stacjonarnych przyrostach, 19
 - Poissona, 19, 58
- proces stochastyczny, 1
- procesy
 - nierozróżnialne, 27
 - równoważne, 23
- progresywne σ -ciało, 49
- rozkład
 - procesu stochastycznego, 22
 - skończeniowymiarowy, 22
- ruch
 - Browna, 58
 - ruch Browna, 3
- trajektoria procesu, 5
- twierdzenia
 - o π i λ -układach, 23
- twierdzenie
 - Kołmogorowa o istnieniu procesu, 24
- wahanie funkcji, 9
- warunki zgodności, 24
- wzór
 - na całkowanie
 - przez części, 16
 - przez podstawienie, 16
- zbiory
 - cylicydryczne, 21