Stochastyczne modele systemów oddziuałujących 2024

zadanie domowe 2

termin: 12.12.2024

Niech $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ będzie jednorodnym procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Dla $x \in \mathbb{R}$ definiujemy proces $U^{(x)} = (U_t^{(x)})_{t\in\mathbb{R}_+}$ jako rozwiązanie

$$U_t^{(x)} = x + \int_0^t \left(U_{s-}^{(x)}\right)^2 \, \mathrm{d}N_s.$$

Tutaj $U_{s-}^{(x)}$ oznacza granicę lewostronną $U^{(x)}$ w punkcie s:

$$U_{s-}^{(x)} = \lim_{t\uparrow s} U_t^{(x)}.$$

Całkę interpretujemy w sensie Lebesgue'a-Stieltjesa. Możemy zapisać ją jawnie jako

$$\int_0^t \left(U_{s-}^{(x)}\right)^2 \, \mathrm{d}N_s = \sum_{j=1}^{N_t} \left(U_{S_j-}^{(x)}\right)^2,$$

gdzie $S_j = \inf\{t \geq 0 \,:\, N_t = j\}$. Pokaż, że $\mathbf{P}_x[\,\cdot\,] = \mathbb{P}[U^{(x)} \in \cdot\,]$ jest procesem Fellera.