Contents

Wykład 7: Rozkłady stacjonarne, zaburzenia ruchu Browna

Rozkłady stacjonarne

Interesować nas będzie asymptotyczne zachowanie procesów Fellera. Podobnie jak w przypadku łańcuchów Markowa w czasie dyskretnym rozkłady graniczne są niezmiennicze ze względu na funkcje przejścia. Przez Σ oznaczać będziemy σ-ciało zbiorów borelowskich S, czyli najmniejsze σ-ciało zawierające wszystkie otwarte podzbiory S. Skoro S jest ośrodkowa, to Σ jest generowane przez wszystkie kule otwarte.

Dla Procesu Fellera $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ oraz rozkładu prawdopodobieństwa μ na S definiujemy miarę probabilistyczną $\mathbf{P}_\mu$ na (S, Σ) wzorem

$$\mathbf{P}_\mu[A] = \int_S \mathbf{P}_x[A]\,\mu(\mathrm{d}x), \qquad A \in \mathcal{F}.$$

W tym miejscu zachęcamy czytelnika do wprawdzenia, że odwzorowanie $x \mapsto \mathbf{P}_x[A]$ jest mierzalne dla $A \in \mathcal{F}$. Miara $\mathbf{P}_\mu$ to rozkład procesu Markowa przy rozkładzie początkowym μ.

Definicja 0.1. Niech $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ będzie procesem Fellera Rozkład prawdopodobieństwa π na (S, Σ) nazywamy rozkładem stacjonarnym jeżeli

$$\mathbf{P}_\pi\left[X(t) \in A\right] = \pi(A)$$

dla każdego $A \in \Sigma$.

Chcielibyśmy wiedzieć, jak określić na podstawie generatora, czy miara prawdopodobieństwa na S jest stacjonarna dla procesu Fellera. Z tego powodu przepiszemy powyższą definicję w terminach półgrupy. Jeśli μ jest miarą prawdopodobieństwa na S, rozkład procesu w czasie t, gdy rozkład początkowy jest μ, oznaczamy przez $\mu T(t)$. Spełnia on zależność

$$\int f\,\mathrm{d}(\mu T(t)) = \int T(t) f\,\mathrm{d}\mu = \mathbf{E}_\mu\left[f(X(t))\right]$$

dla $f \in C_0(S)$. Tutaj $\mathbf{E}_\mu$ to wartość oczekiwana odpowiadająca $\mathbf{P}_\mu$. Równoważnie

$$\mathbf{E}_\mu[Y] = \int_X \mathbf{E}_x[Y]\,\mu(\mathrm{d}x)$$

dla każdej ograniczonej zmiennej losowej $Y : \Omega \to \mathbb{R}$.

Definicja 0.2. Miara prawdopodobieństwa μ na S jest stacjonarna dla procesu Fellera z półgrupą $T(t)$, jeśli $\mu T(t) = \mu$ dla wszystkich $t \geq 0$, tzn. jeśli

$$\int T(t) f\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu \quad \text{dla wszystkich } f \in C_0(S) \text{ i } t \geq 0.$$

Zadanie 0.1. Pokaż, że jeśli μ jest miarą prawdopodobieństwa na S i $\mu T(t) \Rightarrow \nu$, to ν jest stacjonarna.

Twierdzenie 0.1. *Miara prawdopodobieństwa μ na S jest stacjonarna dla odpowiadającego procesu wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\int Lf\,\mathrm{d}\mu = 0 \quad \textit{dla wszystkich } f \in D.$$

Proof. Przypuśćmy, że μ jest stacjonarna, i weźmy $f \in \mathcal{D}(L)$. Wtedy

$$\int Lf \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{t\to 0} \frac{T(t)f - f}{t} \,\mathrm{d}\mu = \lim_{t\to 0} \frac{\int T(t)f \mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\mu}{t} = 0.$$

Przeciwnie, przypuśćmy, że $\int Lf \,\mathrm{d}\mu = 0$ dla wszystkich $f \in \mathcal{D}(L)$ i jeśli $f \in \mathcal{D}(L)$ oraz $f - \lambda Lf = g$, to $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$. Iterując to, otrzymujemy

$$\int (I - \lambda L)^{-n} g \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu.$$

Biorąc $\lambda = t/n$ i przechodząc z $n \to \infty$ wnioskujemy, że

$$\int T(t) g \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Oto wystarczający warunek na istnienie rozkładu stacjonarnego.

Twierdzenie 0.2. *Jeśli S jest przestrzenią zwartą, to istnieje miara stacjonarna.*

Proof. Proof. Rozważmy proces Fellera z dowolnym rozkładem początkowym μ. Niech ν_n będzie rozkładem zmiennej Zdefiniujmy miarę ν_n na S poprzez warunek

$$\int_S f(y)\nu_n(\mathrm{d}y) = \mathbb{E}\left[\mathbf{E}_\mu\left[f(X_{nU})\right]\right] = \mathbb{E}\left[\int_S T_{nU} f(y)\, \mu(\mathrm{d}y)\right].$$

Dla $f \in C_0(S)$, własność półgrupy daje

$$\int T(t)f(y)\, \nu_n(\mathrm{d}y) = \mathbb{E}\left[\int_S T_{nU+t} f(y)\, \mu(\mathrm{d}y)\right].$$

tak że

$$\begin{aligned} \int f \,\mathrm{d}\nu_n - \int T(t) f \,\mathrm{d}\nu_n &= \int f \,\mathrm{d}\nu_n - \int f \,\mathrm{d}(\nu_n T(t)) \\ &= \frac{1}{n}\left[\int_0^t \int_S T(r) f \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}r - \int_n^{n+t} \int_S T(r) f \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}r\right]. \end{aligned}$$

Prawa strona **??**(#eq:3:29) dąży do zera gdy $n \to \infty$.

Teraz, ponieważ S jest zwarty, twierdzenie Prochorowa, implikuje, że istnieje podciąg ν_{n_k} taki, że

$$\nu_{n_k} \Rightarrow \nu$$

dla pewnej miary prawdopodobieństwa ν na S. Zatem, ponieważ $T(t)f \in C(S)$, możemy przejść do granicy w @ref wzdłuż ciągu ν_{n_k}, aby otrzymać

$$\int f \,\mathrm{d}\nu = \int T(t) f \,\mathrm{d}\nu.$$

Ponieważ to zachodzi dla wszystkich $f \in C_0(S)$, wynika stąd, że $\nu T(t) = \nu$. □

Zaburzenia ruchu Browna

Przykład 0.1. Rozważmy ruch Browna na $[0, \infty)$ z absorpcją w 0. Niech τ będzie czasem pierwszego uderzenia w 0. Zdefiniujmy

$$X_a(t) = \begin{cases} X(t) & \text{jeśli } t < \tau, \\ 0 & \text{jeśli } t \geq \tau, \end{cases}$$

oraz oznaczmy przez L_a i $T_a(t)$ odpowiednio generator i półgrupę. Dla $f \in C_0[0,\infty)$, niech f_o będzie „nieparzystym" przedłużeniem f na $\mathbb{R}$:

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jeśli } x \geq 0, \\ 2f(0) - f(-x) & \text{jeśli } x < 0. \end{cases}$$

Z zasady odbicia dla każdej $g \in C_0[0,\infty)$,

$$\mathbf{E}_x \left[g(X(t)) \mathbf{1}_{\{t \geq \tau\}} \right] = \mathbf{E}_x \left[g(-X(t)) \mathbf{1}_{\{t \geq \tau\}} \right].$$

Biorąc $g = f_o$,

$$\mathbf{E}_x \left[f_o(X(t)) \mathbf{1}_{\{t \geq \tau\}} \right] = \mathbf{E}_x \left[f_o(-X(t)) \mathbf{1}_{\{t \geq \tau\}} \right].$$

Obie te wielkości są równe

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}_x \left[(f_o(X(t)) + f_o(-X(t))) \mathbf{1}_{\{t \geq \tau\}} \right].$$

Ostatnie wyrażenie, z definicji f_o jest równe

$$f(0) \mathbf{P}_x(t \geq \tau).$$

Podsumowując dla $x \geq 0$,

$$T_a(t) f(x) = \mathbf{E}_x \left[f(X(t)) \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \right] + f(0) \mathbf{P}_x(t \geq \tau) = \mathbf{E}_x f_o(X(t)).$$

Oczywiście $f_o \notin C(\mathbb{R})$ o ile $f(0) = 0$. Niemniej jednak, skoro

$$f_o''(x) = \begin{cases} f''(x) & \text{jeśli } x > 0, \\ -f''(-x) & \text{jeśli } x < 0, \end{cases}$$

wtedy $f''(0) = 0$ jest potrzebne, aby f_o'' było ciągłe. Wynika z tego, że

$$\mathcal{D}(L_a) = \{ f \in C_0[0,\infty) : f'' \in C[0,\infty), f''(0) = 0 \},$$

a dla $f \in \mathcal{D}(L_a)$, $L_a f = \frac{1}{2} f''$.

Przykład 0.2. Rozważmy ruch Browna na $[0,\infty)$ z odbiciem w 0. Proces ten jest zdefiniowany jako

$$X_r(t) = |X(t)|,$$

a jego generator i półgrupa będą oznaczane odpowiednio przez L_r i $T_r(t)$. Jeśli $f \in C_0[0,\infty)$, niech f_e będzie parzystym przedłużeniem f na $\mathbb{R}$:

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & \text{jeśli } x \geq 0, \\ f(-x) & \text{jeśli } x < 0. \end{cases}$$

Wtedy

$$T_r(t) f(x) = \mathbf{E}_x \left[f(|X(t)|) \right] = \mathbf{E}_x f_e(X(t)) \quad \text{dla } x \geq 0.$$

Zatem,

$$f \in \mathcal{D}(L_r) \iff f_e \in \mathcal{D}(L).$$

Wynika z tego, że

$$\mathcal{D}(L_r) = \{ f \in C[0,\infty) : f', f'' \in C[0,\infty), f'(0) = 0 \},$$

a dla $f \in \mathcal{D}(L_r)$, $L_r f = \frac{1}{2} f''$.

Przykład 0.3. Zaprezentujemy teraz ruch Browna na $[0,\infty)$ z lepkim 0. Dla $c>0$, rozważmy operator L_c zdefiniowany jako $L_c f = \frac{1}{2}f''$ na

$$\mathcal{D}(L_c) = \{f \in C_0[0,\infty) : f'' \in C[0,\infty), f'(0) = cf''(0)\}.$$

Zauważmy, że graniczne przypadki $c \downarrow 0$ i $c \uparrow \infty$ odpowiadają odpowiednio odbiciu i absorpcji w 0. Jest to generator prawdopodobieństwa — dowód jest pozostawiony jako ćwiczenie. Oto weryfikacja własności (d) w Definicji 2: Dla $g \in C_0[0,\infty)$ i $\lambda > 0$, musimy rozwiązać $f - \lambda L_c f = g$ dla $f \in \mathcal{D}(L_c)$. Niech $f_a \in \mathcal{D}(L_a)$ oraz $f_r \in \mathcal{D}(L_r)$ będą rozwiązaniami

$$f_a - \lambda L_a f_a = g \quad \text{oraz} \quad f_r - \lambda L_r f_r = g.$$

Ponieważ wszystkie trzy generatory są równe $\frac{1}{2}f''$ na swoich dziedzinach,

$$f = \gamma f_a + (1-\gamma) f_r$$

jest wymaganym rozwiązaniem, pod warunkiem że $f'(0) = cf''(0)$. Ma to miejsce, gdy γ spełnia

$$\gamma f_a'(0) = c(1-\gamma) f_r''(0).$$

Aby znaleźć wartość γ, $f_a'(0)$ i $f_r''(0)$ muszą mieć ten sam znak. Aby to sprawdzić, rozważmy $h = f_a - f_r$. Wtedy $h - \frac{\lambda}{2}h'' \equiv 0$, więc, ponieważ h jest ograniczone,

$$h(x) = h(0)e^{-x\sqrt{2/\lambda}}.$$

Wynika z tego, że

$$f_a'(0) = -\sqrt{2/\lambda}\, h(0)$$

oraz

$$f_r''(0) = -\left(\frac{2}{\lambda}\right) h(0),$$

więc mają ten sam znak, i

$$\gamma = \frac{2c}{2c + \sqrt{2\lambda}}.$$

Aby powiedzieć coś o zachowaniu tego procesu, gdy odwiedza 0, napiszmy

$$f = \alpha U_c(\alpha) g,$$

gdzie $\alpha = \lambda^{-1}$, a U_c jest rozwiązaniem dla procesu $X_c(t)$ z generatorem L_c. Można to zapisać jako

$$f(x) = \frac{2cf_a(x) + \sqrt{2\lambda} f_r(x)}{2c + \sqrt{2\lambda}} = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} \mathbf{E}_x g(X_c(t))\, \mathrm{d}t.$$

Zastosujmy tę tożsamość do ciągu funkcji g, które są nieujemne i rosną do $1_{(0,\infty)}$. Odpowiadające im f, f_a, oraz f_r rosną odpowiednio do

$$\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} \mathbf{P}_x(X_c(t) > 0)\, \mathrm{d}t, \quad \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} \mathbf{P}_x(X_a(t) > 0)\, \mathrm{d}t,$$

oraz 1. Biorąc $x = 0$, otrzymujemy

$$\mathbf{E}_0 \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha t} 1_{\{X_c(t)>0\}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{1 + c\sqrt{2\alpha}}.$$

Zatem miara Lebesgue'a zbioru $\{t \geq 0 : X_c(t) = 0\}$ jest dodatnia, w przeciwieństwie do przypadku procesu odbijanego, który odpowiada $c = 0$.