# Contents



# Wykład 6: od generatora przez półgrupę do procesu

2024-11-07

*Piotr Dyszewski*

W całym tym rozdziale $(L, \mathcal{D}(L))$ będzie generatorem infinitezymalnym. Naszym pierwszym zadaniem jest skonstruowanie odpowiadającej mu półgrupy Fellera. Aby to zrobić, wprowadzamy aproksymację $L_\epsilon$ zadaną przez

$$L_\epsilon = L(I - \epsilon L)^{-1}.$$

Zauważmy, że $L_\epsilon$ jest dobrze określone ponieważ

$$f \in \mathcal{D}(L),\ f - \epsilon L f = g \quad \text{jest równoważne} \quad f = (I - \epsilon L)^{-1} g.$$

Ponadto, przy oznaczeniach jak wyżej,

$$\|L_\epsilon g\| = \|Lf\| \leq \frac{\|f\| + \|g\|}{\epsilon} \leq \frac{2}{\epsilon}\|g\|$$

, więc $L_\epsilon$ jest ograniczonym operatorem. To pozwala zdefiniować $T_\epsilon(t)$ przez

$$T_\epsilon(t) = e^{tL_\epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n L_\epsilon^n}{n!}.$$

**Zadanie 0.1.**

- Pokaż, że dla każdego $f \in C_0(S)$,
$$(I - \epsilon L)^{-1} f - \epsilon L_\epsilon f = f. \tag{1}$$
- Użyj części (a), aby pokazać, że $L_\epsilon$ jest generatorem infinitezymalny„ oraz że $T_\epsilon(t)$ jest półgrupą Fellera, której generatorem jest $L_\epsilon$.

**Twierdzenie 0.1.** *Dla $f \in C_0(S)$,*

$$T(t)f = \lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon(t) f$$

*jednostajnie na ograniczonych przedziałach $t$. Definiuje to półgrupę Fellera, której generatorem jest $L$.*

*Proof.* Najpierw sprawdzamy, że $L_\epsilon$ i $L_\delta$ komutują dla $\epsilon, \delta > 0$. Aby to sprawdzić zauważmy najpierw, że

$$(I - \epsilon L)^{-1}(I - \delta L)^{-1} = (I - \delta L)^{-1}(I - \epsilon L)^{-1},$$

co z kolei jest prawdziwe, ponieważ

$$(I - \epsilon L)^{-1}(I - \delta L)^{-1} f = g \quad \text{jest równoważne} \quad f = g - (\epsilon + \delta) L g + \epsilon\delta L^2 g,$$

co jest symetryczne w $\epsilon$ i $\delta$. Korzystając teraz z (1) napiszmy

$$\epsilon\delta L_\epsilon L_\delta = \left((I - \epsilon L)^{-1} - I\right)\left((I - \delta L)^{-1} - I\right) =$$
$$\left((I - \delta L)^{-1} - I\right)\left((I - \epsilon L)^{-1} - I\right) = \epsilon\delta L_\delta L_\epsilon.$$

Zauważmy, że dzięki temu operatory $L_\delta$, $L_\epsilon$, $T_\epsilon(t)$ i $T_\delta(t)$ również komutują.

Chcąc pokazać, że $T_\epsilon(t)$ przy $\epsilon \to 0$ rzeczywiście zbiegają będziemy chcieli opierać się na zbieżności $L_\epsilon$ przy $\epsilon \to 0$. Uzasadnimy teraz nierówność, która uzasadni, że takie wnioskowanie jest możliwe. Stosując zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego otrzymujemy, że dla każdej $f \in C_0(S)$,

$$T_\epsilon(t)f - T_\delta(t)f = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[T_\epsilon(s)T_\delta(t-s)]f\,\mathrm{d}s = \int_0^t T_\epsilon(s)T_\delta(t-s)(L_\epsilon - L_\delta)f\,\mathrm{d}s.$$

Skoro $\|T_\epsilon(s)\|, \|T_\delta(t-s)\| \leq 1$ udowodniona właśnie nierówność implikuje, że

$$\|T_\epsilon(t)f - T_\delta(t)f\| \leq t\|L_\epsilon f - L_\delta f\|.$$

Wystarczy pokazać zatem, że $L_\epsilon$ zbiegają. Spodziewamy się, że $(I-\epsilon L)^{-1} \to I$, co z kolei powinno implikować, że $L_\epsilon \to L$. Sprawdzimy teraz formalnie to rozumowanie. Dla $f \in \mathcal{D}(L)$ mamy

$$(I-\epsilon L)^{-1}f - f = \epsilon(I-\epsilon L)^{-1}Lf$$

Skoro $\|(I-\epsilon L)^{-1}\| \leq 1$, to

$$\|(I-\epsilon L)^{-1}f - f\| \leq \epsilon\|Lf\|.$$

W szczególności, dla $f \in \mathcal{D}(L)$,

$$\lim_{\epsilon\to 0}(I-\epsilon L)^{-1}f = f.$$

Skoro $(I-\epsilon L)^{-1}$ jest ciągłe a $\mathcal{D}(L)$ gęste w $C_0(S)$, powyższa zbieżność ma miejsce dla wszystkich $f \in C_0(S)$. Ponieważ

$$L_\epsilon f = (I-\epsilon L)^{-1}Lf$$

dla $f \in \mathcal{D}(L)$, to

$$\lim_{\epsilon\to 0} L_\epsilon f = Lf$$

dla $f \in \mathcal{D}(L)$. Tak więc przez @ref, granica w (0.1) istnieje jednostajnie na ograniczonych zbiorach $t$ dla $f \in \mathcal{D}$. Ponieważ zbiór $\mathcal{D}(L)$ jest gęsty w $C_0(S)$ i $T_\epsilon(t)$ jest kontrakcją, ten sam wniosek jest prawdziwy dla wszystkich $f \in C_0(S)$. Z udowodnionej właśnie zbieżności wynika, że a $T(t)$ spełnia własność półgrupy oraz wszystkie postulaty procesu Fellera z wyjątkiem ostatniego.

Aby uzasadnić, że $(T_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ spełnia ostatnią własność pokażemy najpierw, że

$$(I-\alpha L)^{-1} = \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}T_t\mathrm{d}t.$$

Ustalmy w tym celu $\lambda > 0$ tak małe, że $\mathcal{R}(I-\lambda L) = C_0(S)$, i wybierzmy $\alpha$ tak, że $\alpha\lambda = 1$. Ustalmy $g \in C_0(S)$. Chcąc uzasadnić

$$(I-\alpha L)^{-1}g = \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}T_t g\mathrm{d}t$$

odwołamy się do aproksymacji $L$ i $T(t)$ przez odpowiednio $L_\epsilon$ oraz $T_\epsilon(t)$. Niech

$$f_\epsilon = (I-\alpha L_\epsilon)^{-1}g = \alpha U_\epsilon(\alpha)g = \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}T_\epsilon(t)g\,\mathrm{d}t.$$

Z (0.1),

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} f_\epsilon = f, \qquad f = \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}T(t)g\,\mathrm{d}t.$$

Połóżmy $h_\epsilon = (I-\epsilon L)^{-1}f_\epsilon$. Wówczas z (1), $\lim_{\epsilon\to 0} h_\epsilon = f$. Niech wreszcie $h = (I-\lambda L)^{-1}g$. Naszym aktualnym celem () we wprowadzonej właśnie notacji jest pokazać, że $f = h$. Z definicji $L_\epsilon$,

$$\lambda Lh_\epsilon = L_\epsilon f_\epsilon = \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}L_\epsilon T_\epsilon(t)f\mathrm{d}t = \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_\epsilon(t)f\mathrm{d}t$$
$$-\alpha g + \alpha^2\int_0^\infty e^{-\alpha t}T_\epsilon(t)f\mathrm{d}t = \alpha(f_\epsilon - g) \to \alpha(f-g)$$

gdy $\epsilon \to 0$. Dlatego,

$$\lim_{\epsilon \to 0}[(h_\epsilon - h) - \lambda L(h_\epsilon - h)] = 0,$$

z czego z kolei wynika, że $h_\epsilon - h \to 0$. Stąd $f = h$. Zastosowanie () do $g_n$ i $f_n = (I - \lambda L)^{-1} g_n$ z Definicji **??** widzimy, że

$$\lim_{n\to\infty} \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t}(T(t)g_n)(x)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$$

dla każdego $x \in S$. Niech $\mu_{t,x}$ będzie miarą zdefiniowaną przez

$$T(t)f(x) = \int f(y)\mu_{t,x}(\mathrm{d}y).$$

Skoro $T(t)$ jest ograniczonym operatorem, to miara $\mu_{t,x}$ jest skończona. Jako, że $g_n \to 1$ punktowo, to twierdzenia o zbieżności ograniczonej mamy więc

$$T(t)g_n(x) \to \mu_{t,x}(S).$$

Stąd

$$1 = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t}\mu_{t,x}(S)\mathrm{d}t.$$

Innymi słowy transformatą Laplace'a funkcji $t \mapsto \mu_{t,x}(S)$ jest $\alpha \to 1/\alpha$. Widzimy więc, że $\mu_{t,x}(S) \equiv 1$. Czyli $T(t)g_n \to 1$ punktowo. Oznacza to, że spełniona jest ostatnia własność w Definicji **??**.

Wreszcie, sprawdzamy, że ta półgrupa Fellera $(T_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ma generator $L$. Mamy

$$T_\epsilon(t)f - f = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}T_\epsilon(s)\mathrm{d}s = \int_0^t T_\epsilon(s)L_\epsilon f\mathrm{d}s.$$

Jeśli $f \in \mathcal{D}(L)$, to (0.1), @ref[eq:3-22) oraz własność kontrakcji $T_\epsilon(t)$ implikują, że można przejść do granicy w tym równaniu, aby uzyskać

$$T(t)f - f = \int_0^t T(s)Lf\mathrm{d}s.$$

Zatem

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)f - f}{t} = Lf \text{ dla } f \in \mathcal{D}(L).$$

Pokazaliśmy właśnie, że

$$\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}'(L) = \left\{ f \in C_0(S) \ : \ \lim_{t\to 0}(T(t)f - f)/t \text{ istnieje} \right\}.$$

Wiemy, że obie pary $(L, \mathcal{D}(L))$ oraz $(L, \mathcal{D}'(L))$ są generatorami infinitezymalnymi. Niech $f \in \mathcal{D}'(L)$. Rozważmy $g = (I - \lambda L)f$. Istnieje $h \in \mathcal{D}(L)$ takie, że $g = (I - \lambda L)h$. Stąd $(I - \lambda L)(f - h) = 0$ a co za tym idzie $f = h \in \mathcal{D}(L)$. Pokazaliśmy właśnie, że $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}'(L)$. ☐

**Twierdzenie 0.2.** *Jeśli $(T_t)_{t\geq 0}$ jest półgrupą Fellera, to istnieje proces Fellera $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ spełniający*

$$\mathbf{E}_x f(X(t)) = T_t f(x)$$

*dla $x \in S, t \geq 0$, oraz $f \in C_0(S)$.*

*Proof.* Ustalmy $x \in S$. Pokażemy najpierw, że istnieje proces $Y(t), t \in \mathbb{Q}^+$ na pewnej przestrzeni probabilistycznej, który ma pożądane rozkłady skończenie wymiarowe oraz $Y(0) = x$.

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ definiujemy rozkład $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ na $S^n$ poprzez następujący wymóg: dla dowolnych $f_1, \ldots, f_n$ z $C_0(S)$ zachodzi

$$\int f_1(y_1)f_2(y_2)\cdots f_n(y_n)\mu_{t_1,\ldots,t_n}(\mathrm{d}(y_1,\ldots y_n)) = T_{t_1}\left(f_1 T_{t_2-t_1}\left(f_2 T_{t_3-t_2}(\ldots)\right)\right)(x). \tag{2}$$

Funkcje o rozdzielonych zmiennych $f_1(y_1)f_2(y_2)\cdots f_n(y_n)$ są liniowo gęste w $C(S^n)$. Miara $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$ jest więc dobrze określona (istnieje dokładnie jedna spełniająca zadany warunek). Aby powołać się na twierdzenie Kołmogorowa o istnieniu procesu należy uzasadnić, że skonstruowane w ten sposób miary są zgodne. Dokładniej, że dla dowolnego $j \le n$, i dowolnych borelowskich $A_1, \ldots, A_n \in S$,

$$\begin{gathered}\mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_{j-1} \times S \times A_{j+1} \times \cdots A_n) = \\ \mu_{t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1}\ldots t_n}(A_1 \times \cdots \times A_{j-1} \times A_{j+1} \times \cdots A_n).\end{gathered}$$

Wynika to z (2) dla $f_j \equiv 1$ i zastosowaniu własności półgrupy $(T_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Zastosowanie twierdzenia Kołmogorowa pozwala wywnioskować istnienie procesu o zadanych rozkładach skończenie wymiarowych. Jednakże nie daje ono żadnej kontroli nad regularnością trajektorii. Dlatego jesteśmy zmuszeni przeprowadzić dodatkową konstrukcję.

Stosując konstrukcję w poprzedniego paragrafu dla wymiernych $t$ otrzymujemy proces $(Y_q^{(x)} : q \in \mathbb{Q}_+)$ o rozkładach zadanych rozkładach skończenie wymiarowych:

$$\mathbb{P}[Y_{t_1}^{(x)} \in A_1, \ldots, Y_{t_n}^{(x)} \in A_n] = \mu_{t_1,\ldots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_n)$$

oraz taki, że $\mathbb{P}[Y_0^{(x)} = x] = 1$. Proces ten ma własność Markowa. Z definicji miary $\mu_{t_1,\ldots,t_n}$,

$$\mathbb{E}[f_1(Y_{t_1}^{(x)})\cdots f_n(Y_{t_n}^{(x)})] = \mathbb{E}[f_1(Y_{t_1}^{(x)})\cdots f_{n-1}(Y_{t_{n-1}}^{(x)})T_{t_n-t_{n-1}}f_n(Y_{n-1}^{(x)})]$$

Powyższe implikuje

$$\mathbb{E}[f_n(Y_{t_n}^{(x)})|Y_q^{(x)}, q \le t_{n-1}] = T_{t_n-t_{n-1}}f_n(Y_{t_{n-1}}^{(x)})$$

W analogiczny sposób uzasadniamy własność Markowa.

Jeśli $f \in C_0(S)$ jest nieujemna, to

$$e^{-\alpha t}T(t)U(\alpha)f = \int_t^\infty e^{-\alpha s}T(s)f\mathrm{d}s \le U(\alpha)f.$$

Stąd wynika, że $e^{-\alpha t}U(\alpha)f(Y(t))$ jest (ograniczonym) supermartingałem względem filtracji $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{Q}^+\}$, gdzie $\mathcal{F}_t$ jest generowana przez

$$(Y(s), s \in \mathbb{Q} \cap [0,t]).$$

Rzeczywiście mamy

$$\mathbb{E}[e^{-\alpha(t+s)}U(\alpha)f(Y_{t+s})|\mathcal{F}_s] = e^{-\alpha(t+s)}T_tU(\alpha)f(Y_s) \le e^{-\alpha s}U(\alpha)f(Y_s).$$

Wówczas prawdopodobieństwem jeden, prawostronne i lewostronne granice tego supermartingału wzdłuż liczb wymiernych istnieją w każdym $t \in [0,\infty)$.

Dowód twierdzenia o zbieżności nadmartynggałów sprowadza się pokazania, że w prawdopodobieństwem jeden liczba przejść w dół przez każdy przedział o końcach wymiernych jest skończona. Każda funkcja zmiennej rzeczywistej o tej własności musi mieć lewostronną i prawostronną granicę w każdym punkcie.

Dla każdej $\alpha$ i każdej nieujemnej $f$ proces $e^{-\alpha t}U(\alpha)f(Y_t)$ ma lewostronne i prawostronne granice. Oczywiście, zbiór o prawdopodobieństwie zero, na którym to się nie udaje, może zależeć od $f$ i $\alpha$. Musimy więc ograniczyć naszą uwagę do gęstego, przeliczalnego zbioru $f$ i $\alpha$, aby stwierdzić istnienie prawostronnych i lewostronnych granic procesu $Y(s)$ samego w sobie. Ponieważ $\alpha U(\alpha)f \to f$ gdy $\alpha \to \infty$, oraz $C_0(S)$ jest ośrodkową przestrzenią metryczną, możemy po prostu użyć funkcji $U(\alpha)f$, gdzie $\alpha$ jest liczbą całkowitą, oraz $f$ jest wzięte z pewnego przeliczalnego gęstego zbioru w $C_0(S)$.

Istnieje nadal jeden problem, że te prawostronne i lewostronne granice mogą być jednopunktową kompaktyfikacją $S$, i wykluczenie tego przypadku wymaga dodatkowego argumentu. Chodzi o to, żeby uzasadnić, że $Y$ nie ucieka do nieskończoności. Niech $f \in C_0(S)$ będzie ściśle dodatnie. Rozważmy supermartingał $M(t) = e^{-tU(1)f(Y(t))}$. To jest ściśle dodatnie, więc $\inf_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t]} M(s) > 0$ prawie na pewno dla każdego $t > 0$ (zadanie). Oznacza to, że z prawdopodobieństwem jeden $Y_s$ dla $s \le t$ są zawarte w zbiorze zwartym.

Wiemy teraz, że z prawdopodobieństwem jeden, $Y(s)$ ma prawostronne i lewostronne granice w każdym $t \in [0, \infty)$. Więc możemy zdefiniować

$$X(t) = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} Y(s).$$

To jest automatycznie prawostronnie ciągłe i ma lewostronne granice. Ponieważ skończenie wymiarowe rozkłady odpowiadające $T(t)$ są słabo ciągłe, $X(t)$ ma poprawne skończenie wymiarowe rozkłady. $\square$