Contents

Wykład 5: od generatora do półgrupy

2024-10-31

Piotr Dyszewski

O notacji słów kilka

Twierdzenie 0.1. *Przy oznaczeniach Twierdzenia @**??**, dla $f \in C_0(S)$ oraz $t > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n}L\right)^{-n} f = T_t f.$$

Proof. Sprawdzamy indukcyjnie, że

$$\left(I - \alpha^{-1}L\right)^{-n} f = \alpha^n U^n(\alpha) f = \int_0^\infty \alpha^n s^{n-1} e^{-\alpha s} T(s) f \, \mathrm{d}s.$$

Stąd

$$\left(I - \frac{t}{n}L\right)^{-n} f = \mathbb{E}T\left((\xi_1 + \cdots + \xi_n)t/n\right) f, \tag{1}$$

gdzie $\xi_1, \xi_2, \ldots$ są niezależnymi zmiennymi o standardowym rozkładzie wykładniczym. Zauważmy, że funkcja $(s, x) \to T(s)f(x)$ jest ciągła, więc wartość oczekiwana w (1) jest dobrze określona.

Jeśli $f \in \mathcal{D}(L)$, to

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_t f = T_t L f$$

co w notacji całkowej zapisuje się jako

$$T_t f - T_s f = \int_s^t T_r L f \mathrm{d}r.$$

Skoro $\|T_r\| \leq 1$, to ostatnia nierówność implikuje, że

$$\|T(t)f - T(s)f\| \leq \|Lf\||t - s|.$$

Wracając teraz do (1) otrzymujemy

$$\left\| \left(I - \frac{t}{n}L\right)^{-n} f - T(t)f \right\| \leq t\|Lf\|\mathbb{E}\left|\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} - 1\right|.$$

Rezultat dla $f \in \mathcal{D}(L)$ wynika teraz z prawa wielkich liczb. Jest on prawdziwy dla wszystkich $f \in C_0(S)$, ponieważ wszystkie rozważane operatory są kontrakcjami. $\square$

Remark. Formalnie, $T_t = \exp(tL)$. Kiedy L jest ograniczone, istnieją przynajmniej trzy sposoby definiowania tego wykładnika:

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{(tL)^k}{k!}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{t}{n}L\right)^n, \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{t}{n}L\right)^{-n}.$$

Ostatni z nich jest jedynym, który ma sens w przypadku nieograniczonym.

Teraz rozważmy kilka przykładów.

Zadanie 0.1. Rozważmy proces Fellera polegający na jednostajnym ruchu w prawo. Niech $S = \mathbb{R}$ i niech $\mathbf{P}_x$ jest punktową masą na ścieżce ω_x danej przez $\omega_x(t) = x + t$, lub równoważnie, proces z półgrupą $T(t)f(x) = f(x+t)$. Pokaż, że generatorem L tego procesu jest ten opisany w Zadaniu~**??**. Upewnij się, że dziedzina dana jest dokładnie przez dziedzinę L.

Przykład 0.1. W przypadku ruchu Browna, można zweryfikować, że

$$U(\lambda)f(x) = \int u_\lambda(y-x)f(y)\,dy$$

gdzie

$$u_\lambda(y-x) = \int_0^\infty (2\pi t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t} - \lambda t\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \exp(-|y-x|\sqrt{2\lambda}).$$

Elegancki sposób na uzyskanie tej ostatniej równości polega na użyciu wzoru $\mathbb{E}[e^{-\lambda T_a}] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$ dla transformaty Laplace'a czasu trafienia $a > 0$ przez rzeczywisty ruch Browna rozpoczęty z 0. Różniczkując względem λ, otrzymujemy

$$\mathbb{E}\left[T_a e^{-\lambda T_a}\right] = \frac{a}{\sqrt{2\lambda}} e^{-a\sqrt{2\lambda}},$$

i używając gęstości T_a, aby przekształcić $\mathbb{E}[T_a e^{-\lambda T_a}]$, dokładnie znajdujemy całkę, która pojawia się w obliczeniach $u_\lambda(y-x)$.

Wiemy, że półgrupa operatorów związana z ruchem Browna jest półgrupą Fellera. Znajdziemy jej generator L. Widzieliśmy, że dla każdego $\lambda > 0$ i $f \in C_0(\mathbb{R})$,

$$U(\lambda)f(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \exp(-\sqrt{2\lambda}|y-x|)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Jeśli $h \in \mathcal{D}(L)$, wiemy, że istnieje $f \in C_0(\mathbb{R})$ takie, że $h = U(\lambda)f$. Przyjmując $\lambda = 1/2$, mamy

$$h(x) = \int \exp(-|y-x|)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Różniczkując pod znakiem całki (pozostawiamy uzasadnienie jako zadanie), otrzymujemy, że h jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$, i

$$h'(x) = \int \operatorname{sgn}(y-x)\exp(-|y-x|)f(y)\,\mathrm{d}y$$

gdzie $\operatorname{sgn}(z) = 1_{\{z>0\}} - 1_{\{z<0\}}$ (wartość $\operatorname{sgn}(0)$ jest nieistotna). Pokażmy również, że h' jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Następnie, dla $x > x_0$,

$$\begin{aligned} h'(x) - h'(x_0) &= \int_{\mathbb{R}} (\operatorname{sgn}(y-x)\exp(-|y-x|) - \operatorname{sgn}(y-x_0)\exp(-|y-x_0|))\, f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{x_0}^{x} (-\exp(-|y-x|) - \exp(-|y-x_0|))\, f(y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}\setminus[x_0,x]} \operatorname{sgn}(y-x_0)\,(\exp(-|y-x|) - \exp(-|y-x_0|))\, f(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$\frac{h'(x) - h'(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x\downarrow x_0} -2f(x_0) + h(x_0).$$

Otrzymujemy tę samą granicę, gdy $x \uparrow x_0$, i stąd uzyskujemy, że h jest dwukrotnie różniczkowalna oraz $h'' = -2f + h$.

Z drugiej strony, ponieważ $h = U(1/2)f$,

$$\left(\frac{1}{2} - L\right) h = f$$

stąd $Lh = -f + h/2 = h''/2$. Podsumowując, uzyskaliśmy, że

$$\mathcal{D}(L) \subset \{h \in C^2(\mathbb{R}) : h \text{ i } h'' \in C_0(\mathbb{R})\}$$

i że, jeśli $h \in \mathcal{D}(L)$, mamy $Lh = h''/2$.

Ostatnie zawieranie jest w rzeczywistości równością. Aby to zobaczyć, możemy postąpić następująco. Jeśli g jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną taką, że g oraz g'' należą do $C_0(\mathbb{R})$, wtedy przyjmujemy $f = \frac{1}{2}(g - g'') \in C_0(\mathbb{R})$, a więc $h = U(1/2)f \in \mathcal{D}(L)$. Z poprzedniego argumentu wynika, że h jest dwukrotnie różniczkowalna oraz $h'' = -2f + h$. Stąd $(h - g)'' = h - g$. Ponieważ funkcja $h - g$ należy do $C_0(\mathbb{R})$, musi zanikać tożsamościowo, co daje $g = h \in \mathcal{D}(L)$.

Patrząc na Zadanie **??** i Przykład 0.1, można by się zastanawiać, czy pochodne wyższego rzędu mogą być generatorami infinitezymalnymi. Odpowiedź brzmi, że nie mogą. Główny problem polega na tym, że gdy gładka funkcja osiąga minimum w punkcie wewnętrznym swojej dziedziny, pierwsza pochodna jest zerowa, a druga pochodna jest tam nieujemna. Nic nie można powiedzieć o znakach innych pochodnych w tym miejscu.

Zadanie 0.2. Pokaż, że nie istnieje generator prawdopodobieństwa, którego ograniczenie do gładkich funkcji jest dane przez $Lf = f'''$.

Od generatora do procesu

W całym tym rozdziale L będzie generatorem infinitezymalnym. Naszym pierwszym zadaniem jest skonstruowanie odpowiadającej półgrupy prawdopodobieństwa. Aby to zrobić, wprowadzamy aproksymację L_ϵ do L dla małego dodatniego ϵ przez

$$L_\epsilon = L(I - \epsilon L)^{-1}.$$

Zauważmy, że jest to dobrze zdefiniowane z definicji generatora infinitezymalnego, ponieważ $\mathcal{R}(I - \epsilon L) = \mathcal{D}(L)$. To łatwo zobaczyć z

$$f - \epsilon Lf = g \quad \text{jest równoważne} \quad f = (I - \epsilon L)^{-1} g.$$

Ponadto

$$\|L_\epsilon g\| = \|Lf\| \leq \frac{\|f\| + \|g\|}{\epsilon} \leq \frac{2}{\epsilon}\|g\|,$$

więc L_ϵ jest ograniczonym operatorem. To pozwala zdefiniować $T_\epsilon(t)$ przez

$$T_\epsilon(t) = e^{tL_\epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n L_\epsilon^n}{n!}.$$

Zadanie 0.3.

- **(a)** Pokaż, że dla każdego $f \in C_0(S)$,
$$(I - \epsilon L)^{-1} f - \epsilon L f = f. \tag{2}$$
- **(b)** Użyj części (a), aby pokazać, że L_ϵ jest generatorem infinitezymalnym oraz że $T_\epsilon(t)$ jest półgrupą prawdopodobieństwa, której generatorem jest L_ϵ w sensie Twierdzenia **??**.

Twierdzenie 0.2. *Dla $f \in C_0(S)$,*

$$T(t)f = \lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon(t) f$$

jednostajnie na ograniczonych przedziałach t. Definiuje to półgrupę Fellera, której generatorem jest L w sensie Twierdzenia **??**.

Najpierw sprawdzamy, że L_ϵ i L_δ komutują dla $\epsilon, \delta > 0$. Wynika to z @ref{eq:3-19} oraz

$$(I - \epsilon L)^{-1}(I - \delta L)^{-1} = (I - \delta L)^{-1}(I - \epsilon L)^{-1},$$

co jest prawdziwe, ponieważ

$$(I - \epsilon L)^{-1}(I - \delta L)^{-1} f = g \quad \text{jest równoważne} \quad f = g - (\epsilon + \delta)Lg + \epsilon\delta L^2 g,$$

co jest symetryczne w ϵ i δ.