Contents

Wykład 4: Generatory

2024-10-24

Piotr Dyszewski

Do tej pory te definicje powinny być dość intuicyjne. Kolejna definicja może wydawać się mniej oczywista, jednak okazuje się być odpowiednim odpowiednikiem definicji macierzy Q.

Aby nakreślić analogię, biorąc macierz Q na przeliczalnym zbiorze S_0, niech p będzie funkcją przejścia zadaną jako

$$p_t = e^{tq} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} q^k.$$

Z tą funkcją wiążemy półgrupę

$$T_t f(x) = \sum_{y \in S_0} p_t(x, y) f(y),$$

a także rezolwentę

$$U(\alpha) f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f(x) \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{tq} f(x) \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{tq} \, \mathrm{d}t \, f(x).$$

Ostatnie przejście wynika z faktu, że mamy tutaj do czynienia z mnożeniem wektora przez macierz. Zauważmy, że

$$(q - \alpha I) \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{tq} \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty (q - \alpha I) e^{-\alpha t} e^{tq} \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{-\alpha t} e^{tq} \, \mathrm{d}t = -I.$$

Oznacza to, że

$$U(\alpha) f(x) = (\alpha I - q)^{-1} f(x).$$

Z własności rezolwenty wiemy, że

$$\left\| (I - \frac{1}{\alpha} q)^{-1} \right\| = \|\alpha U(\alpha)\| \leq 1.$$

Ostatnia własność rezolwenty, z której tutaj skorzystaliśmy, wynika z kontraktywności operatorów w półgrupie T ($\|T_t\| \leq 1$).

Definicja 0.1. Generator infinitezymalny na $C_0(S)$ to para uporządkowana $(L, \mathcal{D}(L))$ taka, że:

- **(GI1)** $\mathcal{D}(L)$ jest gęstą podprzestrzenią liniową $C_0(S)$.
- **(GI2)** $L \colon \mathcal{D}(L) \to C_0(S)$ jest operatorem liniowym.
- **(GI3)** Jeśli $f \in \mathcal{D}(L)$, $\lambda \geq 0$, i $f - \lambda L f = g$, to

$$\inf_{x \in S} f(x) \geq \inf_{x \in S} g(x).$$

- **(GI4)** $\mathcal{R}(I - \lambda L) = C_0(S)$ dla wszystkich dostatecznie małych $\lambda > 0$.
- **(GI5)** Dla dostatecznie małych dodatnich λ istnieje ciąg $f_n \in \mathcal{D}(L)$ (który może zależeć od λ) taki, że $g_n = f_n - \lambda L f_n$ spełnia warunek $\sup_n \|g_n\| < \infty$, i zarówno f_n, jak i g_n zbiega punktowo do 1.

Zauważmy, że własność **(GI3)** ma następującą konsekwencję:

$$f \in \mathcal{D}(L), \lambda \geq 0, f - \lambda L f = g \implies \|f\| \leq \|g\|. \tag{1}$$

Aby to zobaczyć, napiszmy:

$$\inf_{x \in S} g(x) \leq \inf_{x \in S} f(x) \leq \sup_{x \in S} f(x) \leq \sup_{x \in S} g(x),$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z **(GI3)**, gdy zastąpimy f i g odpowiednio przez $-f$ i $-g$. Oznacza to, że operator $I-\lambda L$ jest różnowartościowy. Rzeczywiście, dla $f-\lambda Lf = g = h-\lambda Lh$, mamy $\|f-h\| \le \|g-g\| = 0$. Tak więc, dla dostatecznie małych dodatnich λ, $(I-\lambda L)^{-1}$ jest dobrze określoną kontrakcją, która odwzorowuje funkcje nieujemne na funkcje nieujemne.

Ponieważ Definicja @ref{def:3-12} jest dość abstrakcyjna, pomocne może być rozważenie następującego przykładu, który okazuje się być generatorem procesu na prostej, poruszającego się w prawo z jednostkową prędkością. Zauważmy, że najtrudniejszą własnością do sprawdzenia jest **(GI4)**. Zazwyczaj tak bywa.

Zadanie 0.1. Przypuśćmy, że $S = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{D}(L) = \{f \in C_0(\mathbb{R}) : f' \in C_0(\mathbb{R})\},$$

oraz $Lf = f'$. Pokaż, że para $(L, \mathcal{D}(L))$ jest generatorem infinitezymalnym.

Od procesu do półgrupy i generatora

Oto pierwszy krok w przejściu od procesu Fellera do jego generatora.

Twierdzenie 0.1. *Niech dany będzie proces Fellera* $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$*. Dla* $t \ge 0$ *zdefiniujmy*

$$T_t f(x) = \mathbf{E}_x[f(X(t))] \tag{2}$$

dla $f \in C_0(S)$*. Wtedy* $T = (T_t)_{t\ge 0}$ *jest półgrupą Fellera.*

Proof. Własności a., d. i e. z Definicji **??** są natychmiastowe. Własność półgrupy c. wynika z własności Markowa:

$$T_{s+t}f(x) = \mathbf{E}_x f(X(s+t)) = \mathbf{E}_x[\mathbf{E}_{X(s)} f(X(t))|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}_x[T_t f(X(s))] = T_s T_t f(x).$$

Zbieżność punktowa w b. wynika z ciągłości ścieżek i ciągłości f. Aby sprawdzić wymaganą jednostajność w tej zbieżności, użyjemy rezolwenty

$$U(\alpha)f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f(x)\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)\,\mathrm{d}t\right].$$

W dowodzie równania rezolwenty (**??**), użyliśmy wspomnianej jednostajności, ponieważ całki były interpretowane jako całki funkcji o wartościach w $C_0(S)$. Jednak te same obliczenia stosują się do równania rezolwenty bez tej jednostajności, jeśli całki są interpretowane jako zwykłe całki dla ustalonego x. Aby uzasadnić zamianę kolejności całkowania, zauważmy, że $T_t f(x)$ jest jednostajnie ograniczone, prawostronnie ciągłe w t dla każdego x, a także ciągłe w x dla każdego t, zatem jest wspólnie mierzalne względem x i t.

Zbiór $\mathcal{L} = \mathcal{R}(U(\alpha))$ jest niezależny od α. Z równania rezolwenty mamy bowiem

$$U(\alpha)f = U(\beta)\left(f + (\beta-\alpha)U(\beta)f\right).$$

Jeśli $f = U(\alpha)g \in \mathcal{L}$, to

$$T_t f = \int_0^\infty e^{-\alpha s} T_{s+t} g\,\mathrm{d}s = \int_t^\infty e^{-\alpha(r-t)} T_r g\,\mathrm{d}r,$$

co zbiega jednostajnie do f gdy $t \downarrow 0$. Ponieważ każde T_t jest kontrakcją, mamy $\|T_t f - f\| \to 0$ dla wszystkich f w mocnym domknięciu $\mathrm{cl}(\mathcal{L})$. Pokażemy teraz, że wspomniane mocne domknięcie jest równe słabemu domknięciu:

$$\mathrm{wcl}(\mathcal{L}) = \{f \in C_0(S) \;:\; \exists\{f_n\}_n \subseteq \mathcal{L},\ x(f_n) \to x(f),\ \forall x \in C_0(S)^*\}.$$

Skoro zbieżność w normie implikuje zbieżność słabą, to $\mathrm{cl}(\mathcal{L}) \subseteq \mathrm{wcl}(\mathcal{L})$. Weźmy $f \notin \mathrm{cl}(\mathcal{L})$. Ponieważ $\mathcal{L}$ jest wypukły, z twierdzenia Hahna-Banacha istnieje funkcjonał liniowy μ oddzielający f od $\mathrm{cl}(\mathcal{L})$, taki że

$$\mu(f) < \inf_{g\in \mathrm{cl}(\mathcal{L})} \mu(g).$$

Funkcjonał ten dowodzi, że $f \notin \mathrm{wcl}(\mathcal{L})$.

Pozostaje pokazać, że słabe domknięcie $\mathcal{L}$ jest równe całemu $C_0(S)$. Jest tak, ponieważ $\alpha U(\alpha)f$ zbiega punktowo do f gdy $\alpha \to \infty$ dla każdego $f \in C_0(S)$. $\square$

Następnie zobaczymy, jak przejść od półgrupy do generatora.

Twierdzenie 0.2. *Przypuśćmy, że $(T_t)_{t\geq 0}$ jest półgrupą Fellera. Zdefiniujmy*

$$Lf = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)f - f}{t} \tag{3}$$

dla f z

$$\mathcal{D}(L) = \{f \in C(S) : \text{przy } t \to 0 \text{ granica } (T_t f - f)/t \text{ istnieje}\}.$$

Wtedy para $(L, (L))$ jest generatorem infinitezymalnym. Ponadto:

a. *Dla dowolnego $g \in C_0(S)$ oraz $\alpha > 0$,*

$$f = \alpha U(\alpha) g \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } f \in \mathcal{D}(L) \text{ i spełnia } f - \alpha^{-1} Lf = g. \tag{4}$$

b. *Jeśli $f \in \mathcal{D}(L)$, to $T_t f \in \mathcal{D}(L)$ dla wszystkich $t \geq 0$, jest funkcją ciągłą, różniczkowalną względem t, i spełnia*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_t f = T_t L f = L T_t f. \tag{5}$$

Proof. Przypuśćmy, że $f = \alpha U(\alpha) g$ dla pewnego $\alpha > 0$ oraz $g \in C_0(S)$. Korzystając z własności półgrupy i zmieniając zmienne jak w dowodzie Twierdzenia @ref{thm:3-15}, mamy:

$$\begin{aligned} \frac{T_t f - f}{t} &= \alpha \frac{e^{\alpha t} - 1}{t} \int_t^\infty e^{-\alpha s} T_s g \, \mathrm{d}s - \alpha \frac{1}{t} \int_0^t e^{-\alpha s} T_s g \, \mathrm{d}s \\ &\to \alpha^2 U(\alpha) g - \alpha g = \alpha f - \alpha g, \end{aligned}$$

gdy $t \downarrow 0$. Przy przejściu do granicy skorzystaliśmy z własności b. z Definicji @ref{def:3-1}. To dowodzi jednej implikacji w (4), jak również **(GI4)** w Definicji 0.1.

Ponieważ $\alpha U(\alpha) g \in \mathcal{D}(L)$ i $\alpha U(\alpha) g \to g$ gdy $\alpha \to \infty$, zbiór $\mathcal{D}(L)$ jest gęsty w $C_0(S)$. To uzasadnia **(GI1)**.

Dla $t > 0$ oraz $f \in \mathcal{D}(L)$ zdefiniujmy

$$g_t = \left(1 + \frac{\lambda}{t}\right) f - \frac{\lambda}{t} T(t) f = f - \frac{\lambda}{t} (T(t) f - f).$$

Wtedy $\lim_{t\downarrow 0} g_t = f - \lambda \mathcal{L} f$ i

$$(1 + \lambda/t) \inf_{x\in S} f(x) \geq \frac{\lambda}{t} \inf_{x\in S} T(t) f(x) + \inf_{x\in S} g_t(x) \geq \frac{\lambda}{t} \inf_{x\in S} f(x) + \inf_{x\in S} g_t(x),$$

więc własność **(GI3)** z Definicji 0.1 jest spełniona. Drugą nierówność pozostawiamy jako zadanie.

Teraz przypuśćmy, że $f - \alpha^{-1} L f = g$ dla pewnego $f \in \mathcal{D}(L)$ oraz $\alpha > 0$. Przez dowiedzioną już implikację w (4), $h = \alpha U(\alpha) g$ spełnia $h - \alpha^{-1} L h = g$, więc $f = h$ z (1). Aby sprawdzić własność **(GI5)** z Definicji 0.1, przypuśćmy, że $g_n \in C(S)$ spełniają $\sup_n \|g_n\| < \infty$, oraz że g_n i $T(t) g_n$ są zbieżne punktowo do 1 dla każdego t. Zdefiniujmy $f_n \in \mathcal{D}(L)$ przez $g_n = f_n - \lambda L f_n$. Wtedy $f_n = \alpha U(\alpha) g_n$ z (4). Ponieważ $T(t) g_n \to 1$ punktowo, to $f_n \to 1$ punktowo przez definicję $U(\alpha)$ oraz twierdzenie o zbieżności ograniczonej.

Aby udowodnić punkt (b) twierdzenia, zauważmy, że

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T(t) f = \lim_{s\to 0} \frac{T(t+s) f - T(t) f}{s} = \lim_{s\to 0} T(t) \left(\frac{T(s) f - f}{s}\right) = T(t) \mathcal{L} f = \mathcal{L} T(t) f,$$

pod warunkiem, że którakolwiek z granic istnieje, ponieważ wyrażenia w środku granic są identyczne. Środkowa granica rzeczywiście istnieje, ponieważ $f \in \mathcal{D}(L)$ oraz $T(t)$ jest kontrakcją. W związku z tym pozostałe granice również istnieją.

Skoro istnieje trzecia granica, to $T(t) f \in \mathcal{D}(L)$ oraz (5) zachodzi. Środkowe wyrażenie w (5) jest ciągłe względem t, więc $T(t) f$ jest ciągłe i różniczkowalne. $\square$