Contents

Wykład 3: procesy i półgrupy Fellera

2024-10-17

Piotr Dyszewski

W tym rozdziale S jest ośrodkową, lokalnie zwartą przestrzenią metryczną, a $C(S)$ jest przestrzenią ciągłych funkcji rzeczywistych na S. Przez $C_0(S)$ oznaczać będziemy klasę funkcji z $C(S)$ znikających w nieskończoności. Dokładniej $C_0(S)$ to zbiór funkcji f z $C(S)$ takich, że dla każdego dodatniego ϵ istnieje zwarty $K \subseteq S$ taki, że $|f(x)| \leq \epsilon$ dla $x \in S \setminus K$. Zauważmy, że jeżeli S jest zwarta, to $C_0(S) = C(S)$. Dodatkowo każda f z $C_0(S)$ jest jednostajnie ciągła, tj. dla każdego dodatniego ϵ istnieje dodatnia δ, taka, że dla każdych $x, y \in S$,

$$\mathrm{d}(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Tutaj d jest metryką na S. W obu przestrzeniach $C(S)$ i $C_0(S)$ używamy normy jednostajnej

$$\|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|,$$

co czyni $C_0(S)$ przestrzenią Banacha. Głównym powodem stosowania ciągłych funkcji zanikających w nieskończoności zamiast ograniczonych ciągłych funkcji w przypadku lokalnie zwartym jest to, że jednostajna ciągłość jest wymagana w wielu argumentach. Ograniczone funkcje ciągłe nie są zwykle jednostajnie ciągłe, podczas gdy ciągłe funkcje zanikające na nieskończoności są. Innym powodem jest to, że $C_0(S)$ jest ośrodkowa, co nie jest ogólnie prawdziwe dla przestrzeni wszystkich ograniczonych ciągłych funkcji na S.

Proces

Zaczynamy od opisu składników potrzebnych do definicji głównego obiektu zainteresowania w tym rozdziale. Konstrukcja będzie analogiczna do łańcuchów Markowa w czasie ciągłym. Niech $\Omega = D[0, \infty)$ będzie zbiorem funkcji prawostronnie ciągłych\$ $\omega : [0, \infty) \to S$ z lewymi granicami w każdym punkcie. Tak jak poprzednio dla $s, t \in \mathbb{R}_+$ połóżmy też

$$X_t(\omega) = \omega(t) \text{ oraz } (\theta_s \omega)(t) = \omega(t+s).$$

Niech $\mathcal{F}$ będzie najmniejszym σ-ciałem podzbiorów Ω względem którego wszystkie X_t dla $t \in \mathbb{R}_+$ są mierzalne.

Definicja 0.1. Procesem Fellera na S nazywamy parę uporządkowaną $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ taką, że

- **(PF1)** $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_x\}_{x \in S}$, gdzie dla każdego $x \in S$, $\mathbf{P}_x$ jest miarą probabilistyczną na $(\Omega, \mathcal{F})$ taką, że

$$\mathbf{P}_x[X_0 = x] = \mathbf{P}_x[\omega \,:\, \omega(0) = x] = 1. \tag{1}$$

- **(PF2)** $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest filtracją na Ω, względem której zmienne losowe $X(t)$ są adaptowane.
- **(PF3)** Odwzorowanie

$$x \mapsto \mathbf{E}_x \left[f(X_t) \right] \text{ jest w } C_0(S) \text{ dla wszystkich } f \in C_0(S) \text{ i } t \geq 0. \tag{2}$$

- **(PF4)** Spełniona jest własność Markowa

$$\mathbf{E}_x \left[Y \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s \right] = \mathbf{E}_{X(s)} \left[Y \right] \quad \mathbf{P}_x\text{-prawie wszędzie} \tag{3}$$

  dla wszystkich $x \in S$ oraz wszystkich ograniczonych mierzalnych Y na Ω.

Własność (2) znana jest jako własność Fellera. Innym sposobem przedstawienia części ciągłości, który wydaje się całkiem naturalny, jest to, że $x_n \to x$ w S implikuje, że rozkład X dla procesu rozpoczynającego się w x_n zbiega się słabo do tego dla procesu rozpoczynającego się w x. Własność Fellera (razem z prawostronną ciągłością trajektorii) implikuje silną własność Markowa.

Twierdzenie 0.1. *Każdy proces Fellera ma silną własność Markowa. Jeżeli* $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ *jest procesem Fellera, to dla każdej ograniczonej zmiennej* $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *oraz* $\mathbb{F}$*-czasu zatrzymania* τ *i każdego* x*,*

$$\mathbf{E}_x[Y \circ \theta_\tau \mid \mathcal{F}_\tau] = \mathbf{E}_{X(\tau)}[Y] \quad \textit{prawie na pewno } \mathbf{P}_x$$

na zdarzeniu $\{\tau < \infty\}$*.*

Zadanie 0.1. Niech $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ będzie procesem Fellera. Pokaż, że odwzorowanie

$$x \mapsto \mathbf{E}_x \left[\prod_{j=1}^{n} f_j(X_{t_j}) \right] \tag{4}$$

jest ciągłe dla dowolnego n, dowolnych $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ oraz dowolnych $f_1, \ldots, f_n \in C_0(S)$.

Twierdzenia 0.1. Rozumowanie przebiega identycznie jak w przypadku łańcuchów Markowa w czasie ciągłym. W miejscu, w którym wymagana jest ciągłość odwzorowań $x \mapsto \mathbf{E}_x[Y]$ należy powołać się na tezę Zadania 0.1. $\square$

Przykład 0.1. Niech $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie standardowym ruchem Browna określonym na przestrzeni probabilistycznej $(\Sigma, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Przypomnijmy, że oznacza to, że

1. $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$-p.w.
2. Dla dowolnych $t, s \in \mathbb{R}_+$, $t \geq s$ zmienna $B_t - B_s$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, t - s)$ o średniej zero i wariancji $t - s$.
3. Dla dowolnych $t, s \in \mathbb{R}_+$, $t \geq s$ zmienna $B_t - B_s$ jest niezależna od sigma ciała $\mathcal{G}_s^B = \sigma(B_r \,:\, r \leq s)$.
4. Odwzorowanie $t \mapsto B_t$ jest ciągłe.

Pokażemy, że ruch Browna jest procesem Fellera w myśl przyjętej przez nas definicji. Połóżmy $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s \,:\, s \leq t)$. Niech $S = \mathbb{R}$. Dla $x \in S$ zdefiniujmy $\mathbf{P}_x$ jako rozkład ruchu Browna (rozumianego jako funkcji $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$) zapoczątkowanego w punkcie x, dokładniej dla $A \in \mathcal{F}$ niech $\mathbf{P}_x[A] = \mathbb{P}[B + x \in A]$. Tutaj przez $B + x$ rozumiemy funkcję $t \mapsto B_t + x$.

Wylosowanie ścieżki ω z rozkładu $\mathbf{P}_x$ jest równoważne z wylosowaniem trajektorii ruchu Browna zapoczątkowanego w x.

Spełniona jest własność (PF1), ponieważ

$$\mathbf{P}_x[X_0 = x] = \mathbb{P}[B_0 + x = x] = 1.$$

Własność (PF2) jest spełniona wprost z definicji filtracji $\mathbb{F}$. Aby uzasadnić własność Fellera (PF3) ustalmy $f \in C_0(S)$. Ciągłość

$$x \mapsto \mathbf{E}_x\left[f(X_t)\right] = \mathbb{E}[f(B_t + x)]$$

wynika z ciągłości f oraz twierdzenia o zbieżności ograniczonej. Aby uzasadnić, że powyższe odwzorowanie jest klasy $C_0(S)$ należy pokazać, że

$$\lim_{|x| \to \infty} \mathbf{E}_x[f(X_t)] = 0.$$

Wystarczy w tym celu rozważyć oszacowanie

$$|\mathbb{E}[f(B_t + x)]| \leq \|f\| \mathbb{P}[|B_t| > |x|/2] + \sup_{|y| > |x|/2} |f(y)|.$$

Oba składniki po prawej stronie zbiegają do zera, przy czy zbieżność tego drugiego wynika z $f \in C_0(\mathbb{R})$. Własność Markowa uzasadniamy dokładnie w taki sam sposób, w jaki zrobiliśmy to dla procesu Poissona w Przykładzie @ref{exm:2-poisson}.

Zadanie 0.2. Niech $S = \mathbb{Z}$. Pokaż, że łańcuch Markowa w czasie ciągłym $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ jest procesem Fellera wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $y \in S$ i każdego $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{|x|\to\infty} \mathbf{P}_x[X_t = y] = 0.$$

Półgrupa

Chcemy teraz przedstawić odpowiednik funkcji przejścia na nieprzeliczalnej przestrzeni stanów. W naturalny sposób nasuwa się rozważenie rozkładów $\mathbf{P}_x[X_t \in \mathrm{d}y]$. Jednak na dłuższą metę język rozkładów jest nieporęczny. O wiele bardziej praktyczny jest język półgrup. Aby umotywować następną definicję, rozważmy przeliczalną przestrzeń stanów S_0 oraz funkcję przejścia p na S_0. Funkcję przejścia można zakodować w kategoriach rodziny operatorów

$$T_t f(x) = \sum_{y\in S_0} p_t(x,y) f(y), \tag{5}$$

dla $f \in C_0(S_0)$. Jasne jest, że znając T_t, a więc znając wartości $T_t f$ dla wszystkich $f \in C_0(S_0)$, znamy też funkcję przejścia $p_t(x,y)$. Wykorzystując równiania Chapmana-Kołmogorowa dostajemy dla $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned} T_{s+t} f(x) = \sum_{y\in S_0} p_{t+s}(x,y) f(y) = \sum_{y\in S_0} \sum_{z\in S_0} p_t(x,z) p_s(z,y) f(y) \\ \sum_{z\in S_0} p_t(x,z) \sum_{y\in S_0} p_s(z,y) f(y) = \sum_{z\in S_0} p_t(x,z)(T_s f)(z) = T_t(T_s(f))(x). \end{aligned}$$

Wszystkie powyższe manipulacje są dozwolone ponieważ $f \in C_0(S_0)$ jest ograniczona. Powyższa tożsamość zapisuje się jako $T_t T_s = T_t \circ T_s = T_{t+s}$. Oznacza to, że $(T_t)_{t\geq 0}$ tworzą półgrupę.

Definicja 0.2. Półgrupa Fellera to rodzina ciągłych operatorów liniowych $T = \{T_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ na $C_0(S)$ spełniających następujące własności:

a. $T_0 f = f$ dla wszystkich $f \in C_0(S)$.
b. Dla każdego $f \in C_0(S)$, $\lim_{t\to 0} T_t f = f$ w $C_0(S)$.
c. $T_{t+s} f = T_s T_t f$ dla każdego $f \in C_0(S)$.
d. $T_t f \geq 0$ dla każdego nieujemnego $f \in C_0(S)$.
e. Istnieje rodzina $f_n \in C_0(S)$, $n \in \mathbb{N}$ taka, że $\sup_n \|f_n\| < \infty$, oraz $T_t f_n$ zbiega punktowo do 1 dla każdego $t \geq 0$.

Część c. to analogia równań Chapmana-Kolmogorowa i nazywana jest własnością półgrupy. Jedną z jej konsekwencji jest to, że $T(t)$ i $T(s)$ komutują, tj. $T_t T_s = T_{t+s} = T_{s+t} = T_s T_t$. Z części d. i e. wynika, że $\|T(t)f\| \leq \|f\|$ dla wszystkich $f \in C_0(S)$, tak więc każdy $\|T\| \leq 1$. Własność b. jest znana jako mocna ciągłość. Wraz z c. i własnością kontrakcji, implikuje to, że funkcja $t \mapsto T(t)f$ z $[0,\infty)$ do $C_0(S)$ jest ciągła.

Oto ważny przykład - półgrupa Gaussa–Weierstrassa. Część b. tego ćwiczenia ilustruje powody przyjmowania funkcji w $C_0(S)$ zanikających na nieskończoności.

Zadanie 0.3. Niech $S = \mathbb{R}$ i $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ będzie ruchem Browna.

a. Pokaż, że T_t zdefiniowane przez
$$T_t f(x) = \mathbb{E}[f(B_t + x)]$$
jest półgrupą Fellera.
b. Wyjaśnij, dlaczego T nie jest mocno ciągła jako półgrupa operatorów na klasie $C_b(S)$ ograniczonych funkcji z $C(S)$.

W tym rozdziale konieczne będzie całkowanie funkcji ciągłych przyjmujących wartości w $C(S)$ względem t. Rachunek takich funkcji jest analogiczny do rachunku funkcji rzeczywistych. W tym duchu wiążemy z półgrupą jej transformata Laplace'a

$$U(\alpha)f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f \,\mathrm{d}t, \quad \alpha > 0, \tag{6}$$

która nazywana jest rezolwentą półgrupy. Funkcję $U(\alpha)f$ można interpretować jako całkę Bochnera pojawiającą się po prawej stronie (6). Można też równoważnie myśleć, że jest to funkcja $S \to \mathbb{R}$ zadana przez

$$U(\alpha)f(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f(x)\,\mathrm{d}t, \quad x \in S.$$

W każdym razie całka w (6) jest dobrze określona, ponieważ funkcja $t \mapsto e^{-\alpha t} T_t f$ jest ciągła oraz

$$\|e^{-\alpha t} T_t f\| \leq e^{-\alpha t} \|f\|.$$

Zauważmy też, że $U(\alpha)$ jest operatorem liniowym na $C_0(S)$ i spełnia

$$\|U(\alpha)f\| \leq \|f\|/\alpha.$$

Zadanie 0.4. Pokaż, że dla każdego $f \in C_0(S)$,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha U(\alpha)f = f.$$

Własność półgrupy przekłada się na następującą użyteczną relację, znaną jako równanie rezolwenty:

$$U(\alpha) - U(\beta) = (\beta - \alpha)U(\alpha)U(\beta). \tag{7}$$

Aby to sprawdzić, weźmy $\alpha \neq \beta$ i zapiszmy

$$\begin{aligned} U(\alpha)U(\beta)f = \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t U(\beta) f\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \left(\int_0^\infty e^{-\beta s} T_t T_s f\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \\ = \int_0^\infty \int_0^r e^{-\alpha t} e^{-\beta(r-t)}\,\mathrm{d}t T_r f \mathrm{d}r = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha r} - e^{-\beta r}}{\beta - \alpha} T_r f \mathrm{d}r. \end{aligned} \tag{8}$$

Jedną z konsekwencji (7) jest to, że $U(\alpha)$ i $U(\beta)$ komutują.