Stoch. modele systemów oddziuałujących 2024
zadanie domowe 1
termin: 31.10.2024

Niech $S = \mathbb{N}$. Łańcuch Markowa w czasie ciągłym $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ nazwiemy procesem gałązkowym, jeżeli

$$\mathbf{P}_n * \mathbf{P}_m = \mathbf{P}_{n+m}$$

dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$. Równoważnie, $p_t(n, \cdot) * p_t(m, \cdot) = p_t(n+m, \cdot)$, czyli

$$p_t(n+m, z) = \sum_{k=0}^{z} p_t(n, k) p_t(m, z-k), \qquad n, m, z \in \mathbb{N},$$

gdzie p jest związaną funkcją przejścia.

1. Niech $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ będzie procesem gałązkowym. Pokaż, że istnieje rodzina funkcji $\psi_t \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{R}_+$, taka, że

   $$\mathbf{E}_n \left[e^{-\alpha X_t} \right] = e^{-n\psi_t(\alpha)}, \qquad n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

   Pokaż, że te funkcje spełniają relację $\psi_t \circ \psi_s = \psi_{t+s}$.

2. Dla $t \geq 0$, niech $\{G_i(t)\}_{i \in \mathbb{N}}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym z parametrem e^{-t}, tj.

   $$\mathbb{P}\left[G_j(t) = k\right] = e^{-t}(1-e^{-t})^{k-1}, \qquad k, j \in \mathbb{N},\ k \geq 1.$$

   Dla $n, m \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy

   $$p_t(n, m) = \mathbb{P}\left[\sum_{j=1}^{n} G_j(t) = m \right].$$

   Pokaż, że p jest funkcją przejścia. Wskazówka: skorzystaj z transformaty Laplace'a.