SMUO 2024

lista 10: Model epidemii

1. Niech V będzie zbiorem przeliczalnym. Rozważmy system spinowy z generatorem infinitezymalnym postaci
$$Lf(\eta) = \sum_{x\in V} c(x,\eta)\left[f(\left(\eta^{(x)}\right) - f(\eta)\right],$$
gdzie liczby $c(x,\eta)$ dla $x \in V$ oraz $\eta \in \{0,1\}^V$ są takie, że
$$\epsilon = \inf_{x,\eta}\left[c(x,\eta) + c\left(x,\eta^{(x)}\right)\right], \quad \gamma(x,y) = \sup_{\eta}\left|c\left(x,\eta^{(x)}\right) - c(x,\eta)\right|$$
spełniają
$$M = \sup_{x\in V}\sum_{y\neq x}\gamma(x,y) < \epsilon.$$
   - Pokaż, że dla każdych $\eta,\xi \in \{0,1\}^V$ i $f \in D$ (patrzy wykład 9) mamy $|f(\eta) - f(\xi)| \le \|f\|_o$. Wywnioskuj, że $|T_tf(\eta) - T_tf(\xi)| \le e^{(M-\epsilon)t}\|f\|_o$, gdzie $(T_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest stowarzyszoną półgrupą Fellera.
   - Niech π będzie rozkładem stacjonarnym dla rozważanego procesu Fellera $(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Pokaż, że dla każdej ciągłej i rzeczywistej f na $\{0,1\}^V$ i dla każdej miary probabilistycznej ν na $\{0,1\}^V$ mamy
$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}_\nu\left[f(\eta_t)\right] = \int f(\eta)\,\pi(\mathrm{d}\eta).$$

2. Rozważmy model epidemii na grafie G. Pokaż, że jeżeli
$$1/\lambda > \max_x \deg(x),$$
to proces ten posiada tylko jedną miarę stacjonarną.

3. Niech $N = (N(t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ będzie jednorodnym procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Niech E będzie niezależną od N zmienną losową. Pokaż, że $N(t+E) - N(E)$ jest jednorodnym procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$.

4. Niech $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem iid z rozkładem wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$. Niech $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ i niech
$$\nu(t) = \inf\{k \,:\, S_k > t\}.$$
Pokaż, że dla każdego $t > 0$ zmienna $t - S_{\nu(t)-1}$ ma ten sam rozkład co $\xi_1 \wedge t$.