SMUO 2024

Lista zadań 5

2024-11-08

Piotr Dyszewski

1. Niech $S = [1, +\infty)$. Pokaż, że rodzina $T = (T_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ zadana przez

   $$T_t f(x) = \exp\left(-t/x\right) f(x) + \int_x^\infty t y^{-2} \exp\left(-t/y\right) f(y) \, \mathrm{d}y,$$

   dla $f \in C_0(S)$ jest półgrupą Fellera. Wskazówka: Znajdź probabilistyczną interpretację

   $$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_t f(x)\right|_{t=0}.$$

   Wykorzystaj ją aby zdefiniować proces Fellera $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ dla którego $T_t f(x) = \mathbf{E}_x[f(X_t)]$.

2. Znajdź generator infinitezymalny jednorodnego procesu Poissona z intensywnością $\lambda > 0$.

3. Niech $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie ruchem Browna. Pokaż, że proces stochastyczny $Y_t = B_t + t$ jest procesem Fellera. Znajdź jego generator infinitezymalny.

4. **(wzór Feynmana-Kaca)** Niech $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ będzie procesem Fellera z półgrupą $T = (T_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ i generatorem $(L, \mathcal{D}(L))$. Niech v będzie funkcją nieujemną z $C_0(S)$. Dla każdego $x \in S$ oraz $t \geq 0$, definiujemy

   $$T_t^* f(x) = \mathbf{E}_x \left[f(X_t) \exp\left(- \int_0^t v(X_s) \, \mathrm{d}s \right) \right], \quad f \in C_0(S).$$

   1. Pokaż, że $T^* = (T_t^*)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest półgrupą.
   2. Zauważ, że

      $$1 - \exp\left(- \int_0^t v(X_s) \, \mathrm{d}s \right) = \int_0^t v(X_s) \exp\left(- \int_s^t v(X_r) \, \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}s$$

      a następnie wywnioskuj, że dla $f \in C_0(S)$,

      $$T_t f - T_t^* f = \int_0^t T_s(v \, T_{t-s}^* f) \, \mathrm{d}s.$$

   3. Rozważmy $f \in \mathcal{D}(L)$. Pokaż, że

      $$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_t^* f\right|_{t=0} = Lf - vf.$$