Rachunek prawdopodobieństwa (AI)

Piotr Dyszewski

2026-06-08

Spis treści

Słowo wstępne 3

Sylabus 4
Dane dotyczące przedmiotu . . . 4
Skrócony plan wykładu . . . 4
Szczegółowy plan wykładu . . . 5
Efekty kształcenia . . . 5
Sposób weryfikacji efektów kształcenia . . . 5
Metody i kryteria oceniania . . . 6
Warunkiem zaliczenia przedmiotu . . . 6
Kryteria ocen: . . . 6

I Notatki 7

1 Wstęp 8

2 Aksjomatyka rachunku prawdopodobieństwa 9
2.1 Problem Monty'ego Halla . . . 9
2.2 Odrobina historii . . . 10
2.3 Opis doświadczenia losowego . . . 13
2.4 Miara probabilistyczna . . . 15
2.5 Problem Monty'ego Halla raz jeszcze . . . 17

3 Prawdopodobieństwo klasyczne 19
3.1 Model klasyczny . . . 19
3.2 Zliczanie wyników . . . 20
3.3 Reguła dodawania . . . 21
3.4 Reguła mnożenia . . . 23
3.5 Wariacje . . . 24
3.6 Kombinacje . . . 26
3.7 Partia pokera . . . 28
3.8 Problem urodzin . . . 29
3.9 Zasada właczeń i wyłączeń . . . 30

4 Prawdopodobieństwo warunkowe **35**
4.1 Podstawowe definicje . . . 35
4.2 Wzór na prawdopodobieństwo całkowite . . . 37
4.3 Wzór Bayesa . . . 39

5 Niezależność zdarzeń **42**
5.1 Definicje i przykłady . . . 42
5.2 Konstrukcja niezależnych eksperymentów . . . 44
5.3 Schemat Bernoulliego . . . 46

6 Zmienne losowe **47**
6.1 Rozkład zmiennej losowej . . . 48
6.2 Wartość oczekiwana . . . 55
6.3 Wariancja . . . 67

References **70**

II Listy zadań **71**

Lista 1. Przestrzenie zdarzeń elementarnych **72**

Lista 2. Prawdopodobieństwo klasyczne **75**

Lista 3. Prawdopodobieństwo warunkowe **77**
Zadania na ćwiczenia . . . 77
Zadania kartkówkowe . . . 78

Lista 4. Niezależność zdarzeń **80**
Zadania na ćwiczenia . . . 80
Zadania kartkówkowe . . . 81

Lista 5. Zmienne losowe **83**
Zadania na ćwiczenia . . . 83
Zadania kartkówkowe . . . 84

Słowo wstępne

Notatki te powstają na potrzeby kursu o tym samym tytule, zaplanowanego w semestrze zimowym roku akademickiego 2026/2027 w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego.

Notatki mają charakter roboczy i (jak wszystko we wstępnych fazach rozwoju) mogą zawierać błędy. Będę wdzięczny za zgłoszenie każdej usterki znalezionej w tekście.

Notatki są przygotowywane w Quarto, otwartym systemie do tworzenia publikacji naukowych i technicznych. Więcej informacji o Quarto można znaleźć na stronie https://quarto.org/.

Sylabus

Dane dotyczące przedmiotu

- **Nazwa przedmiotu:** Rachunek Prawdopodobieństwa (AI)
- **Jednostka oferująca przedmiot:** Instytut Matematyczny
- **Założenia:**
- **Strona www:**
- **Forma zajęć:** wykład + ćwiczenia + laboratorium
- **Punkty ECTS:** 8
- **Sprawdziany pisemne:** 26.11.2026 i 28.01.2027

Skrócony plan wykładu

W trakcie wykładu poruszymy następujące zagadnienia:

- **A) Przestrzeń probabilistyczna**: aksjomatyka rachunku prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwo warunkowe, prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa, niezależność zdarzeń;
- **B) elementy losowe**: zmienne losowe, wektory losowe, niezależne zmienne losowe;
- **C) rozkłady prawdopodobieństwa**: rozkłady zmiennych losowych, dystrybuanty, rozkłady dyskretne i absolutnie ciągłe;
- **D) parametry rozkładów**: wartość oczekiwana, wariancja, kowariancja;
- **E) twierdzenia graniczne**: prawo wielkich liczb, centralne twierdzenie graniczne.

Podstawowa literatura do wykładu:

- Mitzenmacher, M, Upfal E. (2017) Probability and Computing, Cambridge University Press
- Isaac, R. (2000). The Pleasures of Probability. Springer.
- Blitzstein, J. K, Hwang, J, (2019) Introduction to Probability, Taylor & Francis
- Grimmett, G, Stirzaker, D. (2001) Probability and Random Processes, Oxford University Press

Szczegółowy plan wykładu

Wstępny plan tematów poruszanych na poszczególnych wykładach:

1. Aksjomatyka rachunku prawdopodobieństwa (7.10.2026)
2. Prawdopodobieństwo klasyczne i prawdopodobieństwo warunkowe (14.10.2026)
3. Niezależność zdarzeń (21.10.2026)
4. Zmienne losowe i ich rozkłady. Wartośc oczekiwana (28.10.2026)
5. Wariancja. Wektory losowe (4.11.2026)
6. niezależność zmiennych losowych (18.11.2026)
7. Rozkłady warunkowe, warunkowa wartość oczekiwana i niezależność warunkowa.
8. Regresja liniowa, ilorazy wiarygodności
9. Nierówności związane z momentami, nierówności koncentracyjne, słabe prawo wielkich liczb
10. Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a
11. Zmienne losowe o ciągłych rozkładach
12. Centralne twierdzenie graniczne
13. Wielowymiarowy rozkład normalny
14. Łańcuchy Markowa
15. Zbieżność do rozkładu stacjonarnego, MCMC

Efekty kształcenia

Po wykładzie student:

1. Wymienia i definiuje podstawowe obiekty teorii prawdopodobieństwa (**A**, **B**, **C**, **D**);
2. Podaje związki między podstawowymi obiektami teorii prawdopodobieństwa (**A**, **B**, **C**, **D**);
3. Wykorzystuje narzędzia teorii prawdopodobieństwa do opisu zmiennych losowych w terminach ich rozkładu i ich parametrów (**B**, **C**, **D**);
4. Formułuje twierdzenia graniczne (**D**);
5. Stosuje twierdzenia graniczne do analizy ciągów zmiennych losowych (**B**, **E**);

Sposób weryfikacji efektów kształcenia

Na zaliczenie składać się będą:

- Aktywność na ćwiczeniach;
- Kartkówki na każdych ćwiczeniach;
- Dwa kolokwia;

Metody i kryteria oceniania

Zaliczenie ćwiczeń na sprawdzianów pisemnych. Aktywności w czasie zajęć podnosi ocenę z ćwiczeń o 1 lub 0.5. Ocena z egzaminu wystawiona jest na podstawie egzaminu pisemnego.

Warunkiem zaliczenia przedmiotu

- Uzyskanie 50% punktów za zadania stanowiące bieżącą weryfikację efektów kształcenia;
- Uzyskanie pozytywnej oceny z egzaminu stanowiącego końcową weryfikację efektów kształcenia.

Kryteria ocen:

- **(dst)** student realizuje punkty 1-3 efektów kształcenia
- **(db)** student realizuje punkty 1-4 efektów kształcenia
- **(bdb)** student realizuje punkty 1-5 efektów kształcenia

Wrocław, październik 2026 Piotr Dyszewski

Część I

Notatki

1 Wstęp

Sztuczna inteligencja i analiza danych opierają się na bardzo prostej zasadzie: na podstawie ograniczonej liczby przykładów (danych treningowych) chcemy wyciągać wnioski o zjawiskach, których nie widzimy w całości. Dane treningowe zawierają szum, błędy pomiarowe, przypadkowe odchylenia, braki oraz zależności, których często nie potrafimy bezpośrednio zaobserwować. Dlatego analiza danych nie jest jedynie rachunkiem na tabelach liczb. Jest próbą rozumowania w warunkach niepewności. Rachunek prawdopodobieństwa dostarcza języka, w którym tę niepewność można precyzyjnie opisać.

Mimo że poniższe notatki stanowią materiał do standardowego kursu z teorii prawdopodobieństwa postaramy się dobrze umotywować główny kierunek wykładu. Zaczniemy od przykładu pokazującego że losowe zaburzenia nie są problemem, a narzędziem, które można wykorzystać na swoją korzyść.

2 Aksjomatyka rachunku prawdopodobieństwa

Zanim przejdziemy do badania zjawisk losowych wprowadzimy podstawowy język teorii prawdopodobieństwa. Zaczniemy jednak od przykładu obrazującego potrzebę jego wprowadzenia.

2.1 Problem Monty'ego Halla

W latach sześćdziesiątych w stanach zjednoczonych zaczęto nadawać *Let's Make a Deal*. W teleturnieju wybrani widzowie ze studia zawierają umowy z prowadzącym. Uczestnik otrzymuje nagrodę i decyduje, czy ją zatrzymać, czy wymienić na inną, której zawartość pozostaje ukryta do momentu podjęcia decyzji.

Dopiero po odsłonięciu nagrody okazuje się, czy wymiana była korzystna, czy też uczestnik trafił na bezwartościową, żartobliwą nagrodę zwaną „zonkiem".



Rysunek 2.1: jedną z „zonkowych" nagród w wersji programu stacji CBS była żywa lama

Rozważmy następujący problem. To dla ciebie decydujący moment. Prowadzący teleturniej stawia cię przed trojgiem zamkniętych drzwi. Za jednymi z nich kryje się samochód twoich marzeń — nowy, lśniący. Za każdymi z pozostałych dwojga drzwi stoi natomiast sympatyczna, choć niezbyt lśniąca i nieco cuchnąca koza.

Masz wybrać drzwi i wygrać to, co się za nimi znajduje. Wskazujesz jedne z nich i ogłaszasz swój wybór. Wtedy prowadzący otwiera jedne z pozostałych dwojga drzwi i pokazuje kozę. Następnie pyta, czy chcesz zmienić wybór i wskazać nieotwarte drzwi, których początkowo nie wybrałeś.

Czy zmiana decyzji jest dla ciebie korzystna — zakładając oczywiście, że zależy ci na samochodzie, a nie na kozie?

Jakie jest dokładnie prawdopodobieństwo wygrania samochodu przy każdej z tych strategii? Ta popularna zagadka wywołała spore zamieszanie, gdy w 1991 roku ukazała się w prasie John (1991). Wielu czytelników, w tym także matematycy, podało błędną odpowiedź. Najczęściej twierdzono, że zmiana drzwi nie ma znaczenia, ponieważ samochód z jednakowym prawdopodobieństwem znajduje się za każdymi z dwojga nieotwartych drzwi.

Dlaczego ten problem jest tak podchwytliwy i jak należy o nim myśleć? Posłuży nam on jako wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Po przeczytaniu tego rozdziału łatwiej będzie poprawnie analizować zarówno problem samochodu i kóz, jak i wiele innych podobnych zagadnień. Zaczniemy od krótkiego omówienia teorii prawdopodobieństwa, jej znaczenia i historii.

2.2 Odrobina historii

Rachunek prawdopodobieństwa można określić jako matematyczną teorię niepewności. Jego intuicyjne podstawy są bardzo stare: już człowiek obserwujący niebo, by przewidzieć pogodę, posługiwał się prymitywnym rozumowaniem probabilistycznym. Na przykład widząc ciemne chmury, uznawał deszcz za bardziej prawdopodobny i zabierał parasol.

Takie intuicyjne szacowanie różni się jednak od formalnej teorii matematycznej. Za początek nowoczesnego rachunku prawdopodobieństwa często uznaje się XVII-wieczną korespondencję Blaise'a Pascala i Pierre'a de Fermata, dotyczącą problemów związanych z grami hazardowymi.



Rysunek 2.2: Blaise Pascal (19 czerwca 1623 – 19 sierpnia 1662) był francuskim matematykiem, fizykiem, wynalazcą, filozofem i pisarzem katolickim.



Rysunek 2.3: Pierre de Fermat (1601–1665) był francuskim prawnikiem, matematykiem amatorem i fizykiem matematycznym. Od 1631 roku pełnił funkcję radcy parlamentu, czyli ówczesnego sądu, w Tuluzie.

Kasyno jest naturalnym laboratorium prawdopodobieństwa: rozsądny gracz musi umieć oceniać ryzyko, a więc prędzej czy później sam staje się matematykiem albo korzysta z jego pomocy.

Z tych dość rozrywkowych początków wyrosła teoria stosowana dziś we wszystkich dziedzinach nauki i techniki, a także na rynkach finansowych. Szczególnego znaczenia nabrała ona w XX wieku wraz z rozwojem fizyki kwantowej.

2.3 Opis doświadczenia losowego

Za każdym razem kiedy rzucamy kością czy losujemy kartę z talii wykonujemy pewnien eksperyment losowy. W pierwszej części wykładu zajmiemy się badaniem tego typu eksperymantów. Zaczniemy od sposobu matematycznej reprezentacji wyniku naszego losowania. Każdy możliwy wynik eksperymentu nazywać będziemy zdarzeniem elementarnym. Przykładowo dla rzutu kością sześcienną zdarzeniem elementarnym będzie liczba wyrzuconych oczek, czyli dowolna z liczb 1,2, … 6. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych oznaczać będziemy przez Ω i będziemy nazywać *przestrzenią zdarzeń elementarnych*. **Zakładać będziemy, że Ω jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym**, czyli skończonym bądź nieskończonym o przeliczalnej liczbie elementów. Wówczas elementy Ω można wpisać w następujący sposób

$$\Omega = \{\omega_k \,:\, k \in \mathbb{N}\}, \qquad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

jeżeli Ω jest nieskończona oraz

$$\Omega = \{\omega_k \,:\, k \leq N\}, \qquad N \in \mathbb{N}$$

jeśli Ω jest skończona. Wybór przestrzeni Ω zależy zawsze od rodzaju eksperymentu losowego, który chcemy opisać. Na tym etapie przestrzeń zdarzeń elementarnych jest zbiorem wszystkich możliwych wyników naszego eksperymentu i nie mówi jeszcze nic o prawdopodobieństwach tych wyników.

Przykład 2.1. Powiedzmy, że nasz eksperyment losowy polega na rzucie parą kości sześciennych. Wynikiem naszego eksperymentu jest para elementów zbioru
$D = \{1, 2, ..., 6\}$. Istotne jest aby rozróżnić wyniki otrzymane na obu kościach, wszak kości nie muszą być symetryczne. Zbiorem zdarzeń elementarnych jest

$$\Omega = D^2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), ..., (6,6)\}.$$

W tym przypadku przestrzeń zdarzeń elementarnych jest skończona i składa się z $|\Omega| = 36$ elementów.

Przykład 2.2. Tym razem rzucamy monetą do momentu otrzymania orła. Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω składa się ze skończonych ciągów $\{O, R\}$ kończących się znakiem O i jednego nieskończonego ciągu R. Dokładniej

$$\Omega = \{RRRR...\} \cup \{O, RO, RRO, RRRO, ...\}.$$

Tutaj niekończony ciąg $RRR...$ opisuje scenariusz, w którym nigdy nie wyrzucimy orła.

W większości eksperymentów losowych nie interesują nas poszczególne jego wyniki, lecz pewien ich wspólny aspekt. Dla przykładu w rzucie kością sześcienną istotna dla nas może być tylko parzystość uzyskanego wyniku. Innymi słowy bardziej od poszczególnych zdarzeń elementarnych interesować nas będę ich zbiory.

Definicja 2.1. Niech Ω będzie co najwyżej przeliczalną przestrzenią zdarzeń elementarnych. *Zdarzeniem* nazywać będziemy dowolny podzbiór $A \subseteq \Omega$.

Duch wprowadzanego formalizmu wymaga od nas ścisłego definiowania zdarzeń. Należy pamiętać jednak, że formalizm nie jest celem samym w sobie. Często będziemy pozwalać sobie na definiowanie zdarzeń w sposób opisowy o ile nie będzie prowadziło to do nieścisłości.

Przykład 2.3. Wróćmy do rzutu parą kości, gdzie przestrzenią zdarzeń elementarnych jest $\Omega = D^2$. Wówczas zdarzeniem jest

$$\begin{aligned} A =& \{\text{suma oczek na obu kościach jest równa } 7\} \\ =& \{(1,6),(2,5),\dots,(6,1)\} \subseteq \Omega = D^2. \end{aligned}$$

Natomiast zbiór

$$\{(1,1),(2,2),\dots,(6,6)\}$$

jest zdarzeniem {wypadł dublet}.

Wprowadzone przez nas Definicja 2.1 zdarzenia jest niezwykle pojemna. W skutek czego jeżeli A i B są zdarzeniami, to $A \cup B$ oraz $A \cap B$ też są zdarzeniami. Pierwsze polega na tym, że zachodzi A lub B, natomiast drugie polega na tym, że jednocześnie zachodzą A i B.

Przykład 2.4. Powiedzmy, że losujemy jedną liczbę ze zbioru $\Omega = \{1,2,\dots,10\}$. Niech A będzie zdarzeniem, że wylosowana liczba jest podzielna przez 2 a B zdarzeniem, że wylosowana liczba jest podzielna przez 3. Wówczas

$$A = \{2,4,6,8\}$$

oraz

$$B = \{3,6,9\}.$$

Wtedy $A \cup B$ jest zdarzeniem, że wylosowana liczba jest podzielna przez 2 lub jest podzielna przez 3, czyli

$$A \cup B = \{2,3,4,6,8,9\}.$$

Natomiast $A \cap B$ to zdarzenie, że wylosowana liczba jest podzielna przez 6,

$$A \cap B = \{6\}.$$

Przykład 2.5. Rzucamy trzykrotnie monetą. Wtedy $\Omega = \{OOO, OOR, ORO, \dots\}$. Niech A będzie zdarzeniem, że w pierwszym rzucie wypadł orzeł. Mamy

$$A = \{OOO, OOR, ORO, ORR\}.$$

Niech B będzie zdarzeniem, że w trzech rzutach otrzymaliśmy parzystą liczbę orłów,

$$B = \{RRR, OOR, ORO, ROO\}.$$

Wtedy $A \cap B$ jest zdarzeniem, że w pierwszym rzucie otrzymaliśmy orła i łączna liczba orłów jest parzysta,

$$A \cap B = \{OOR, ORO\}.$$

Dodatkowo, jeżeli A jest zdarzeniem, to jest nie również **zdarzenie przeciwne do zdarzenia** A, zadane wzorem

$$A' = \Omega \setminus A.$$

Zdarzenie A' polega na tym, że nie zachodzi zdarzenie A. Jest jeszcze jedna relacja teoriomnogościowa, z której będziemy korzystać. Powiemy, że **zdarzenie** B **pociąga zdarzenie** A, jeżeli $B \subseteq A$.

Przykład 2.6. Powiedzmy, że rzucamy tylko jedną kością. Wówczas $\Omega = D = \{1, 2 \dots, 6\}$. Niech

$$A = \{\text{wypadła liczba parzysta}\} = \{2, 4, 6\}.$$

Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A to

$$A' = \{\text{wypadła liczba nieparzysta}\} = \{1, 3, 5\}.$$

Z kolei zdarzenie

$$B = \{\text{wypadła szóstka}\} = \{6\}$$

pociąga zdarzenie A, czyli $B \subseteq A$.

2.4 Miara probabilistyczna

Jesteśmy przyzwyczajeni do intuicyjnego mylenia o prawdopodobieństwie. Dla przykładu w eksperymencie polegającym na rzucie dwoma monetami od razu napiszemy, że

$$\mathbb{P}\left[\text{pierwszej kości wypadnie 3 a na drugiej 5}\right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

W pewnym sensie o liczbie $\mathbb{P}[A]$ myślimy jak o prawdopodobieństwie zdarzenia A opierając się na słownym opisie darzenia A. Zauważmy, że $\mathbb{P}$ staje się funkcją, która jako argumenty przyjmuje podzbiory Ω. Formalnie

$$\mathbb{P} \colon 2^{\Omega} \to [0, 1],$$

gdzie 2^{Ω} jest zbiorem potęgowym Ω, czyli zbiorem wszystkich podzbiorów Ω. Dokładniej

$$2^{\Omega} = \{B \,:\, B \subseteq \Omega\}.$$

Przykład 2.7. Załóżmy, że rzucamy monetą. Wówczas $\Omega = \{O, R\}$ oraz

$$2^{\Omega} = \{\emptyset, \{O\}, \{R\}, \{O, R\}\}.$$

Zauważmy, że jeżeli Ω ma n elementów, to 2^{Ω} ma 2^n elementów.

W wielu przypadkach wygodnie jest myśleć o zdarzeniu A jak o podzbiorze Ω a o liczbie $\mathbb{P}[A]$ jak o masie zbioru A. Przyjęta przez nas definicja będzie odzwierciedlała ten sposób myślenia.

Definicja 2.2. Niech Ω będzie co najwyżej przeliczalną przestrzenią zdarzeń elementarnych. *Funkcją prawdopodobieństwa* nazywamy odwzorowanie $p\colon \Omega \to [0, 1]$ takie, że

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1. \tag{2.1}$$

Miarą probabilistyczną nazywamy odwzorowanie $\mathbb{P}\colon 2^{\Omega} \to [0, 1]$ zadane wzorem

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{\omega \in A} p(\omega),$$

dla zdarzenia A.

W tym momencie warto zwrócić uwagę na notację pojawiającą się w Równanie 2.1 . Jeżeli Ω jest skończoną przestrzenią i $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ dla pewnego naturalnego N, to

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{k=1}^{N} p(\omega_k).$$

Jeżeli natomiast Ω jest nieskończona i $\Omega = \{\omega_k \,:\, k \in \mathbb{N}\}$, to

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} p(\omega_k).$$

Przykład 2.8. Rzucamy jedną kostką. Wówczas $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$. Jeżeli kostka jest dobrze wyważona to otrzymanie każdej liczby oczek jest jednakowo prawdopodobne. Dokładniej

$$p(1) = p(2) = \dots = p(6) = 1/6$$

jest odpowiadającą funkcją prawdopodobieństwa. Istotnie

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = p(1) + p(2) + \dots + p(6) = 1.$$

Przykładowo

$$\mathbb{P}[\text{ wypadła liczba parzysta }] = p(2) + p(4) + p(6) = 1/2.$$

Przykład 2.9. Załóżmy teraz, że rzucamy kostką, na której ktoś domalował piątą kropkę na ścianie pokazującej 4. W dalszym ciągu możemy przyjąć $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$. Tym razem jednak funkcja prawdopodobieństwa to

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(6) = 1/6$$

oraz

$$p(4) = 0, \quad p(5) = 2/6.$$

W tym wypadku

$$\mathbb{P}[\text{ wypadła liczba parzysta }] = p(2) + p(4) + p(6) = 1/3.$$

Przykład 2.10. Rzucamy parą kości sześciennych. Przyjmujemy

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,5), (6,6)\}.$$

oraz

$$p((1,1)) = \dots = p((6,6)) = 1/36.$$

Innymi słowy każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny. Rozważmy

$$\begin{aligned} A &= \{\text{ na pierwszej kości wypadła piątka}\} \\ &= \{(5,1), (5,2), \dots, (5,6)\}. \end{aligned}$$

Wtedy

$$\mathbb{P}[A] = 1/6.$$

Przykład 2.11. Rzucamy kostką aż do momentu otrzymania pierwszego orła. Wówczas $\Omega = \{R\}^{\mathbb{N}} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \{R\}^k \times \{O\}$, jak w Przykład 2.2. Funkcją prawdopodobieństwa jest $p(O) = \frac{1}{2}$, $p(OR) = \frac{1}{4}$ oraz ogólnie $p(\omega_k) = 2^{-k}$, gdzie ω_k składa się z $k-1$ reszek i orła, oraz $p(\omega_\infty) = 0$, gdzie ω_∞ składa się z samych reszek. Rzeczywiście, wystarczy sprawdzić

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = p(\omega_\infty) + \sum_{k=1}^{\infty} p(\omega_k) = 0 + 1.$$

2.5 Problem Monty'ego Halla raz jeszcze

Stosując poznany przez nas formalizm chcemy rozstrzygnąć problem wylosowania samochodu. Zaczniemy od konstrukcji odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej. Możemy przyjąć, że nagroda znajduje się za bramką z numerem 1. Natomiast bramki 2 oraz 3 zawierają zonka. Naszymi zdarzeniami elementarnymi będą pary liczb (n, k), gdzie n to numer bramki wybranej przez uczestnika, a k to numer bramki, którą odsłania prowadzący. Zauważmy, że jeżeli

początkowo wybierzemy bramkę za którą jest zonk, to prowadzący nie może odsłonić bramki z samochodem. Mamy zatem

$$\Omega = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,2)\}.$$

Jakie prawdopodobieństwo należy przypisać każdemu możliwemu zdarzeniu? Uczestnik nie ma żadnych przesłanek w której bramce jest nagroda, więc każdą z nich wybierze z takim samym prawdopodobieństwem. Mamy

$$\{\text{Uczestnik wybrał bramkę 1}\} = \{(1,2),(1,3)\}$$
$$\{\text{Uczestnik wybrał bramkę 2}\} = \{(2,3)\}$$
$$\{\text{Uczestnik wybrał bramkę 3}\} = \{(3,2)\}$$

Skoro wszystkie zdarzenia mają to samo prawdopodobieństwo, to

$$p((2,3)) = p(3,2) = p((1,2)) + p((1,3)) = 1/3.$$

W przypadku, gdy gracz wybiera bramkę 1, która kryje samochód, prowadzący musi wybrać jedną z bramek do odkrycia. Jak się zaraz okaże nie ma żadnego znaczenia w jaki sposób to robi. Możemy przyjąć $p((1,2)) = a$ i $p((1,3)) = b$ dla dowolnej pary liczb a, b takich, że $a + b = 1/3$.

Zauważmy, że wybór konkretnej strategii nie wpływa na nasz opis tego zdarzenia losowego. Niech teraz A oznacza zdarzenie, że uczestnik, który zawsze zmienia bramkę wygra samochód. Mamy

$$A = \{(2,3),(3,2)\}.$$

Wówczas

$$\mathbb{P}[A] = p((2,3)) + p((3,2)) = 2/3..$$

Niech teraz B oznacza zdarzenie, że uczestnik, który nigdy nie zmienia bramki wygra samochód. Wtedy

$$\mathbb{P}[B] = a + b = 1/3.$$

3 Prawdopodobieństwo klasyczne

Przedyskutujemy klasyczny model prawdopodobieństwa, w którym każdy możliwy wynik naszego eksperymentu jest jednakowo prawdopodobny. Dzieje się tak kiedy rzucamy symetryczną monetą lub symetryczną kostką.

3.1 Model klasyczny

Na potrzeby tego rozdziału zakładać będziemy, że rozważana przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω jest skończona. Liczbę elementów zbioru A będziemy oznaczać przez $|A|$. Spotyka się też oznaczenie $\#A$. Dla liczby naturalnej n będziemy pisać

$$[n] = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Jeżeli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to rozważana funkcja prawdopodobieństwa ma postać

$$p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

dla każdego $\omega \in \Omega$. Stąd dla każdego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ mamy

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Licznik jest liczbą wyników sprzyjających zdarzeniu A, a mianownik liczbą wszystkich możliwych wyników. Jest to dokładnie definicja prawdopodobieństwa spotykana w szkole średniej.

Przykład 3.1. Rzucamy dwukrotnie symetryczną monetą. Wówczas każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny. Przestrzenią wszystkich zdarzeń jest

$$\Omega = \{OO, OR, RO, RR\},$$

gdzie O oznacza orła, a R — reszkę. Każdy z czterech ciągów ma prawdopodobieństwo $1/4$.

Zdarzeniu „wypadł dokładnie jeden orzeł” odpowiada zbiór $\{OR, RO\}$, zatem jego prawdopodobieństwo wynosi $2/4 = 1/2$.

Możemy też zapisać wynik doświadczenia jako liczbę orłów. Otrzymamy wtedy trzy możliwości: 0, 1 i 2. **Nie są one jednak jednakowo prawdopodobne**:

# orłów	ciągi	$\mathbb{P}$
0	RR	$1/4$
1	OR, RO	$1/2$
2	OO	$1/4$

Nie ma nic złego w opisywaniu doświadczenia za pomocą liczby orłów. Błędem byłoby dopiero przypisanie każdej z tych trzech wartości prawdopodobieństwa $1/3$.

! Słowo „losowo” nie wystarcza

Zanim użyjesz modelu prawdopodobieństwa klasycznego, odpowiedz na dwa pytania:

1. Co jest zdarzeniem elementarnym?
2. Dlaczego wszystkie takie wyniki mają tę samą szansę?

To, że potrafimy wypisać kilka możliwości, nie oznacza jeszcze, że są jednakowo prawdopodobne.

Przykład 3.2. Rzucamy dwiema uczciwymi kostkami. Wynik zapisujemy jako parę (i, j), gdzie i jest wynikiem pierwszej kostki, a j — drugiej. Wtedy

$$\Omega = [6]^2, \qquad |\Omega| = 36.$$

Suma 7 pojawia się dla sześciu par:

$$(1,6),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1).$$

Jej prawdopodobieństwo wynosi więc $6/36 = 1/6$. Suma 2 odpowiada tylko parze $(1,1)$, zatem ma prawdopodobieństwo $1/36$. Możliwe sumy oczek również nie tworzą modelu klasycznego z jednakowymi wagami.

3.2 Zliczanie wyników

Przy analizie większych modeli często wypisywanie wszystkich elementów zbioru może okazać się zbyt uciążliwe. Okazuje się, że przy obliczaniu odpowiednich prawdopodobieństw nie jest to konieczne. Kluczowe jest wyznaczenie liczebności $|A|$ interesującego nas zdarzenia A. W tym celu bardzo pomocne są podstawowe schematy kombinatoryczne.

Przykład 3.3. Aby poznać liczebność zbioru nie musimy wypisywać wszystkich jego elementów.

(a) Ile liczb całkowitych w zbiorze $[100]$ jest podzielnych przez 3? Takich liczb jest $\lfloor 100/3 \rfloor = 33$.

(b) Ile elementów $[100]$ nie jest podzielnych przez 3? To proste: $100 - 33 = 67$.

(c) Ile elementów A jest podzielnych przez 3 lub przez 5, lub przez obie te liczby? Przez 3 podzielne są 33 elementy, a przez 5 podzielnych jest $\lfloor 100/5 \rfloor = 20$. Dodając te liczby, otrzymalibyśmy 53, czyli zbyt wiele: wielokrotności 15 zostałyby policzone dwukrotnie. Poprawna odpowiedź to

$$\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor = 47.$$

3.3 Reguła dodawania

Jeżeli obiekty, które chcemy policzyć, dzielą się na dwie **rozłączne** grupy $A, B \subseteq \Omega$, to

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \tag{3.1}$$

Reguła ta mówi, że sumę rozłącznych zbiorów zliczamy, zliczając każdy zbiór osobno i dodając wyniki.

Przykład 3.4. Ze zbioru liczb $\Omega = [30]$ losujemy jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie ona podzielna przez 5 lub przez 7? Niech A będzie zdarzeniem, że wylosowana liczba jest podzielna przez 5. Wtedy

$$A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}, \quad |A| = 6.$$

Dla zdarzenia B, że wylosowana liczba jest podzielna przez 7,

$$B = \{7, 14, 21\}, \quad |B| = 3.$$

Skoro $A \cap B = \emptyset$, $|A \cup B| = 9$ a co za tym idzie

$$\mathbb{P}[A \cup B] = 3/10.$$

Przykład 3.5. Rzucamy symetryczną kością dwudziestościenną. Wówczas przestrzenią zdarzeń elementarnych jest

$$\Omega = [20].$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba jest nieparzysta lub dzieli się przez 4? Dla liczby p oznaczmy zdarzenie

$$D_p = \{n \in [20] \mid n \text{ dzieli się przez } p\} \subseteq \Omega.$$

Szukamy $\mathbb{P}[N \cup D_4]$, gdzie $N = \{1, 3, \ldots, 19\}$. Zauważmy, że zdarzenia N i D_4 są rozłączne. Mamy $\mathbb{P}[N] = 1/2$ i $\mathbb{P}[D_4] = 1/4$. Stąd

$$\mathbb{P}[N \cup D_4] = \mathbb{P}[N] + \mathbb{P}[D_4] = \frac{3}{4}.$$

Podobnie jest dla rozłącznych zbiorów A_1, $A_2, \ldots, A_m$, $m \in \mathbb{N}$, o liczebnościach $n_1, \ldots, n_m$, to łącznie jest ich

$$\left| \bigcup_{j=1}^{m} A_j \right| = n_1 + \cdots + n_m. \tag{3.2}$$

Warunek rozłączności zapobiega wielokrotnemu zliczaniu tego samego obiektu.

Przykład 3.6. Ile liczb dwucyfrowych jest nieparzystych? Można policzyć parzyste i odjąć wynik od wszystkich liczb. Można również zastosować uogólnioną regułę Równanie 3.2. Niech S_k oznacza zbiór liczb dwucyfrowych o cyfrze jedności k. Wówczas szukamy

$$\begin{aligned} &|S_1 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7 \cup S_9| \\ &= |S_1| + |S_3| + |S_5| + |S_7| + |S_9|. \end{aligned}$$

Każdy z tych zbiorów ma 9 elementów [dlaczego?], więc odpowiedź brzmi $5 \cdot 9 = 45$.

Dla dowolnych skończonych zbiorów A i B mamy

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{3.3}$$

Reguła Równanie 3.3 uwzględnia możliwość dwukrotnego policzenia części wspólnej $A \cap B$. Można ją wyprowadzić z Równanie 3.1: zbiory A oraz $B \setminus A$ są rozłączne, podobnie jak $B \setminus A$ oraz $A \cap B$. Zatem

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B \setminus A|, \\ |B| &= |B \setminus A| + |A \cap B|. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} |A \cup B| + |A \cap B| &= |A| + |B \setminus A| + |A \cap B| \\ &= |A| + |B|, \end{aligned}$$

co daje Równanie 3.3 . W terminach prawdopodobieństwa klasycznego zapisuje się to jako

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B].$$

Przykład 3.7. Losujemy jedną z liczb $1, 2, \ldots 1000$ w taki sposób, że wylosowanie każdej z nich jest jednakowo prawdopodobne. Wówczas przestrzenią zdarzeń elementarnych jest

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 1000\}.$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba dzieli się przez 3 lub 5? Dla liczby p oznaczmy zdarzenie

$$D_p = \{n \in \Omega \mid n \text{ dzieli się przez } p\}.$$

Szukamy $\mathbb{P}[D_3 \cup D_5]$. Zauważmy, że

$$D_3 = \{3m \mid 1 \leq m \leq 333\},$$

więc $\mathbb{P}[D_3] = \frac{333}{1000}$. Podobnie $\mathbb{P}[D_5] = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$. Skoro $D_3 \cap D_5 = D_{15}$, to $\mathbb{P}[D_3 \cap D_5] = \frac{66}{1000} = \frac{33}{500}$. Ostatecznie

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[D_3 \cup D_5] &= \mathbb{P}[D_3] + \mathbb{P}[D_5] - \mathbb{P}[D_3 \cap D_5] \\ &= \frac{467}{1000}.\end{aligned}$$

Dla trzech zbiorów A, B, C mamy

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| =& |A| + |B| + |C| \\ &- |A \cap B| - |B \cap C| \\ &+ |A \cap B \cap C|.\end{aligned}$$

Jest to przykład ogólnego schematu który przedyskutujemy na koniec tego rozdziału.

3.4 Reguła mnożenia

Dla skończonych zbiorów $S_1, \ldots, S_k$,

$$|S_1 \times \ldots \times S_k| = \prod_{j=1}^{k} |S_j|.$$

Jeżeli wszystkie S_i są tym samym zbiorem S, otrzymujemy $|S^k| = |S|^k$.

Będziemy często korzystać z reguły mnożenia, lecz niemal nigdy z formalnego zapisu sugerowanego w jej sformułowaniu. Chcemy przede wszystkim zachęcić do myślenia o problemach jako o procesach wieloetapowych. Pierwszy element możemy wybrać na $|S_1|$ sposobów. Dla każdego takiego wyboru drugi możemy zrobić na $|S_2|$ sposobów itd. Wyobrażenie sobie takiego procesu często pomaga znaleźć rozwiązanie.

Przykład 3.8. Liczba dróg od s do f na rysunku 2(a) wynosi $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12$: pierwszą krawędź wybieramy na 3 sposoby, drugą i trzecią na 2 sposoby. Po wyborze pierwszych trzech krawędzi czwarta jest już wymuszona.

Podobne obliczenie zlicza drogi od s do f na rysunku 2(b). Można również zauważyć, że istnieje 12 dróg od s do v i 12 od v do f, więc wszystkich dróg jest $12 \cdot 12 = 144$.

Przykład 3.9. Niech S i T będą zbiorami skończonymi. Niech

$$S^T = \{f \,:\, f\colon T \to S\}.$$

Znajdziemy $|S^T|$ liczbę różnych funkcji $f\colon T \to S$. Będzie wygodnie przyjąć, że

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}, \quad T = \{t_1, \dots, t_m\},$$

gdzie $|S| = n$ and $|T| = m$. Dowolną funkcję $f\colon T \to S$ można utożsamić jednoznacznie z

$$(f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_m)).$$

Jest to element S^m. Zatem z reguły iloczynu

$$\left|S^T\right| = |S^m| = n^m.$$

3.5 Wariacje

Definicja 3.1. k-wyrazową wariancją z powtórzeniami zbioru A nazywamy dowolną funkcję $f\colon [k] \to A$.

Innymi słowy k-wyrazowa wariacja z powtórzeniami to po prostu ciąg długości k o wyrazach z A. Zauważmy, że zbiorem wszystkich k-wyrazowych wariancji z powtórzeniami zbioru A jest

$$A^k = A^{[k]} = \{f \,|\, f\colon [k] \to A\}.$$

Wniosek 3.1. *Jeżeli $|A| = n$, to dla każdego naturalnego k jest*

$$\left|A^{[k]}\right| = n^k$$

różnych wariacji z powtórzeniami zbioru A.

Przykład 3.10. W dziesięciopiętrowym budynku windą jedzie siedem osób. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie wysiądą na ostatnim piętrze? Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie wysiądą na tym samym piętrze? Zauważmy, że każdy scenariusz możemy zakodować w funkcji $f\colon [7] \to [10]$. Tutaj j-tej osobie przyporządkowujemy jedno z dziesięciu pięter, na którym wysiada. W skutek czego wszystkich możliwości jest $|[10]^7| = 10^7$. Zdarzenie, że wszyscy wysiądą na ostatnim piętrze, to

$$\{(10, 10, \dots, 10)\}.$$

Wobec czego jego prawdopodobieństwo wynosi 10^{-7}. Drugie zdarzenie, że wszyscy wysiądą na tym samym piętrze to

$$\bigcup_{k=1}^{10} A_k,$$

gdzie A_k to zdarzenie, że wszyscy wysiądą na $k$tym piętrze. Dla $k = 10$ sprawdziliśmy już, że $\mathbb{P}[A_{10}] = 10^{-7}$. Nietrudno się przekonać, że dla dowolnego $k \leq 10$, $\mathbb{P}[A_k] = 10^{-7}$. Skoro zdarzenia A_k są rozłączne, to nasze drugie zdarzenie ma prawdopodobieństwo

$$\sum_{k=1}^{10} \mathbb{P}[A_k] = 10^{-6}.$$

Definicja 3.2. k-wyrazową wariancją bez powtórzeń zbioru A nazywamy dowolną różnowartościową funkcję $f\colon [k] \to A$. Zbiór wszystkich takich funkcji oznaczamy przez

$$A^{\underline{k}} = \{f\colon [k] \to A \mid f \text{ jest 1-1}\}.$$

Dla naturalnych k, n przyjmujemy

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Jeżeli A ma n elementów, to pierwszy wyraz wariacji możemy wybrać na n sposobów, drugi na $n-1$ sposobów, trzeci na $n-2$ sposobów itd. Mamy więc

$$|A^{\underline{k}}| = n(n-1)\cdots(n-k+1) = n^{\underline{k}}.$$

Wzór ten można całkowicie formalnie wyprowadzić z reguły mnożenia poprzez znalezienie bijekcji (jakiej?) między zbiorem $A^{\underline{k}}$ a zbiorem

$$[n] \times [n-1] \times \cdots \times [n-k+1].$$

Przykład 3.11. W dziesięciopiętrowym budynku windą jedzie siedem osób. Na ile sposobów mogą one wysiąść z windy, jeżeli każda osoba wysiada na innym piętrze? Zauważmy, że każdy scenariusz możemy zakodować w równowartościowej funkcji $f\colon [7] \to [10]$, gdzie j-tej osobie przyporządkowujemy jedno z dziesięciu pięter, na którym wysiada. W skutek czego wszystkich możliwości jest $|[10]^{\underline{7}}| = 10^{\underline{7}}$.

Przykład 3.12.

(a) Dla alfabetu $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ liczba słów długości 5 wynosi $7^5 = 16\,807$, czyli $|\Sigma^5| = 16\,807$. Liczba słów bez powtarzających się liter to $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$: pierwszą literę wybieramy na 7 sposobów, drugą na 6 itd.

(b) Dla $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ liczba słów długości 2 bez powtórzeń wynosi $4 \cdot 3 = 12$. Można przedstawić te słowa za pomocą drzewa, jak na rysunku poniżej. Każda droga od początku odpowiada jednemu słowu bez powtórzeń; na przykład droga przez b do bc odpowiada słowu bc. Podobne, lecz znacznie większe drzewo można wyobrazić sobie dla obliczenia z (a), a także dla dowolnej sytuacji, w której stosujemy regułę mnożenia.

Definicja 3.3. Permutacją zbioru A nazywamy dowolną bijekcję $\sigma\colon A \to A$. Zbiór wszystkich permutacji oznaczamy przez

$$A! = \{\sigma\colon A \to A \mid \sigma \text{ jest 1-1 i na}\}$$

Zauważmy, że permutacja zbioru o $|A| = n$ elementach to n elementów wariacja zbioru A. Wobec czego

$$|A!| = n^{\underline{n}} = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Przykład 3.13.

(a) Liczba uporządkowań talii 52 kart to $52! \approx 8{,}07 \cdot 10^{67}$.

(b) Policzmy sposoby wybrania pięciu kart **ze zwracaniem**. Zliczamy uporządkowane piątki kart. Ze zwracaniem oznacza, że przed następnym losowaniem karta wraca do talii. Wyniki odpowiadają wzajemnie jednoznacznie elementom D^5, gdzie D jest zbiorem 52 kart. Reguła mnożenia daje $|D|^5 = 52^5$ możliwości.

(c) Przy wyborze **bez zwracania** wylosowana karta nie wraca do talii. Nie wszystkie piątki z D^5 są dopuszczalne: wykluczamy powtórzenia kart. Nadal stosujemy regułę mnożenia, otrzymując $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 52^{\underline{5}}$ możliwości.

3.6 Kombinacje

Gdy kolejność jest istotna używamy wariacji. Często jednak kolejność nie ma znaczenia, a wtedy zamiast ciągów trzeba liczyć nieuporządkowane zbiory.

Definicja 3.4. k-wyrazową kombinacją bez powtórzeń zbioru A nazywamy dowolny k-elementowy zbiór $B \subseteq A$. Zbiór wszystkich kombinacji bez powtórzeń oznaczamy przez

$$\binom{A}{k} = \{B \subseteq A \mid |B| = k\}.$$

Wiemy już, że zbiór n elementów ma 2^n podzbiorów. Dla $0 \leq r \leq n$ niech $\binom{n}{r}$ oznacza liczbę jego podzbiorów r-elementowych. Jest to **współczynnik dwumianowy**, czytany „n po r”, zwany także liczbą kombinacji r elementów spośród n. Oczywiście

$$\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{|A|}{k}.$$

Przykład 3.14. Policzmy ciągi zer i jedynek długości 72 zawierające dokładnie 17 jedynek. Każdy taki ciąg wyznaczamy, wybierając 17 pozycji dla jedynek spośród 72 możliwych. Liczba ciągów wynosi więc $\binom{72}{17}$. Ogólnie, liczba ciągów długości n zawierających r jedynek to $\binom{n}{r}$. Aby zakończyć przykład, potrzebujemy wartości $\binom{72}{17}$.

Twierdzenie 3.1. *Dla $0 \leq r \leq n$ zachodzi*

$$\binom{n}{r} = \frac{n^{\underline{r}}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Wybór r-elementowej wariacji zbioru n-elementowego można przeprowadzić w dwóch krokach: wybieramy podzbiór r-elementowy na $\binom{n}{r}$ sposobów, następnie porządkujemy go na $r!$ sposobów. Formalnie oznacza to, że istnieje bijekcja

$$A^{\underline{r}} \to \binom{A}{r} \times [r]!$$

Reguła mnożenia daje

$$n^{\underline{r}} = \binom{n}{r} r!$$

Przykład 3.15. Rozważmy graf bez pętli, kompletny w tym sensie, że każdą parę różnych wierzchołków łączy dokładnie jedna krawędź. Ile ma krawędzi, jeśli ma $n \geq 2$ wierzchołków? Każda krawędź wyznacza dwuelementowy podzbiór zbioru wierzchołków V i odwrotnie. Zbiory te są w bijekcji, zatem liczba krawędzi wynosi

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Twierdzenie 3.2. *Dla dowolnych rzeczywistych x_0 i x_1 oraz naturalnego n,*

$$(x_1 + x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_1^k x_0^{n-k}.$$

Poprzez wymnożenie wszystkich nawiasów

$$(x_0 + x_1)^n = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^n} x_{\epsilon(1)} \cdots x_{\epsilon(n)}$$

tutaj $\epsilon = (\epsilon(1), \epsilon(2), \ldots, \epsilon(n))$ koduje który z x_0 i x_1 został wybrany do produktu. Dokładniej $\epsilon(j) = 1$ oznacza, że z j-tego nawiasu zostało wybrane x_1 i $\epsilon(j) = 0$ oznacza, że zostało wybrane x_0. Mamy

$$\sum_{\epsilon \in \{0,1\}^n} x_{\epsilon(1)} \cdots x_{\epsilon(n)} = \sum_{k=0}^{n} |E_k| x_1^k x_0^{n-k},$$

gdzie, E_k to zbiór tych ϵ, które wybierają dokładnie k razy x_1 w trakcie wymnażania. Dokładniej

$$E_k = \{\epsilon \,:\, \epsilon(1) + ... + \epsilon(n) = k\}.$$

Pozostaje zauważyć, że

$$|E_k| = \binom{n}{k}.$$

3.7 Partia pokera

Dobrym sposobem ilustrowania tych technik jest zliczanie układów pokerowych. Talia składa się z czterech kolorów: trefli, kar, kierów i pików. Każdy kolor obejmuje 13 wartości: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K. A oznacza asa, J waleta, Q damę, a K króla. Każda wartość występuje cztery razy, po jednej karcie każdego koloru.

Ręka pokerowa jest zbiorem pięciu kart z talii 52 kart. Kolejność wyboru nie ma znaczenia. Strit składa się z pięciu kolejnych wartości, na przykład 8, 9, 10, J, Q. As może być na początku A, 2, 3, 4, 5 albo na końcu 10, J, Q, K, A. Klasyfikujemy ręce w następujące parami rozłączne grupy, wymienione od najmniej do najbardziej prawdopodobnych:

Układ	Opis
Poker królewski	10, J, Q, K, A w jednym kolorze.
Poker	Strit w jednym kolorze, który nie jest pokerem królewskim.
Kareta	Cztery karty tej samej wartości, na przykład cztery trójki i dziewiątka.
Ful	Trzy karty jednej wartości i dwie innej, na przykład trzy walety i dwie ósemki.
Kolor	Pięć kart jednego koloru, bez pokera i pokera królewskiego.
Strit	Strit, który nie jest pokerem ani pokerem królewskim.
Trójka	Trzy karty jednej wartości oraz dwie karty dwóch innych wartości.
Dwie pary	Dwie karty jednej wartości, dwie drugiej i piąta karta trzeciej wartości.
Jedna para	Dwie karty jednej wartości, jeśli ręka nie należy do żadnej wcześniejszej grupy; na przykład dwa króle, walet, dziewiątka i szóstka.
Brak układu	Żaden z powyższych układów.

Przykład 3.16.

(a) Wszystkich rąk pokerowych jest

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$
$$= 52 \cdot 17 \cdot 10 \cdot 49 \cdot 6 = 2\,598\,960.$$

(b) Ile jest fulów? Nazwijmy rękę z trzema waletami i dwiema ósemkami fulem typu $(J, 8)$. Kolejność ma znaczenie: typ $(8, J)$ oznacza trzy ósemki i dwa walety. Typy (J, J) i $(8, 8)$ są niemożliwe. Typy fulów odpowiadają więc 2-permutacjom 13 wartości kart: jest ich $13 \cdot 12$. Dla typu $(J, 8)$ trzy walety wybieramy na $\binom{4}{3} = 4$ sposoby, a dwie ósemki na $\binom{4}{2} = 6$ sposobów. Mamy $4 \cdot 6 = 24$ ręce tego typu. Rozumowanie działa dla każdego typu, więc wszystkich fulów jest $13 \cdot 12 \cdot 24 = 3744$.

(c) Ile rąk zawiera dwie pary? Typ $\{Q, 4\}$ oznacza dwie damy, dwie czwórki i kartę trzeciej wartości. Zapis zbiorowy podkreśla, że $\{Q, 4\} = \{4, Q\}$ i nie chcemy liczyć ręki dwukrotnie. Istnieje $\binom{13}{2}$ typów. Dla każdego z nich obie pary wybieramy na $\binom{4}{2}$ sposobów każdą, a piątą kartę na $52 - 8 = 44$ sposoby. Otrzymujemy

$$\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2} \cdot 44 = 123\,552.$$

(d) Ile rąk jest stritami? Najpierw liczymy także pokery i pokery królewskie. Typ strita określa jego najwyższa wartość. Może nią być 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K lub A, więc typów jest 10. Dla każdego typu mamy cztery możliwości dla każdej z pięciu kart: razem 4^5. Otrzymujemy $10 \cdot 4^5 = 10\,240$ stritów. Odejmując 4 pokery królewskie i 36 pozostałych pokerów, dostajemy 10 200 zwykłych stritów.

3.8 Problem urodzin

Ile osób powinno znaleźć się w grupie, aby prawdopodobieństwo wspólnych urodzin przynajmniej dwóch z nich przekroczyło 1/2?

Przyjmijmy uproszczony model: rok ma 365 dni, każda konfiguracja urodzin jest jednakowo prawdopodobna. Pomijamy więc lata przestępne i sezonowe różnice w częstości urodzeń.

Dla grupy k osób przestrzenią wyników jest

$$\Omega = [365]^k.$$

Niech C_k oznacza zdarzenie, że co najmniej dwie osoby mają urodziny tego samego dnia. Bezpośrednie zliczanie wyników sprzyjających C_k jest niewygodne: wspólną datę może mieć jedna para, kilka par, trzy osoby, a nawet cała grupa.

Znacznie łatwiej policzyć zdarzenie przeciwne. Dla $1 \leq k \leq 365$ wszystkie daty są różne z prawdopodobieństwem

$$\mathbb{P}(C_k^c) = \frac{365^{\underline{k}}}{365^k} = \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{365}\right).$$

Korzystając z nierówności $1 + x \leq e^x$ mamy

$$\mathbb{P}[C_k^c] \leq e^{-\frac{1}{365}} e^{-\frac{2}{365}} \cdots e^{-\frac{k-1}{365}} = e^{-\frac{k(k-1)}{730}}$$

Na to aby $\mathbb{P}[C_k^c] \leq 1/2$ wystarcza by $k(k-1) \geq 730 \log(2) \approx 505,997$, czyli $k \leq 23$.

Dla $k \geq 366$ mamy $\mathbb{P}(C_k) = 1$, ponieważ różne daty dla wszystkich osób są wtedy niemożliwe.

Liczba osób k	Prawdopodobieństwo wspólnych urodzin
10	0,1169
20	0,4114
22	0,4757
23	0,5073
30	0,7063
40	0,8912
50	0,9704

Prawdopodobieństwo rośnie wraz z liczbą osób. Porównanie wyników dla 22 i 23 osób pokazuje więc, że **najmniejsza szukana liczba to** 23.

Skąd tak niewielka liczba? Nie pytamy, czy ktoś ma urodziny w jednym z góry ustalonym dniu. Porównujemy wszystkie pary osób. W grupie 23 osób jest aż

$$\binom{23}{2} = 253$$

pary. Jest więc wiele możliwości pojawienia się zgodności. Samej liczby par nie wolno jednak po prostu podzielić przez 365: zdarzenia zgodności poszczególnych par nie są rozłączne.

3.9 Zasada właczeń i wyłączeń

Zliczanie elementów części wspólnej zbiorów, gdzie kluczowym spójnikiem jest „i", często jest łatwe. Natomiast bezpośrednie zliczanie elementów sumy zbiorów często sprawia trudność. Zasada włączeń i wyłączeń wyraża liczność sumy przez liczności odpowiednich części wspólnych.

Zasada włączeń i wyłączeń

Aby obliczyć liczność $A_1 \cup \cdots \cup A_n$, oblicz liczności wszystkich możliwych części wspólnych zbiorów z $\{A_1, \ldots, A_n\}$. Dodaj wyniki dla części wspólnych nieparzystej liczby zbiorów, a odejmij wyniki dla części wspólnych parzystej liczby zbiorów.

Dla przykładu, dla dwóch zdarzeń A, B mamy znany nam już wzór

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Dla trzech zdarzeń A, B, C,

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\ &- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ &+ |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

„Włączamy", czyli dodajemy, liczności poszczególnych zbiorów; „wyłączamy", czyli odejmujemy, części wspólne każdej pary; następnie dodajemy części wspólne każdej trójki itd.

Przykład 3.17.

(a) Policzmy liczby w $S = \{1, 2, \ldots, 2000\}$ podzielne przez 9 lub 11. Dla dodatniego k niech $D_k = \{n \in S : k \mid n\}$. Szukamy $|D_9 \cup D_{11}|$. Ponieważ $|D_k| = \lfloor 2000/k \rfloor$, mamy $|D_9| = 222$, $|D_{11}| = 181$ i $|D_9 \cap D_{11}| = |D_{99}| = 20$. Zatem $|D_9 \cup D_{11}| = 222 + 181 - 20 = 383$.

(b) Przy podzielności przez 9, 11 lub 13 trudniejsze są tylko rachunki. Ponadto $|D_{13}| = 153$, $|D_9 \cap D_{13}| = |D_{117}| = 17$, $|D_{11} \cap D_{13}| = |D_{143}| = 13$, $|D_9 \cap D_{11} \cap D_{13}| = |D_{1287}| = 1$. Stąd

$$\begin{aligned} &|D_9 \cup D_{11} \cup D_{13}| \\ &= 222 + 181 + 153 - 20 - 17 - 13 + 1 \\ &= 507. \end{aligned}$$

(c) Policzmy jeszcze liczby podzielne przez 9, 11, 13 lub 15. Trzeba uważać: na przykład $D_9 \cap D_{15} = D_{45}$, a nie D_{135}, ponieważ podzielność przez 9 i 15 jest równoważna podzielności

przez $\operatorname{lcm}(9,15) = 45$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&|D_{15}| = 133,\\
&|D_9 \cap D_{15}| = |D_{45}| = 44,\\
&|D_{11} \cap D_{15}| = |D_{165}| = 12,\\
&|D_{13} \cap D_{15}| = |D_{195}| = 10,\\
&|D_9 \cap D_{11} \cap D_{15}| = |D_{495}| = 4,\\
&|D_9 \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{585}| = 3,\\
&|D_{11} \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{2145}| = 0,\\
&|D_9 \cap D_{11} \cap D_{13} \cap D_{15}| = |D_{6435}| = 0.
\end{aligned}$$

Zasada włączeń i wyłączeń daje

$$\begin{aligned}
&|D_9 \cup D_{11} \cup D_{13} \cup D_{15}|\\
&= 222 + 181 + 153 + 133\\
&- (20 + 17 + 44 + 13 + 12 + 10)\\
&+ (1 + 4 + 3 + 0) - 0 = 581.
\end{aligned}$$

Zasada przydaje się także do zliczania części wspólnej zbiorów, których dopełnienia są łatwiejsze do opisania.

Przykład 3.18. Losujemy liczbę z $T = \{1000, 1001, \ldots, 9999\}$. Szukamy prawdopodobieństwa, że jej zapis zawiera co najmniej jedno 0, co najmniej jedną 1 i co najmniej jedną 2. Przykładami są 1072 i 2101. Łatwiej policzyć liczby, które nie zawierają określonych cyfr. Dla $k = 0, 1, 2$ niech

$$A_k = \{n \in T : \text{ zapis } n \text{ nie zawiera cyfry } k\}.$$

Wtedy poszukiwany zbiór to $A_0^c \cap A_1^c \cap A_2^c = (A_0 \cup A_1 \cup A_2)^c$, zgodnie z prawem de Morgana. Reguła mnożenia daje $|A_1| = 8 \cdot 9^3$: pierwsza cyfra nie może być zerem ani jedynką, a pozostałe nie mogą być jedynkami. Podobnie

$$\begin{aligned}
|A_0| &= 9^4 = 6561,\\
|A_1| &= |A_2| &&= 8 \cdot 9^3 = 5832,\\
|A_0 \cap A_1| &= |A_0 \cap A_2| = 8^4 = 4096,\\
|A_1 \cap A_2| &= 7 \cdot 8^3 = 3584,\\
|A_0 \cap A_1 \cap A_2| &= 7^4 = 2401.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
|A_0 \cup A_1 \cup A_2| =& 6561 + 5832 + 5832\\
&- (4096 + 4096 + 3584)\\
&+ 2401 = 8850.
\end{aligned}$$

Zdarzenie przeciwne ma $9000 - 8850 = 150$ elementów, a jego prawdopodobieństwo wynosi $150/9000 = 1/60$.

Przykład 3.19. Ustawiamy cyfry $1, 2, \ldots, 9$ w losowej kolejności. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadna nie pozostanie na naturalnym miejscu, czyli 1 na pierwszym, 2 na drugim itd.? Łatwiej policzyć zdarzenie przeciwne. Niech A_k będzie zbiorem permutacji, w których na pozycji k stoi cyfra k.

Każdy A_i ma 8! elementów: ustalamy jedną cyfrę i dowolnie porządkujemy pozostałe. Każde $A_i \cap A_j$, dla $i < j$, ma 7! elementów; każda część wspólna trzech takich zbiorów ma 6! itd. Jest 9 zbiorów A_i, $\binom{9}{2}$ par, $\binom{9}{3}$ trójek itd. Zatem

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup \cdots \cup A_9| \\ &= 9 \cdot 8! - \binom{9}{2} 7! + \binom{9}{3} 6! - \binom{9}{4} 5! \\ &+ \ldots + \binom{9}{9} 0!\end{aligned}$$

Ostatni składnik $\binom{9}{9}0! = 1$ zlicza permutację identycznościową, w której żadna cyfra się nie przesunęła. Ponieważ $\binom{9}{m}(9-m)! = 9!/m!$, dostajemy

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup \cdots \cup A_9| \\ &= 9! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots - \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} \right).\end{aligned}$$

Wszystkich permutacji jest 9!, więc prawdopodobieństwo co najmniej jednej cyfry na swoim miejscu to

$$1 - 1/2! + 1/3! - \cdots - 1/8! + 1/9!.$$

Prawdopodobieństwo, że żadna nie jest na swoim miejscu, wynosi

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!}.\end{aligned}$$

To początek szeregu dla e^{-1}, gdzie $e \approx 2{,}71828$. Odpowiedź wynosi zatem około $1/e \approx 0{,}368$.

Twierdzenie 3.3. *Dla dowolnych skończonych podzbiorów $A_1, \ldots, A_n \subseteq \Omega$,*

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{k=1}^{m} |A_k| \\ - \sum_{k,j=1, k<j}^{n} |A_k \cap A_j| &+ \ldots (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots A_n|\end{aligned}$$

Twierdzenie o dwumianie daje wzór:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \\ &= 1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \cdots + (-1)^m. \end{aligned}$$

Dla nieparzystego m łatwo dostrzec, że składniki $\binom{m}{k}$ i $\binom{m}{m-k}$ mają przeciwne znaki i się redukują. Dla parzystego m nie jest to tak oczywiste bez twierdzenia.

Wzór ten daje dowód zasady włączeń i wyłączeń. Rozważmy element należący do dokładnie m zbiorów, powiedzmy $A_1, \ldots, A_m$. W sumie liczności zbiorów zliczamy go m razy, następnie odejmujemy po jednym razie dla każdej pary, dodajemy dla każdej trójki itd. Jego łączny wkład wynosi

$$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^{m+1} \binom{m}{m} = 1.$$

Każdy element sumy został więc policzony dokładnie raz.

4 Prawdopodobieństwo warunkowe

Rozważmy przykład z finansów. W chwili 0 kupujemy europejską opcję kupna, czyli kontrakt dający prawo zakupu akcji w ustalonej chwili 1 po określonej cenie wykonania K. Interesuje nas przyszła cena akcji S_1, ponieważ wypłata z opcji wynosi $\max(S_1 - K, 0)$.

Załóżmy, że w chwili 0,8 chcemy sprzedać ten kontrakt. Dysponujemy wtedy informacją o cenie akcji na przedziale $[0, 0{,}8]$. Pytamy, jak ta informacja zmienia naszą ocenę możliwych cen w chwili 1.

Przeszłość i przyszłość można traktować jako dwie części doświadczenia losowego. Jak wiedza o pierwszej wpływa na prawdopodobieństwa wyników drugiej? Pierwszym krokiem do takich zastosowań jest zrozumienie prawdopodobieństwa warunkowego. Warunkowanie całej historii procesu wymaga bardziej zaawansowanego języka; tutaj zaczniemy od warunkowania zdarzeniem o dodatnim prawdopodobieństwie.

4.1 Podstawowe definicje

Przykład 4.1. Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami sześciennymi. Przestrzeń wyników ma postać

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2.$$

Każdej z 36 par przypisujemy prawdopodobieństwo $1/36$. Zdarzenie „suma oczek wynosi 6” to

$$A = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\},$$

więc $\mathbb{P}[A] = 5/36$.

Załóżmy teraz, że wiemy, iż na pierwszej kostce wypadło jedno oczko. Informacja ta oznacza zdarzenie

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}.$$

Po uwzględnieniu tej informacji pozostaje sześć jednakowo prawdopodobnych wyników. Tylko $(1,5)$ należy do A, zatem nowe prawdopodobieństwo wynosi $1/6$. Możemy je wyrazić za pomocą pierwotnej miary:

$$\begin{aligned}\frac{|A\cap B|}{|B|} &= \frac{|A\cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|}\\ &= \frac{\mathbb{P}[A\cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{1/36}{6/36} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Ta konstrukcja pojawia się tak często, że ma własną nazwę.

Definicja 4.1. Niech $(\Omega,\mathbb{P})$ będzie dyskretną przestrzenią probabilistyczną, a $B\subseteq\Omega$ zdarzeniem takim, że $\mathbb{P}[B]>0$. **Prawdopodobieństwem warunkowym** zdarzenia A pod warunkiem zajścia B nazywamy

$$\mathbb{P}[A\mid B] = \frac{\mathbb{P}[A\cap B]}{\mathbb{P}[B]}.$$

Przy ustalonym B funkcja $\mathbb{P}_B[A]=\mathbb{P}[A\mid B]$ jest miarą probabilistyczną na Ω. Istotnie, jeżeli przez p oznaczymy funkcję prawdopodobieństwa stowarzyszoną z wyjściową miarą probabilistyczną $\mathbb{P}$, czyli $p(\omega)=\mathbb{P}[\{\omega\}]$ dla której

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$$

Wówczas dla

$$p_B(\omega) = \begin{cases} \frac{p(\omega)}{\mathbb{P}[B]} & \omega\in B\\ 0 & \omega\notin B\end{cases}$$

mamy

$$\mathbb{P}_B[A] = \sum_{\omega\in A} p_B(\omega).$$

W szczególności

$$\mathbb{P}_B[\Omega]=1,\qquad \mathbb{P}_B[B]=1,$$

a dla parami rozłącznych $A_1,A_2,\dots,A_N$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_B\left[\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right] &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}[A_n\cap B]}{\mathbb{P}[B]}\\ &= \sum_{n=1}^{N}\mathbb{P}_B[A_n].\end{aligned}$$

Warunkowanie pozwala uwzględnić dodatkową informację. Na przykład model ryzyka może korzystać z wieku, historii zdarzeń lub charakterystyki badanego obiektu.

Przykład 4.2. Rozważamy rodzinę z dwojgiem dzieci. Przyjmujemy uproszczony model: chłopiec i dziewczynka są jednakowo prawdopodobni. Pierwsza współrzędna oznacza **starsze** dziecko, druga młodsze; c oznacza chłopca, d dziewczynkę. Wówczas

$$\Omega = \{(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}.$$

Jakie jest prawdopodobieństwo dwóch chłopców? (a) Jeśli wiemy, że starsze dziecko jest chłopcem, warunkujemy zdarzeniem $B = \{(c,c),(c,d)\}$. Otrzymujemy

$$\mathbb{P}[\{(c,c)\} \mid B] = \frac{1}{2}.$$

(b) Jeśli wiemy, że **co najmniej jedno dziecko jest chłopcem**, warunkujemy zdarzeniem $D = \{(c,c),(c,d),(d,c)\}$, więc

$$\mathbb{P}[\{(c,c)\} \mid D] = \frac{1}{3}.$$

(c) Informacja „co najmniej jedno dziecko ma na imię Franek" nie jest tym samym co informacja z (b). Załóżmy dodatkowo, że każdy chłopiec ma to imię z prawdopodobieństwem $f > 0$, że dziewczynki go nie mają i że nadawanie imion jest niezależne między dziećmi oraz od płci drugiego dziecka. Niech F oznacza co najmniej jednego Franka. W rozszerzonym modelu

$$\mathbb{P}[F \mid (c,c)] = 1 - (1-f)^2 = 2f - f^2,$$

natomiast $\mathbb{P}[F \mid (c,d)] = \mathbb{P}[F \mid (d,c)] = f$ i $\mathbb{P}[F \mid (d,d)] = 0$. Zatem

$$\mathbb{P}[(c,c) \mid F] = \frac{(2f-f^2)/4}{(2f-f^2+f+f)/4} = \frac{2-f}{4-f}.$$

Dla małego f wynik jest bliski $1/2$, a dla $f = 1$ wynosi $1/3$. Wynik zależy również od sposobu uzyskania informacji: poznanie imienia konkretnego dziecka jest innym zdarzeniem niż stwierdzenie, że co najmniej jedno nosi dane imię.

4.2 Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Definicja prawdopodobieństwa warunkowego daje **regułę mnożenia**:

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[B]\mathbb{P}[A \mid B].$$

Zdarzenia $A \cap B$ i $A \cap B^c$ są rozłączne. Jeśli $0 < \mathbb{P}[B] < 1$, to

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A] &= \mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap B^c] \\ &= \mathbb{P}[A \mid B]\mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A \mid B^c]\mathbb{P}[B^c].\end{aligned}$$

Wzór szczególnie ułatwia rachunki w doświadczeniach wieloetapowych. Uogólnijmy go na więcej zdarzeń.

Definicja 4.2. Rodzinę zdarzeń $\{B_k\}_{k\in I}$, skończoną lub przeliczalną, nazywamy **rozbiciem** przestrzeni Ω, jeżeli

$$\Omega = \bigcup_{k\in I} B_k, \qquad B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

Twierdzenie 4.1 (Wzór na prawdopodobieństwo całkowite)**.** *Jeżeli $\{B_k\}_{k\in I}$ jest skończonym lub przeliczalnym rozbiciem Ω i $\mathbb{P}[B_k] > 0$ dla każdego $k \in I$, to dla dowolnego $A \subseteq \Omega$,*

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{k\in I} \mathbb{P}[A \mid B_k]\mathbb{P}[B_k].$$

Dowód. Korzystając z rozbicia, addytywności i definicji prawdopodobieństwa warunkowego, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A] &= \mathbb{P}\left[A \cap \bigcup_{k\in I} B_k\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\bigcup_{k\in I}(A \cap B_k)\right] \\ &= \sum_{k\in I} \mathbb{P}[A \cap B_k] = \sum_{k\in I} \mathbb{P}[A \mid B_k]\mathbb{P}[B_k].\end{aligned}$$

□

Przykład 4.3. W loterii fantowej prawdopodobieństwo wyciągnięcia losu wygrywającego wynosi p, przegrywającego q, a losu „graj dalej" r, gdzie $p + q + r = 1$ i $r < 1$. Los „graj dalej" wraca do urny i pozwala na kolejne losowanie, w tych samych warunkach. Jakie jest prawdopodobieństwo ostatecznej wygranej?

Niech A, B, C oznaczają rodzaje losu w pierwszym losowaniu, a W ostateczną wygraną. Po losie „graj dalej" wracamy do sytuacji początkowej. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite daje

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[W] &= \mathbb{P}[W \mid A]p + \mathbb{P}[W \mid B]q + \mathbb{P}[W \mid C]r \\ &= p + r\mathbb{P}[W].\end{aligned}$$

Stąd

$$\mathbb{P}[W] = \frac{p}{1-r} = \frac{p}{p+q}.$$

Jeśli któryś z rodzajów losu ma prawdopodobieństwo zero, pomijamy go w rozbiciu. Warunek $r < 1$ jest istotny: dla $r = 1$ gra trwa bez końca i wygrana ma prawdopodobieństwo zero.

4.3 Wzór Bayesa

Przykład 4.4. Rozważmy hipotetyczny model testu wykrywającego chorobę. Jedna osoba na 1000 jest chora. U chorych test daje wynik dodatni z prawdopodobieństwem 99%, a u zdrowych wynik ujemny z prawdopodobieństwem 95%. Jakie jest prawdopodobieństwo dodatniego wyniku u losowej osoby?

Oznaczmy:

- C: osoba jest chora;
- $Z = C^c$: osoba jest zdrowa;
- T: wynik testu jest dodatni.

Mamy $\mathbb{P}[T \mid Z] = 0{,}05$, więc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[T] &= \mathbb{P}[T \mid Z]\mathbb{P}[Z] + \mathbb{P}[T \mid C]\mathbb{P}[C] \\ &= \frac{5}{100}\frac{999}{1000} + \frac{99}{100}\frac{1}{1000} \\ &= \frac{5094}{100000} = 0{,}05094.\end{aligned}$$

Naturalne jest teraz inne pytanie: jeśli wynik był dodatni, jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba rzeczywiście jest chora? Pytamy o stan badanego obiektu po poznaniu wyniku obserwacji. Odpowiedź daje wzór Bayesa.

Twierdzenie 4.2 (Wzór Bayesa)**.** *Niech $\{B_k\}_{k\in I}$ będzie skończonym lub przeliczalnym rozbiciem Ω z $\mathbb{P}(B_k) > 0$. Jeżeli $\mathbb{P}[A] > 0$, to dla każdego $k \in I$*

$$\mathbb{P}[B_k \mid A] = \frac{\mathbb{P}[A \mid B_k]\mathbb{P}[B_k]}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}[A \mid B_i]\mathbb{P}[B_i]}.$$

Dowód. Z definicji warunkowania i wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[B_k \mid A] &= \frac{\mathbb{P}[A \cap B_k]}{\mathbb{P}[A]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[A \mid B_k]\mathbb{P}[B_k]}{\sum_{i\in I}\mathbb{P}[A \mid B_i]\mathbb{P}[B_i]}.\end{aligned}$$

□

Dwa kierunki rachunku

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite łączy prawdopodobieństwa wyniku w różnych przypadkach. Wzór Bayesa pozwala obliczyć prawdopodobieństwa tych przypadków po poznaniu wyniku.

Przykład 4.5. Mamy 100 monet: 99 symetrycznych i jedną z orłem po obu stronach. Wybieramy monetę losowo i rzucamy nią dziesięć razy. Wszystkie wyniki to orły. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybraliśmy monetę z dwoma orłami?

Niech B_1 oznacza monetę symetryczną, B_2 monetę z dwoma orłami, a A dziesięć orłów. Zakładamy niezależność rzutów przy ustalonej monecie. Wtedy

$$\mathbb{P}[A \mid B_1] = 2^{-10}, \qquad \mathbb{P}[A \mid B_2] = 1.$$

Ze wzoru Bayesa

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[B_2 \mid A] \\
&= \frac{\mathbb{P}[A \mid B_2]\mathbb{P}[B_2]}{\mathbb{P}[A \mid B_1]\mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A \mid B_2]\mathbb{P}[B_2]} \\
&= \frac{1 \cdot \frac{1}{100}}{\frac{1}{2^{10}}\frac{99}{100} + 1 \cdot \frac{1}{100}} = \frac{1024}{1123} \approx 0{,}912.
\end{aligned}$$

Przed obserwacją prawdopodobieństwo wynosiło 1%. Dziesięć orłów zwiększa je do około 91,2%.

Przykład 4.6. Wróćmy do testu z Przykład 4.4. U losowo wybranej osoby wynik jest dodatni. Jakie jest prawdopodobieństwo choroby?

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[C \mid T] &= \frac{\mathbb{P}[T \mid C]\mathbb{P}[C]}{\mathbb{P}[T \mid Z]\mathbb{P}[Z] + \mathbb{P}[T \mid C]\mathbb{P}[C]} \\
&= \frac{\frac{99}{100}\frac{1}{1000}}{\frac{5}{100}\frac{999}{1000} + \frac{99}{100}\frac{1}{1000}} = \frac{99}{5094} \\
&\approx 0{,}01943.
\end{aligned}$$

Otrzymujemy około 1,94%. To nie jest czułość testu $\mathbb{P}(T \mid C) = 99\%$: odwrócenie warunku zmienia pytanie.

Spójrzmy na oczekiwane liczby w populacji 100 000 osób. Około 100 jest chorych, a 99 900 zdrowych. Wśród chorych oczekujemy 99 wyników dodatnich, a wśród zdrowych 4995. Łącznie daje to 5094 wyniki dodatnie.

Stan osoby	Wynik dodatni	Wynik ujemny	Razem
Chora	99	1	100
Zdrowa	4995	94 905	99 900
Razem	5094	94 906	100 000

Warto odróżniać wysoką czułość testu od prawdopodobieństwa choroby po dodatnim wyniku. Znaczenie ma także częstość choroby w badanej populacji.

5 Niezależność zdarzeń

Wróćmy do przykładu polegającego na rzucie dwoma kośćmi. Wówczas przestrzenią wyników jest $\Omega = [6]^2$ z miarą jednostajną probabilistyczną $\mathbb{P}$ na Ω. Rozważmy dwa zdarzenia

$$A = \{\text{na pierwszej kości wypadła liczba podzielna przez } 3\}$$

oraz

$$B = \{\text{na drugiej kości wypadła liczba mniejsza niż } 6\}.$$

Wtedy $\mathbb{P}[A] = 1/2$ oraz $\mathbb{P}[B] = 5/6$. Z kolei prawdopodobieństwo A pod warunkiem B wynosi

$$\mathbb{P}[A \mid B] = 1/2 = \mathbb{P}[A].$$

Innymi słowy zajście zdarzenia B nie wpływa na prawdopodobieństwo zdarzenia A. Powyższa równość może być zapisana jako

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B].$$

Zauważmy, że powyższa równość nie wymusza założenia $\mathbb{P}[B] > 0$. Własność ta okazuje się być bardzo użyteczna i często spotykana.

5.1 Definicje i przykłady

Definicja 5.1. Niech $(\Omega, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Zdarzenia A, B nazywamy **niezależnymi**, gdy

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B].$$

Zauważmy, że jeżeli $\mathbb{P}[A] = 0$ lub $\mathbb{P}[A] = 1$, to dla każdego zdarzenia B zdarzenia A i B są niezależne.

Przykład 5.1. Rzucamy kostką sześcienną. Niech A będzie zdarzeniem, że wypadnie liczba parzysta, a B zdarzeniem, że wypadnie wypadnie liczba podzielna przez 3. Wówczas oba zdarzenia są niezależne. Definiujemy przestrzeń probabilistyczną: $\Omega = [6] = \{1, 2, ... 6\}$, a $p(k) = 1/6$. Wówczas $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$, $A \cap B = \{6\}$. Mamy

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B].$$

Często z samego opisu zdarzeń nie wynika ich niezależność.

Przykład 5.2. Wybieramy losową rodzinę posiadającą n dzieci. Niech A będzie zdarzeniem, że w wybranej rodzinie jest co najwyżej jedna dziewczynka, a B będzie zdarzeniem, że w wybranej rodzinie są dziewczynki i chłopcy. Czy zdarzenia A i B są niezależne? Ω jest to zbiór ciągów o długości n i wyrazach c i d (płeć dzieci uporządkowanych wg wieku). Wtedy $|\Omega| = 2^n$. Przyjmujemy, że każdy ciąg jest jednakowo prawdopodobny. Mamy $|A| = n + 1$, $|B| = 2^n - 2$, $|A \cap B| = n$ (dokładnie jedna dziewczynka). Zauważmy, że

$$\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B] = \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^n - 2}{2^n}$$

oraz

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{n}{2^n}.$$

Zdarzenia A i B będą niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1 + n = 2^{n-1}.$$

co ma miejsce jedynie dla $n = 3$. W tym przypadku powody niezależności są czysto algebraiczne.

Definicja 5.2. Zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ nazywamy **niezależnymi**, gdy

$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \mathbb{P}[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[A_{i_k}]$$

dla każdego ciągu $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, $k = 2, 3, \ldots, n$.

Definicja 5.3. Zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ nazywamy *niezależnymi parami*, gdy dla dowolnych $i \neq j$ zdarzenia A_i i A_j są niezależne

Jeżeli zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne, to są niezależne parami. Odwrotna implikacja nie jest jednak prawdziwa.

Przykład 5.3. Rzucamy 2 razy kostką. Oznaczmy

- A - za pierwszym razem wypadła parzysta liczba oczek;
- B - za drugim razem wypadła parzysta liczba oczek;
- C - suma oczek jest parzysta;

Wówczas zdarzania A, B, C są niezależne parami, ale nie są niezależne. Rzeczywiście, mamy $A \cap B = A \cap C = B \cap C$ i $A \cap B \cap C = A \cap B$. Stąd

- $\mathbb{P}[A] = 1/2$
- $\mathbb{P}[B] = 1/2$
- $\mathbb{P}[C] = 1/2$
- $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[C \cap B] = \mathbb{P}[A \cap B \cap C] = 1/4$

Zbadanie niezależności n zdarzeń wymaga sprawdzenia $\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n - n - 1$ równań. Chcemy badać ciągi niezależnych doświadczeń (może być ich nieskończenie wiele).

5.2 Konstrukcja niezależnych eksperymentów

Rozważmy dwa eksperymenty, które wykonujemy niezależnie od siebie. Przykładowo rzucamy dwukrotnie monetą, dwukrotnie kością lub kością i monetą. Jak skonstruować przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathbb{P})$, która opisuje niezależne wykonanie tych eksperymentów?

Powiedzmy, że $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ i $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ to przestrzenie które odpowiednio opisują pierwszy i drugi eksperyment. Niech p_1 i p_2 będą stowarzyszonymi funkcjami prawdopodobieństwa. Rozważmy przestrzeń

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Wówczas wynikiem łącznego eksperymentu jest para $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, gdzie ω_1 opisuje wynik pierwszego eksperymentu a ω_2 wynik drugiego eksperymentu. Rozważmy funkcję $p\colon \Omega \to [0,1]$ zadaną przez

$$p(\omega) = p(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1)p_2(\omega_2)$$

oraz $\mathbb{P}\colon 2^\Omega \to [0,1]$ dane przez

$$\mathbb{P}[C] = \sum_{\omega \in C} p(\omega)$$

dla $C \subseteq \Omega$. Chcemy pokazać, że powyższe definiuje funkcję prawdopodobieństwa i miarę probabilistyczną na Ω. Dla dowolnych $A_1 \subseteq \Omega_1$ oraz $B_2 \subseteq \Omega_2$ mamy $A_1 \times B_2 \subseteq \Omega$ jest zdarzeniem, że w pierwszym eksperymencie zaszło A_1 a w drugim zaszło B_2. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A_1 \times B_2] &= \sum_{\omega \in A_1 \times B_2} p(\omega) \\
&= \sum_{\omega_1 \in A_1, \omega_2 \in B_2} p(\omega_1, \omega_2) \\
&= \sum_{\omega_1 \in A_1} \sum_{\omega_2 \in B_2} p(\omega_1)p_2(\omega_2) \\
&= \mathbb{P}_1[A_1]\mathbb{P}_2[B_2].
\end{aligned}$$

Jeżeli $A_1 = \Omega_1$ oraz $B_2 = \Omega_2$, to

$$\mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}_1[\Omega_1]\mathbb{P}[\Omega_2] = 1.$$

Oznacza to, że p jest funkcją prawdopodobieństwa na Ω. Każde zdarzenie $A_1 \subseteq \Omega$ możemy utożsamić z $A = A_1 \times \Omega_2$. Zdarzenie A w rozszerzonym eksperymencie mówi, że w pierwszym eksperymencie zaszło A_1. Wówczas

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}_1[A_1].$$

Podobnie dla $B_2 \subseteq \Omega_2$ mamy $B = \Omega_1 \times B_2$. Zdarzenie B w rozszerzonym eksperymencie mówi, że w drugim eksperymencie zaszło B_2. Podobnie

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}_2[A_2].$$

Wreszcie

$$A \cap B = A_1 \times B_2.$$

Oznacza to, że

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B],$$

gdzie A jest dowolnym stwierdzeniem o pierwszym eksperymencie a B jest dowolnym stwierdzeniem o drugim eskperymencie.

Przykład 5.4. Przypuśćmy, że rzucamy kostką a następnie wykonujemy niezależny rzut monetą. Wówczas

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\} \times \{O, R\}$$

z funkcją prawdopodobieństwa

$$p(k, m) = \frac{1}{12}.$$

Jeżeli rozważymy zdarzenie A, że na kości wypadła liczba parzysta a na monecie orzeł, to

$$A = \{(2, O), (4, O), (6, O)\} = \{2, 4, 6\} \times \{O\}$$

oraz

$$\mathbb{P}[A] = 1/4.$$

Zauważmy, że konstrukcja w ostatnim przykładzie jest naturalna, poniweaż zarówno kość jak i moneta są symetryczne, co prowadzi to jednakowo prawdopodobnch wyników. W przypadku niesymetrycznych wyników sytuacja na pierwszy rzut oka może nie być taka oczywista.

Przykład 5.5. Rozważmy dwie monety. Na pierwszej orzeł wypada z prawdopodobieństwem 2/3. Na drugiej orzeł wypada z prawdopodobieństwem 1/4. Wykonujemy po jednym rzucie każdą monetą. Wówczas przestrzenią wszystkich wyników jest $\Omega = \{O, R\}^2$. Mamy

$$\begin{aligned} p(O, O) &= 1/6 \\ p(O, R) &= 1/2 \\ p(R, O) &= 1/12 \\ p(R, R) &= 1/4. \end{aligned}$$

Wobec czego prawdopodobieństwo, że wypadnie co najmniej jeden orzeł wynosi 3/4.

Nasza konstrukcja uogólnia się do większej liczby zdarzeń.

Przykład 5.6. Powiedzmy, że rzucamy monetą na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem 1/4, symetryczną kostką i drugą, tym razem już symetryczną monetą. Przestrzenią zdarzeń jest

$$\Omega = \{O, R\} \times \{1, 2, \dots, 6\} \times \{O, R\}$$

z funkcją prawdopodobieństwa

$$p(O, k, m) = 1/48, \quad p(R, k, m) = 1/16.$$

5.3 Schemat Bernoulliego

Wykonano n-krotnie to samo doświadczenie, w którym prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p. Kolejne próby były niezależne. Wówczas prawdopodobieństwo sukcesu w dokładnie k próbach wynosi $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Rzeczywiście, niech

- $\Omega_i = \{0,1\}$ (1 odpowiada sukcesowi w i-tym doświadczeniu),
- $p_i(1) = p$, równoważnie $p_i(\omega_i) = p^{\omega_i}(1-p)^{1-\omega_i}$.

Wówczas $(\Omega_i, \mathbb{P}_i)$ modeluje wynik doświadczenia w i-tym kroku. Definiując jak powyżej

- $\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_n = \{0,1\}^n$,
- $p(\omega_1, ..., \omega_n) = p_1(\omega_1) \cdots p_n(\omega_n)$.

Wtedy dla $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega$ mamy

$$p(\omega) = p^{\omega_1+...+\omega_n}(1-p)^{n-(\omega_1+...+\omega_n)}.$$

Niech A_k oznacza zdarzenie osiągnięcia dokładnie k sukcesów, tj.

$$A_k = \{\omega \in \Omega : \ \omega_1 + ... + \omega_n = k\},$$

innymi słowy A_k zawiera ω zawierające dokładnie k jedynek. Stąd $|A_k| = \binom{n}{k}$ oraz

$$\mathbb{P}[A_k] = \sum_{\omega \in A_k} p(\omega) = |A_k| p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

6 Zmienne losowe

Często skonstruowana przez nas przestrzeń probabilistyczna staje się zbyt duża do efektywnej analizy. Dla przykładu w eksperymencie polegającym na rzucie dużą liczbą kości, powiedzmy siedemnastu, jest aż $6^{17} = 16926659444736$ możliwych wyników. Interesować nas może tylko suma wyrzuconych oczek. W praktyce zamiast analizować poszczególne zdarzenia elementarne wygodniej jest analizować funkcje tych zdarzeń.

Definicja 6.1. Niech Ω będzie co najwyżej przeliczalną przestrzenią zdarzeń elementarnych. *Zmienną losową* nazywamy dowolną funkcję $X\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zdefiniowaną na przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Zmienne losowe same w sobie nie upraszczają problemów probabilistycznych. Stanowią one jedynie język, którym będziemy się w przyszłości posługiwać.

Przykład 6.1. Powiedzmy, że rzucamy parą kości. Wtedy X równe sumie wyrzuconych oczek jest zmienną losową. Aby ją formalnie zdefiniować, niech $\Omega = [6] \times [6]$ będzie przestrzenią opisującą wyniki na obu kościach. Wówczas $X\colon \Omega \to \mathbb{Z}$ zadane jest wzorem $X(a, b) = a + b$.

Definicja 6.2. Powiemy, że zmienna losowa X jest dyskretna, jeżeli może przyjmować co najwyżej przeliczalnie wiele różnych wartości.

Wszystkie rozważane przez nas przestrzenie probabilistyczne są co najwyżej przeliczalne, więc wszystkie aktualnie rozważane zmienne losowe są dyskretne. Wartości, które może przyjąć zmienna losowa $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ będziemy oznaczać przez x_k. Dokładniej $X[\Omega] = \{x_k \,:\, k \leq T\}$ dla $T \in \mathbb{N}$ jeżeli Ω jest skończona lub $T = \infty$ jeżeli Ω jest przeliczalna. Dla każdego ustalonego x_k definiujemy zdarzenie, że X jest równe x_k przez

$$\{X = x_k\} = X^{-1}[\{x_k\}] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_k\}.$$

W przyszłości zobaczymy, że liczby $\mathbb{P}[X = x_k]$ pomogą znaleźć uproszczony język do opisu zmiennej losowej X.

Przykład 6.2. W grze w kości, dla X równej sumie wyrzuconych oczek mamy $\Omega = [6] \times [6]$ oraz $X(a, b) = a + b$. Załóżmy, że wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne. Wówczas

$$\mathbb{P}[X = 5] = \frac{4}{36}.$$

Przykład 6.3. Rzucamy monetą aż do momentu otrzymania orła. Wówczas $\Omega = \{R\}^{\mathbb{N}} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \{R\}^k \times \{O\}$. Niech X oznacza liczbę rzutów w naszym eksperymencie. Innymi słowy X jest liczbą rzutów potrzebną do otrzymania orła. Wówczas $X(O) = 1$, $X(RO) = 2$ oraz ogólnie $X(\omega_k) = k$ jeżeli ω_k składa się z $k-1$ reszek i orła. W szczególności $X(\omega_\infty) = \infty$.

6.1 Rozkład zmiennej losowej

W sytuacjach kiedy nie ma żadnych niejasności nie jest konieczne dokładne konstruowanie przestrzeni probabilistycznej.

Przykład 6.4. Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu otrzymania pierwszego orła. Jakie jest prawdopodobieństwo o=wykonania parzystej liczby rzutów? Niech X oznacza liczbę wykonanych rzutów. Wówczas

$$\mathbb{P}[X \text{ jest parzyste}] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X = 2k] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{3}.$$

Zauważmy, że nie była konieczna konstrukcja przestrzeni probabilistycznej. Kluczowa okazała się być znajomość liczb $\mathbb{P}[X = j]$.

Definicja 6.3. Niech $(\Omega, \mathbb{P})$ będzie dyskretną przestrzenią probabilistyczną. Rozkładem zmiennej losowej X nazywamy funkcję $\mu_X \colon \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \to [0,1]$ daną przez $\mu_X(x) = \mathbb{P}[X = x]$.

Przykład 6.5 (Rozkład dwumianowy)**.** Niech $n \in \mathbb{N}$ i $p \in [0,1]$. Powiemy, że zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy z parametrami n i p jeżeli

$$\mathbb{P}[X = k] = p^k (1-p)^{n-k} \binom{n}{k}$$

dla $k = 0, 1, \ldots n$. Wówczas X możemy interpretować jako liczbę sukcesów w n niezależnych próbach Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p.

```
//| echo: false

viewof bernN = Inputs.range([1, 50], {
  value: 10,
  step: 1,
  label: "n"
})

viewof bernP = Inputs.range([0, 1], {
```

```
  value: 0.5,
  step: 0.01,
  label: "p",
  format: x => x.toFixed(2)
})

bernChart = {
  const n = bernN;
  const p = bernP;

  function binom(n, k) {
    let result = 1;
    for (let i = 1; i <= k; i++) {
      result *= (n - i + 1) / i;
    }
    return result;
  }

  const data = Array.from({length: n + 1}, (_, k) => ({
    k: k,
    prob: binom(n, k) * p ** k * (1 - p) ** (n - k)
  }));

  const maxProb = Math.max(...data.map(d => d.prob));

  const marks = [
    Plot.barY(data, {
      x: "k",
      y: "prob",
      fill: "var(--bs-primary)",
      inset: n <= 20 ? 5 : 1,
      title: d => `k=${d.k}, P(X=k)=${d.prob.toFixed(4)}`
    })
  ];

  if (n <= 20) {
    marks.push(
      Plot.text(data.filter(d => d.prob >= 0.005), {
        x: "k",
        y: "prob",
        text: d => d.prob.toFixed(2),
        dy: -10,
```

```
      fontSize: 12,
      fill: "currentColor"
    })
  );
}

marks.push(
  Plot.ruleY([0], {
    stroke: "currentColor",
    strokeOpacity: 0.4
  })
);

const chart = Plot.plot({
  width: 720,
  height: 360,
  marginTop: 50,
  marginBottom: 45,

  //title: `Rozkład B(n=${n}, p=${p.toFixed(2)})`,

  x: {
    type: "band",
    domain: data.map(d => d.k),
    tickFormat: k => n > 20 && k % 5 !== 0 ? "" : k,
    label: "Liczba sukcesów"
  },

  y: {
    domain: [0, maxProb * 1.2],
    label: "Prawdopodobieństwo",
    grid: true,
    nice: true
  },

  marks: marks,

  style: {
    background: "transparent",
    color: "var(--bs-body-color)",
    fontSize: "13px"
  }
```

```
  });

  chart.style.maxWidth = "100%";
  chart.style.height = "auto";

  return chart;
}
```

Przykład 6.6. Niech $p \in (0,1)$. Powiemy, że X ma rozkład geometryczny z prawdopodobieństwem sukcesu p jeżeli

$$\mathbb{P}[X = k] = (1-p)^{k-1}p$$

dla $k = 1, 2, \ldots$. Zmienną X możemy interpretować jako moment pierwszego sukcesu w nieskończonym ciągu prób Bernoulliego.

```
//| echo: false

viewof geoP = Inputs.range([0.01, 1], {
  value: 0.3,
  step: 0.01,
  label: "p",
  format: x => x.toFixed(2)
})

geoChart = {
  const p = geoP;
  const m = 60;

  const data = Array.from({length: m}, (_, i) => ({
    k: i + 1,
    prob: p * (1 - p) ** i
  }));

  const marks = [
    Plot.barY(data, {
      x: "k",
      y: "prob",
      fill: "var(--bs-primary)",
      inset: 1,
      title: d => `k=${d.k}, P(X=k)=${d.prob.toFixed(4)}`
    }),
```

```
    Plot.ruleY([0], {
      stroke: "currentColor",
      strokeOpacity: 0.4
    })
  ];

  const chart = Plot.plot({
    width: 720,
    height: 360,
    marginTop: 50,
    marginBottom: 45,


    x: {
      type: "band",
      domain: data.map(d => d.k),
      tickFormat: k => k % 5 === 0 ? k : "",
      label: "Numer pierwszej udanej próby"
    },

    y: {
      domain: [0, p * 1.2],
      label: "Prawdopodobieństwo",
      grid: true,
      nice: true
    },

    marks: marks,

    style: {
      background: "transparent",
      color: "var(--bs-body-color)",
      fontSize: "13px"
    }
  });

  chart.style.maxWidth = "100%";
  chart.style.height = "auto";

  return chart;
}
```

Powiedzmy, że wykonujemy n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $p = \lambda/n$ dla pewnego $\lambda > 0$. Co się dzieje gdy $n \to \infty$? Liczba prób jest coraz większa, ale prawdopodobieństwo sukcesu jest coraz mniejsze. Prawdopodobieństwo, że otrzymamy dokładnie k sukcesów wynosi

$$\binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Gdy $n \to \infty$ to

$$\frac{n^{\underline{k}}}{n^k} \to 1$$

oraz

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \to e^{-\lambda}.$$

Zatem prawdopodobieństwo, że otrzymamy dokładnie k sukcesów dąży do

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Przykład 6.7. Niech $\lambda > 0$. Powiemy, że zmienne losowa X ma rozkład Poissona z parametrem λ jeżeli

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

dla $k = 0, 1, ...$

```
//| echo: false

viewof poisLambda = Inputs.range([0.1, 40], {
  value: 5,
  step: 0.1,
  label: "Parametr  ",
  format: x => x.toFixed(1)
})

poisChart = {
  const lambda = poisLambda;
  const m = 60;

  // Obliczamy prawdopodobieństwa rekurencyjnie
  const data = [];
  let prob = Math.exp(-lambda);

  for (let k = 0; k <= m; k++) {
    data.push({k: k, prob: prob});
```

```
  prob *= lambda / (k + 1);
}

const maxProb = Math.max(...data.map(d => d.prob));

const marks = [
  Plot.barY(data, {
    x: "k",
    y: "prob",
    fill: "var(--bs-primary)",
    inset: 1,
    title: d => `k=${d.k}, P(X=k)=${d.prob.toFixed(5)}`
  }),

  Plot.ruleY([0], {
    stroke: "currentColor",
    strokeOpacity: 0.4
  })
];

const chart = Plot.plot({
  width: 720,
  height: 360,
  marginTop: 50,
  marginBottom: 45,

  x: {
    type: "band",
    domain: data.map(d => d.k),
    tickFormat: k => k % 5 === 0 ? k : "",
    label: "Liczba zdarzeń"
  },

  y: {
    domain: [0, maxProb * 1.2],
    label: "Prawdopodobieństwo",
    grid: true,
    nice: true
  },

  marks: marks,
```

```
    style: {
      background: "transparent",
      color: "var(--bs-body-color)",
      fontSize: "13px"
    }
  });

  chart.style.maxWidth = "100%";
  chart.style.height = "auto";

  return chart;
}
```

6.2 Wartość oczekiwana

Najprostszym opisem zmiennej losowej X byłaby jedna liczba. Aby umotywować nasz przyszły wybór rozważmy następujący przykład. Powiedzmy, że mamy do dyspozycji niesymetryczną kostkę sześcienną na której 1 wypada z prawdopodobieństwem p_1, 2 wypada z prawdopodobieństwem p_2 itd. gdzie $p_1 + p_2 + ... + p_6 = 1$. Rzucamy tą kością $N \in \mathbb{N}$. Jaka będzie średnia z uzyskanych wyników? Niech X_k dla $k \leq N$ opisuje wynik k-tego rzutu. Załóżmy, że w naszym eksperymencie n_1 razy wpadła 1, n_2 razy wypadła 2 itd. Szukaną średnią możemy zapisać jako

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_N}{N} = 1 \cdot \frac{n_1}{N} + 2 \cdot \frac{n_2}{N} + 3 \cdot \frac{n_3}{N} + 4 \cdot \frac{n_4}{N} + 5 \cdot \frac{n_5}{N} + 6 \cdot \frac{n_6}{N},$$

gdzie $n_k = |\{j \leq N : X_j = k\}|$ dla $k \in [6]$. Na poziomie intuicyjnym jasne jest, że dla dużego N, $\frac{n_k}{N} \approx p_k$. W przyszłości ściśle uzasadnimy ten fakt. Mamy

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_N}{N} \approx 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 + 5 \cdot p_5 + 6 \cdot p_6.$$

Liczba po prawej stronie to średnia ważona dla rzutu jedną kością. Istotnie, mamy $\mathbb{P}[X_1 = 1] = p_1$, $\mathbb{P}[X_1 = 2] = p_2$, ..., $\mathbb{P}[X_1 = 6] = p_6$. Możemy wreszcie napisać

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_N}{N} \approx \sum_{k=1}^{6} k \cdot \mathbb{P}[X_1 = k]. \tag{6.1}$$

Otrzymujemy średnią wartości X_1 z wagą, która jest prawdopodobieństwem poszczególnych wyników. Taką średnią nazywamy wartością oczekiwaną X_1.

Definicja 6.4. Niech $(\Omega, \mathbb{P})$ będzie dyskretną przestrzenią probabilistyczną. Powiemy, że zmienna losowa X jest *całkowalna*, jeżeli

$$\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| p(\omega) < \infty.$$

Dla całkowalnej zmiennej losowej $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$
jej *wartością oczekiwaną* nazywamy

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)p(\omega).$$

W powyższej definicji, jeżeli $X(\omega_0) = \infty$ oraz $\mathbb{P}[\{\omega_0\}] = 0$ to interpretujemy $X(\omega_0)\mathbb{P}[\{\omega_0\}] = 0$. Niebawem przekonamy się, że powyższa definicja wartości oczekiwanej zadaje dokładnie prawą stronę równania Równanie 6.1.

Przykład 6.8. Wróćmy do eksperymentu czekania na pierwszego orła. Tutaj $\Omega = \{R\}^{\mathbb{N}} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty}\{R\}^k \times \{O\}$. Niech X będzie zmienną losową opisującą liczbę rzutów potrzebnych do otrzymania orła ($X(\omega_k) = k$). Wówczas X jest całkowalna, bo

$$\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|p(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} < \infty$$

oraz $\mathbb{E}X = 2$. Z kolei zmienna zadana przez $Y = 3^X$, innymi słowy $Y(\omega_k) = 3^k$ nie jest całkowalna. Istotnie

$$\sum_{\omega\in\Omega} |Y(\omega)|p(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \infty.$$

Przykład 6.9. Niech X oznacza liczbę otrzymanych oczek przy rzucie jedną wyważoną kością. Wówczas

$$\mathbb{E}[X] = X(1)\frac{1}{6} + X(2)\frac{1}{6} + X(3)\frac{1}{6} + X(4)\frac{1}{6} + X(5)\frac{1}{6} + X(6)\frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Ten przykład pokazuje, że nazwa *wartość oczekiwana* jest niefortunna. Przy rzucie kością nie możemy oczekiwać wyniku 7/2.

Przykład 6.10. Dwaj gracze A i B grają w następującą grę. Rzucają kostką. Niech k będzie wynikiem rzutu. Jeżeli k jest nieparzyste, to A wygrywa k złotych, jeżeli k jest parzyste, to B wygrywa k złotych. Czy gra jest uczciwa?

Niech X oznacza wygraną gracza A podczas jednej rundy, wtedy

$$\mathbb{E}X = 1\cdot\mathbb{P}[X=1] - 2\cdot\mathbb{P}[X=2] + 3\cdot\mathbb{P}[X=3] \\ - 4\cdot\mathbb{P}[X=4] + 5\cdot\mathbb{P}[X=5] - 6\cdot\mathbb{P}[X=6] = -\frac{1}{2}.$$

Jeżeli wykonamy n rzutów i przez X_j oznaczymy wygraną gracza A w $k$tym rzucie, to stan portfela gracza A po n rzutach wyniesie

$$\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Dla dużych wartości n powyższa suma jest w przybliżeniu równa $n\mathbb{E}[X] = -n/2$. Powyższa gra nie jest zatem uczciwa. Z czasem gracz A zacznie tracić duże ilości gotówki co widać na symulacji poniżej. Wykres przedstawia stan portfela gracza A w trakcie rozgrywki.

Fakt 6.1. *Niech $\{x_1, x_2, ...\}$ będzie zbiorem wartości całkowalnej zmiennej losowej X, czyli $X[\Omega] = \{x_k : k \leq T\}$ dla $T \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Wówczas*

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{T} x_k \mathbb{P}[X = x_k].$$

Dowód. Niech $E_k = \{X = x_k\}$. Wówczas E_k są parami rozłączne oraz $\bigcup_{k=1}^{T} E_k = \Omega$ a co za tym idzie

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)p(\omega) = \sum_{k=1}^{T} \sum_{\omega\in E_k} X(\omega)p(\omega).$$

Skorzystaliśmy tutaj z całkowalności zmiennej losowej X: dla szeregu bezwzględnie zbieżnego zmiana kolejności sumowania nie wpływa na jego wartość. Dla $\omega \in E_k$ mamy $X(\omega) = x_k$, więc

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{T} \sum_{\omega\in E_k} x_k p(\omega) = \sum_{k=1}^{T} x_k \sum_{\omega\in E_k} p(\omega).$$

Na koniec skorzystamy z

$$\sum_{\omega\in E_k} p(\omega) = \mathbb{P}[E_k] = \mathbb{P}[X = x_k]$$

aby otrzymać

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{T} x_k \sum_{\omega\in E_k} p(\omega) = \sum_{k=1}^{T} x_k \mathbb{P}[X = x_k].$$

Co było do pokazania □

Przykład 6.11. Rzucamy n razy monetą. Zbadajmy zmienną losową X która jest liczbą otrzymanych orłów. Zakładając, że każdy wynik jest jednakowo prawdopodobny otrzymujemy, dla $k \leq n$,

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} 2^{-n}.$$

Zauważmy, że X jest liczbą sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu $1/2$. Korzystając z Fakt 6.1 otrzymujemy

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}[X=k] = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^{-n} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}2^{-n}$$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}2^{-n} = \frac{n}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}2^{-(n-1)} \overset{(**)}{=} \frac{n}{2}.$$

Skorzystaliśmy tutaj ze wzorów

$$\binom{n}{k} \overset{(*)}{=} \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}, \qquad \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j} \overset{(**)}{=} 2^m$$

dla $1 \leq k \leq n$ oraz $m \geq 0$.

Komentarz 6.1. W poprzednim przykładzie udowodniliśmy wzór

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Ma on bezpośrednią interpretacje kombinatoryczną. Obie strony równości opisują sposób wybrania delegacji wraz z przewodniczącym tejże z grupy n osób. Dla każdego k możemy wybrać k osobową delegację i z nich wybrać przewodniczącego. Możemy też najpierw wybrać przewodniczącego spośród wszystkich n osób a następnie dobrać resztę delegacji spośród pozostałych $n-1$.

Przykład 6.12. Rzucamy wielokrotnie monetą, na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem p. Ile średnio rzutów należy wykonać, aby otrzymać pierwszego orła? Niech X będzie liczbą rzutów potrzebną do otrzymania pierwszego orła. Wówczas

$$\mathbb{P}[X=k] = (1-p)^{k-1}p, \quad k \geq 1.$$

Przypomnijmy, że wówczas X ma rozkład geometryczny. Naszym zadaniem jest wyznaczenie wartości

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p.$$

Dla dowolnego $q \in (0,1)$ mamy

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Różniczkując stronami otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Mnożąc obustronnie przez p i podstawiając $q = 1 - p$ otrzymujemy

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Wartość oczekiwana na dyskretnej przestrzeni probabilistycznej jest zadana przez średnią ważoną. Naturalne więc jest, że dziedziczy wiele jej własności.

Fakt 6.2. *Niech X, Y będą całkowalnymi zmiennymi losowymi. Wówczas dla dowolnych stałych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, zmienna losowa $\alpha X + \beta Y$ jest całkowalna oraz zachodzi wzór*

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}X + \beta \mathbb{E}Y.$$

Zanim zobaczymy dowód powyższego faktu zaznajomimy się z jednym przykładem.

Przykład 6.13. Rozważmy grę, w której rzucamy dwiema dobrze wyważonymi kośćmi. Pierwsza kość jest sześcienna a druga dwudziestościanną. Nasz wynik obliczany jest według następującego wzoru

$$6 \cdot (\text{wynik na pierwszej kości})^2 - 2 \cdot (\text{wynik na drugiej kości}).$$

Jaka jest wartość oczekiwana wyniku? Naszą przestrzenią jest $\Omega = [6] \times [20]$ z jednakowym prawdopodobieństwem dla każdego zdarzenie elementarnego. Rozważmy zmienne losowe

$$X(a, b) = a^2 \qquad Y(a, b) = b.$$

Wtedy wynik zapisuje się jako $Z = 6X - 2Y$. Dla pierwszej zmiennej mamy $\{X = k\} = \{(a, b) : k = a^2\}$ a co za tym idzie

$$\mathbb{P}[X = k^2] = \frac{1}{6}, \qquad k \in [6]$$

oraz $\mathbb{E}[X] = \frac{91}{6}$. Podobnie

$$\mathbb{P}[Y = j] = \frac{1}{20}, \qquad j \in [20]$$

oraz $\mathbb{E}[Y] = \frac{21}{2}$. Fakt 6.2 daje

$$\mathbb{E}[Z] = 6\mathbb{E}[X] - 2\mathbb{E}[Y] = 70.$$

Przykład 6.14. Rzucamy para kości sześciennych. Jaka jest wartość oczekiwana sumy oczek na obu kościach? Jeżeli X to suma oczek na obu kościach, to oczywiście $X = X_1 + X_2$, gdzie X_1 to wynik na pierwszej kości a X_2 to wynik na drugiej kości. Wiemy, że $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 7/2$. Stąd

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + X_2] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 7.$$

Fakt 6.2. Oznaczmy $Z = \alpha X + \beta Y$. Mamy

$$\sum_{\omega\in\Omega} |Z(\omega)|p(\omega) \leq |\alpha| \sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|p(\omega) + |\beta| \sum_{\omega\in\Omega} |Y(\omega)|p(\omega) < \infty$$

co pokazuje, że Z jest całkowalna. Podobnie

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z &= \sum_{\omega\in\Omega} Z(\omega)p(\omega) \\ &= \alpha \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)p(\omega) + \beta \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)p(\omega) \\ &= \alpha\mathbb{E}X + \beta\mathbb{E}Y.\end{aligned}$$

czego należało dowieść. □

Sprawdzimy teraz jak Fakt 6.2 przydaje się w Przykład 6.11.

Przykład 6.15. Wykonujemy n niezależnych prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p w pojedynczej próbie. Niech X oznacza liczbę sukcesów. Zauważmy, że $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, gdzie $X_j = 1$ jeżeli w j-tej próbie był sukces i $X_j = 0$ jeżeli była porażka. Wówczas

$$\mathbb{E}[X_j] = 1 \cdot \mathbb{P}[X_j = 1] + 0 \cdot \mathbb{P}[X_j = 0] = p.$$

Wobec tego

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + ... + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + ... + \mathbb{E}[X_n] = n/2.$$

Zauważmy, że jeżeli X jest zmienną losową a $\varphi\colon \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ to zmienną losową staje się również $Z = \varphi \circ X = \varphi(X)$. Bardzo często przyda nam się sposób na efektywne obliczanie wartości oczekiwanej zmiennej losowej Z.

Fakt 6.3. *Niech $(\Omega, \mathbb{P})$ będzie dyskretną przestrzenią probabilistyczną a X zmienną losową. Niech dodatkowo $\varphi\colon \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ będzie funkcją taką, że zmienna losowa $Z(\omega) = \varphi(X(\omega))$ jest całkowalna. Wówczas*

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{T} \varphi(x_k)\mathbb{P}[X = x_k],$$

gdzie $\{x_j : j \leq T\}$, dla $T \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, jest zbiorem wartości zmiennej losowej X.

Dowód. Z Definicja 6.4

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \mathbb{E}[Z] = \sum_{\omega\in\Omega} \varphi(X(\omega))p(\omega).$$

Podobnie jak w dowodzie Fakt 6.1, dla zbiorów $E_k = \{X = x_k\}$ mamy $\Omega = \bigcup_{k=1}^{T} E_k$ oraz

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_{\omega\in\Omega} \varphi(X(\omega))p(\omega) = \sum_{k=1}^{T} \sum_{\omega\in E_k} \varphi(X(\omega))p(\omega).$$

Tutaj skorzystaliśmy z całkowalności zmiennej Z. Zauważmy, że jeżeli $\omega \in E_k$, to $X(\omega) = x_k$. Korzystając z tej obserwacji możemy napisać

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_{k=1}^{T} \sum_{\omega\in E_k} \varphi(x_k)p(\omega) = \sum_{k=1}^{T} \varphi(x_k) \sum_{\omega\in E_k} p(\omega).$$

Na koniec wystarczy skorzystać z tego, że $\sum_{\omega\in E_k} p(\omega) = \mathbb{P}[E_k] = \mathbb{P}[X = x_k]$ żeby otrzymać

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_{k=1}^{T} \varphi(x_k) \sum_{\omega\in E_k} p(\omega) = \sum_{k=1}^{T} \varphi(x_k)\mathbb{P}[X = x_k].$$

Czego należało dowieść. □

Przykład 6.16. Rzucamy n krotnie symetryczną monetą. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych orłów. Ile wynosi $\mathbb{E}[X^2]$? Przypomnijmy, że X będzie miało rozkład dwumianowy

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} 2^{-n}.$$

Szukana przez nas wielkość to

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

Wychodząc od wzoru dwumianowego

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

i różniczkując względem x

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} y^{n-k}$$

Mnożąc przez x i różniczkując względem x

$$n(x+y)^{n-1} + n(n-1)(x+y)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 x^{k-2} y^{n-k}$$

Fakt 6.4. *Niech $(\Omega, \mathbb{P})$ będzie dyskretną przestrzenią probabilistyczną. Wówczas*

(i) Jeżeli X jest zmienną losową taką, że dla pewnej stałej $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $X(\omega) = a$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$, to

$$\mathbb{E}[X] = a.$$

(ii) Jeżeli X i Y są całkowalnymi zmiennymi losowymi takimi, że $X(\omega) \leq Y(\omega)$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$, to

$$\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y].$$

Dowód. Jeżeli $X(\omega) = a$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$, to

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} ap(\omega) = a \cdot \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = a \cdot 1 = a.$$

Jeśli natomiast $X(\omega) \leq Y(\omega)$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$, to

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\omega) \leq \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)p(\omega) = \mathbb{E}[Y].$$

Co dowodzi drugiej własności. □

Przykład 6.17. Tasujemy talię 52 kart metodą *Top to random*, tzn. kartę, która znajduje się na górze wkładamy w losowe miejsce w talii (są 52 możliwości), a następnie powtarzamy czynność. Ile należy wykonać tasowań, aby można było uznać talię za potasowaną. Jaka jest średnia liczba tasowań?

Kluczowa jest karta, która początkowo znajduje się na samym dole talii. Oznaczmy ją przez A. Zauważmy, że w trakcie tasowania będzie się ona przemieszczać powoli do góry talii. Prawdopodobieństwo, że w pierwszym ruchu karta z góry talii znajdzie się pod A wynosi $1/52$. Jest ono małe, ale z prawdopodobieństwem 1 (Lemat Borela-Cantellego) nastąpi moment, gdy pod A znajdzie się jakaś karta, oznaczmy ją przez K_1.

Po wykonaniu losowej liczby tasowań kolejna karta K_2 zostanie wstawiona poniżej A. Wzajemne ułożenie kart K_1 i K_2 jest losowe (tzn. z prawdopodobieństwem $1/2$ karta K_1 jest nad K_2 i na odwrót). Kontynuując to rozumowanie w pewnej chwili pod A będzie znajdować się k kart:

$K_1, \dots K_k$. Każde ułożenie tychże kart jest tak samo prawdopodobne (indukcja!). Zatem karty pod A są dobrze potasowane.

Karta A dotrze w końcu na sam szczyt talii i to właśnie ona zostanie wstawiona. W tej chwili wszystkie karty będą dobrze potasowane (każde ich wzajemne ułożenie jest jednakowo prawdopodobne).

Obliczmy ile czasu potrzebuje karta A, aby dotrzeć na górę talii. Niech X_i oznacza czas jaki karta A spędza na i-tej pozycji od dołu. Prawdopodobieństwo, że karta wstawiona zostanie poniżej A wynosi $1/52$. Czas oczekiwania na sukces X_1, zgodnie z poprzednim przykładem jest zmienną losową o rozkładzie Geom$(1/52)$, zatem $\mathbb{E}X_1 = 52$. Podobnie dla każdego i: $\mathbb{E}X_i = 52/i$. Podsumowując

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{52} X_i &= \sum_{i=1}^{52} \mathbb{E}X_i \\ &= \sum_{i=1}^{52} \frac{52}{i} = 52 \sum_{i=1}^{52} \frac{1}{i} \\ &\sim 52(\log 52 + \gamma) \sim 235,\end{aligned}$$

gdzie γ jest stałą Eulera–Mascheroniego znaną z wykładu z analizy ($\gamma \sim 0,577$).

```
//| echo: false

top2random = {
  const totalCards = 52;
  const trackedCard = 52;
  const maxSteps = 1000;
  const fps = 15;

  const root = html`<div class="top2random-sim">
    <style>
      .top2random-sim {
        display: flex;
        align-items: flex-start;
        gap: 1.5rem;
        flex-wrap: wrap;
        color: var(--bs-body-color);
        margin: 1rem 0;
      }

      .top2random-stack {
        width: 160px;
        padding: 20px 0;
```

```
    display: flex;
    flex-direction: column;
    align-items: center;
    gap: 1px;
    background: var(--bs-secondary-bg);
    border: 1px solid var(--bs-border-color);
    border-radius: 8px;
  }

  .top2random-card {
    width: 50px;
    height: 12px;
    border-radius: 3px;
    box-sizing: border-box;
    background: color-mix(
      in srgb,
      var(--bs-primary) 35%,
      var(--bs-body-bg)
    );
    color: var(--bs-body-color);
    text-align: center;
    line-height: 12px;
    font-size: 10px;
    font-variant-numeric: tabular-nums;
  }

  .top2random-card.tracked {
    background: color-mix(
      in srgb,
      var(--bs-warning) 45%,
      var(--bs-body-bg)
    );
    outline: 1px solid var(--bs-warning);
    font-weight: bold;
  }

  .top2random-controls {
    display: flex;
    flex-direction: column;
    gap: 0.75rem;
    align-items: flex-start;
  }
```

```
    .top2random-counter {
      font-variant-numeric: tabular-nums;
      font-weight: 600;
    }

    .top2random-status {
      max-width: 230px;
      font-size: 0.9rem;
      opacity: 0.8;
    }
  </style>

  <div class="top2random-stack"></div>

  <div class="top2random-controls">
    <button class="btn btn-primary" type="button">
      Resetuj
    </button>
    <div class="top2random-counter">Kroki: 0</div>
    <div class="top2random-status"></div>
  </div>
</div>`;

const stack = root.querySelector(".top2random-stack");
const button = root.querySelector("button");
const counter = root.querySelector(".top2random-counter");
const status = root.querySelector(".top2random-status");

let deck = [];
let steps = 0;
let running = true;

const cards = Array.from({ length: totalCards }, () => {
  const card = document.createElement("div");
  card.className = "top2random-card";
  stack.appendChild(card);
  return card;
});

function render() {
  for (let i = 0; i < totalCards; i++) {
    cards[i].textContent = deck[i];
```

```
    cards[i].classList.toggle(
      "tracked",
      deck[i] === trackedCard
    );
  }

  counter.textContent = `Kroki: ${steps}`;
}

function resetDeck() {
  deck = Array.from(
    { length: totalCards },
    (_, i) => i + 1
  );
  steps = 0;
  running = true;
  status.textContent = "";
  render();
}

function topToRandom() {
  const topCard = deck.shift();
  const randIndex = Math.floor(
    Math.random() * (deck.length + 1)
  );
  deck.splice(randIndex, 0, topCard);
}

function tick() {
  if (!running) return;

  if (deck[0] === trackedCard) {
    running = false;
    status.textContent =
      `Karta ${trackedCard} dotarła na szczyt po ${steps} krokach.`;
    return;
  }

  if (steps >= maxSteps) {
    running = false;
    status.textContent =
      `Osiągnięto limit ${maxSteps} kroków.`;
```

```
      return;
    }

    topToRandom();
    steps++;
    render();

    if (deck[0] === trackedCard) {
      running = false;
      status.textContent =
        `Karta ${trackedCard} dotarła na szczyt po ${steps} krokach.`;
    }
  }

  button.addEventListener("click", resetDeck);

  resetDeck();

  const timer = setInterval(tick, 1000 / fps);

  invalidation.then(() => {
    clearInterval(timer);
  });

  return root;
}
```

6.3 Wariancja

Za każdym razem kiedy dokonujemy takiego przybliżenia warto jest znać jego błąd. Wartość oczekiwana nie jest tutaj wyjątkiem. W przyszłości bardzo istotna będzie dla nas informacja jak bardzo zmienna losowa X różni się od swojej wartości oczekiwanej $\mathbb{E}X$.

Definicja 6.5. *Wariancję* zmiennej losowej X definiujemy przez

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2].$$

Definicja 6.5, na dyskretnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathbb{P})$ zachodzi wzór

$$\mathbb{V}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) - \mathbb{E}X)^2 p(\omega). \tag{6.2}$$

Przykład 6.18. Przypuśćmy, że właśnie otrzymaliśmy propozycję nie do odrzucenia; ktoś podarował nam dwa losy na pewną loterię. Wygrane mierzymy w milionach dolarów i zakładamy niezależność różnych losowań. Organizatorzy loterii sprzedają 100 losów na cotygodniowe losowanie. Każdy z losów jest wybierany w jednorodnym procesie losowym, to znaczy, że każdy los może być wybrany z takim samym prawdopodobieństwem—i szczęśliwy właściciel wybranego losu wygrywa sto milionów dolarów. Pozostałe 99 losów nic nie wygrywa.

Możemy teraz wykorzystać nasz prezent na dwa sposoby: albo kupujemy dwa losy na to samo losowanie, albo kupimy po jednym losie na dwa różne losowania. Która strategia jest lepsza? Jeżeli przez X oznaczymy wygraną dla pierwszej strategii, to

$$\mathbb{E}X = 0 \cdot \frac{98}{100} + 100 \cdot \frac{2}{100} = 2.$$

Dla drugiej strategii Y otrzymujemy

$$\mathbb{E}Y = 0 \cdot \frac{99}{100} + 100 \cdot \frac{1}{100} + 0 \cdot \frac{99}{100} + 100 \cdot \frac{1}{100} = 2.$$

Wartości oczekiwane są takie same. Mimo to obydwie strategie wyglądają różnie. Nie patrzmy jednak na wartości oczekiwane i przeanalizujmy dokładnie rozkłady zmiennych losowych X oraz Y

	0	100	200
X	$0,98$	$0,02$	0
Y	$0,9801$	$0,0198$	$0,0001$

Wariancja ma służyć właśnie do analizy pojęcia rozproszenia zmiennej losowej. W przypadku X wariancja wynosi

$$\mathbb{V}[X] = 0{,}98 \cdot (0-2)^2 + 0,02 \cdot (100-2)^2 = 196$$

a w przypadku Y

$$\mathbb{V}[Y] = 0{,}9801 \cdot (0-2)^2 + 0{,}0198 \cdot (100-2)^2 + 0,0001 \cdot (200-2)^2 = 198$$

Tak jak oczekiwaliśmy, druga wariancja jest odrobinę większa, ponieważ rozkład losowy w przypadku Y jest odrobinę bardziej rozproszony.

Wzór Równanie 6.2 jest w praktyce nieporęczny. Okazuje się, że $\mathbb{V}[X]$ można wyrazić w zgrabny sposób, który jest dodatkowo wygodny w rachunkach.

Fakt 6.5. *Niech X będzie całkowalną zmienną losową. Wówczas*

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}X)^2. \tag{6.3}$$

Dowód. Oznaczmy $m = \mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}\left[X^2 - 2Xm + m^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[2mX] + \mathbb{E}\left[m^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2m\mathbb{E}[X] + m^2 = \mathbb{E}\left[X^2\right] - m^2\end{aligned}$$

co jest jednoznaczne z naszą tezą. □

Przykład 6.19. Niech X oznacza liczbę uzyskanych orłów w serii n rzutów symetryczną monetą. Wiemy, że $\mathbb{E}[X] = \frac{n}{2}$ oraz $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{n(n+1)}{4}$ a co za tym idzie

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{n}{4}.$$

Wniosek 6.1. *Niech X będzie całkowalną zmienną losową. Wówczas zachodzi nierówność*

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] \geq (\mathbb{E}X)^2.$$

Dowód. Jako, że X przyjmuje wartości rzeczywiste, $(X(\omega) - \mathbb{E}X)^2 \geq 0$ a co za tym idzie

$$\mathbb{V}[X] = \sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega) - \mathbb{E}X)^2\mathbb{P}[\{\omega\}] \geq 0.$$

Z drugiej strony $0 \leq \mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}X)^2$, co pociąga naszą tezę. □

Twierdzenie 6.1 (Nierówność Czebyszewa)**.** *Niech $(\Omega, \mathbb{P})$ będzie dyskretną przestrzenią probabilistyczną. Dla całkowalnej zmiennej losowej X i dowolnej stałej $c > 0$ zachodzi*

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}X| \geq c] \leq \frac{\mathbb{V}X}{c^2}.$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}X &= \sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega) - \mathbb{E}X)^2\mathbb{P}[\{\omega\}] \geq \sum_{|X(\omega)-\mathbb{E}X|\geq c}(X(\omega) - \mathbb{E}X)^2\mathbb{P}[\{\omega\}] \\ &\geq c^2 \sum_{|X(\omega)-\mathbb{E}X|\geq c}\mathbb{P}[\{\omega\}] \geq c^2\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}X| \geq c].\end{aligned}$$

□

References

John, Tierney. 1991. „Behind Monty Hall's doors: puzzle, debate and answer". *The New York Times* 21. https://www.nytimes.com/1991/07/21/us/behind-monty-hall-s-doors-puzzle-debate-and-answer.html.

Część II

Listy zadań

Lista 1. Przestrzenie zdarzeń elementarnych

Zadania na ćwiczenia 8.10.2026

1. Rzucamy kością sześcienną, a następnie dwukrotnie monetą.

   a) Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω, która zachowuje informację o wyniku każdego rzutu. Ile ma ona elementów?
   b) Zapisz jako podzbiory Ω następujące zdarzenia:
      - A: na kości wypadła szóstka, a na monecie co najmniej jeden orzeł;
      - B: na kości wypadła liczba parzysta, a w drugim rzucie monetą orzeł;
      - C: na kości wypadła liczba mniejsza niż 5, a na monecie co najmniej jeden orzeł.
   c) Przyjmij, że wszystkie wyniki elementarne są jednakowo prawdopodobne. Oblicz $\mathbb{P}[A]$, $\mathbb{P}[B]$ i $\mathbb{P}[C]$.

2. Za jednymi z czworga drzwi znajduje się samochód, a za pozostałymi kozy. Uczestnik wybiera jedne drzwi z jednakowym prawdopodobieństwem. Prowadzący zna położenie samochodu i otwiera jedne z niewybranych drzwi, za którymi jest koza. Jeśli ma kilka możliwości, wybiera spośród nich z jednakowym prawdopodobieństwem. Zawsze proponuje zmianę wyboru.

   a) Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej, jeśli uczestnik pozostaje przy swoim wyborze?
   b) Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej, jeśli uczestnik zmienia wybór na jedne z dwojga pozostałych zamkniętych drzwi, wybierając między nimi z jednakowym prawdopodobieństwem?

3. Rzucamy dwiema rozróżnialnymi kośćmi sześciennymi. Każda uporządkowana para wyników ma prawdopodobieństwo 1/36.

   a) Opisz przestrzeń wyników, gdy zapisujemy wynik każdej kości osobno.
   b) Opisz przestrzeń wyników, gdy zapisujemy tylko sumę oczek.
   c) W drugim modelu oblicz prawdopodobieństwa wyników 2, 7 i 12. Czy wszystkie możliwe sumy są jednakowo prawdopodobne?
   d) Wybierz wygodniejszy z tych modeli i oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek wyniesie co najmniej 10.

4. Losujemy jedną liczbę ze zbioru $\Omega = \{1, 2, \ldots, 24\}$; każda liczba ma takie samo prawdopodobieństwo. Niech A oznacza zdarzenie, że wylosowana liczba jest podzielna przez 2, a B że jest podzielna przez 3.

   a) Wypisz zbiory A, B, $A \cap B$, $A \cup B$ oraz $A \setminus B$.
   b) Zapisz za pomocą A, B i działań na zbiorach zdarzenia, że wylosowana liczba jest podzielna:
      - przez co najmniej jedną z liczb 2 i 3;
      - przez obie te liczby;
      - przez dokładnie jedną z tych liczb;
      - przez żadną z tych liczb.
   c) Oblicz prawdopodobieństwo każdego ze zdarzeń z punktu b).
   d) Niech C oznacza podzielność przez 6. Które ze zdarzeń A, B, C pociągają inne? Zapisz odpowiednie inkluzje.

5. Generator zwraca jedną z liczb $1, 2, \ldots, 6$. Prawdopodobieństwo otrzymania liczby k ma postać

$$p(k) = ck, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, 6\},$$

   gdzie c jest stałą.

   a) Wyznacz c.
   b) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby parzystej, liczby co najmniej 5 oraz liczby mniejszej niż 3.
   c) Wyjaśnij, dlaczego w tym modelu iloraz $|A|/|\Omega|$ nie musi być równy $\mathbb{P}[A]$. Podaj przykład zdarzenia, dla którego te wartości są różne.

6. Rzucamy monetą do otrzymania pierwszego orła. Uwzględniamy również wynik $\omega_\infty = RRR\ldots$, w którym orzeł nigdy nie wypada. Przyjmujemy model

$$p(R^{k-1}O) = 2^{-k} \quad (k \geq 1), \qquad p(\omega_\infty) = 0,$$

   gdzie $R^{k-1}O$ oznacza $k-1$ reszek, po których następuje orzeł.

   a) Oblicz prawdopodobieństwo zakończenia doświadczenia najpóźniej w trzecim rzucie.
   b) Oblicz prawdopodobieństwo, że pierwszy orzeł pojawi się w rzucie o numerze parzystym.

7. Niech $\mathbb{P}$ będzie miarą probabilistyczną na przestrzeni co najwyżej przeliczalnej. Uzasadnij następujące własności dla dowolnych zdarzeń A i B:

   a) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$ oraz $\mathbb{P}[\Omega] = 1$;
   b) $\mathbb{P}[A'] = 1 - \mathbb{P}[A]$;
   c) jeśli $A \subseteq B$, to $\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$;
   d) $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$.

8. Za jednymi z $n \geq 3$ drzwi znajduje się samochód, a za pozostałymi kozy. Uczestnik wybiera jedne drzwi z jednakowym prawdopodobieństwem. Prowadzący zna położenie samochodu i zawsze otwiera dokładnie r różnych drzwi z kozami, spośród drzwi niewybranych przez uczestnika, gdzie $1 \leq r \leq n-2$. Jeśli ma kilka możliwości, wybiera zestaw otwieranych drzwi z jednakowym prawdopodobieństwem. Zawsze proponuje zmianę.

   a) Oblicz prawdopodobieństwo wygranej przy pozostaniu przy pierwotnym wyborze.
   b) Uczestnik zmienia wybór na jedne z pozostałych zamkniętych, niewybranych wcześniej drzwi, losując między nimi z jednakowym prawdopodobieństwem. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej w zależności od n i r.
   c) Dla $n = 100$ porównaj sytuacje $r = 1$ i $r = 98$. W której z nich zmiana wyboru daje większą szansę wygranej?

Lista 2. Prawdopodobieństwo klasyczne

Zadania na ćwiczenia 15.10.2026

1. W pudełku jest 6 śrubek dobrych i 2 złe. Jaka jest szansa, że przy wyborze 4 śrubek wybierze się 3 dobre i 1 złą?
2. Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ umieszczono 8 nierozróżnialnych wież, w taki sposób aby żadne dwie się nie biły. Na ile sposobów można to zrobić? Jak zmieni się wynik, gdy wieże będą rozróżnialne?
3. Na ile sposobów można rozmieścić n kul w k urnach jeżeli:

   a. kule są rozróżnialne,
   b. kule są nierozróżnialne.

4. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w potasowanej talii 52 kart wszystkie cztery asy znajdują się koło siebie.
5. W klasie jest 15 uczniów. Na każdej lekcji odpytywany jest losowo jeden z nich. Oblicz prawdopodobieństwo, że podczas 16 lekcji zostanie przepytany każdy z nich.
6. Grupa składająca się z $2n$ pań i $2n$ panów została podzielona na dwie równoliczne grupy. Znaleźć prawdopodobieństwo, że każda z tych grup składa się z takiej samej liczby pań i panów. Przybliżyć to prawdopodobieństwo za pomocą wzoru Stirlinga.
7. Uzasadnij, że dla dowolnego n i dowolnego j,

$$\binom{n}{j} + \binom{n}{j+1} = \binom{n+1}{j+1}.$$

   Czy potrafisz to zrobić bez wykonywania obliczeń? Zsumuj

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{j}$$

   gdzie $m, n, j \in \mathbb{N}$ są liczbami naturalnymi. Zapisz k^2 jako $a_2\binom{k}{2}+a_1\binom{k}{1}+a_0\binom{k}{0}$. Wykorzystaj to do policzenia $\sum_{k=0}^{n} k^2$

8. Wachlarzem rzędu n nazywamy graf o wierzchołkach $\{0, 1, \ldots, n\}$ z $2n-1$ krawędziami zdefiniowanymi następująco: wierzchołek 0 połączony jest krawędzią z każdym z pozostałych wierzchołków i wierzchołek k połączony jest krawędzią z wierzchołkiem $k+1$ dla każdego $1 \leq k < n$. Przyjmując $S_0 = 0$, ile wynosi S_n liczba drzew rozpinających na takim grafie? Drzewem rozpinającym nazywamy spójny podgraf bez cykli zawierający wszystkie wierzchołki. Dla przykładu wachlarz rzędu 5 wygląda następująco

Lista 3. Prawdopodobieństwo warunkowe

Zadania na ćwiczenia 22.10.2026

Zadania na ćwiczenia

1. Dwoje graczy, Maciek i Dawid, dostało po 13 kart z 52. Obliczyć prawdopodobieństwo, że Maciek nie ma asa jeżeli Maciek zobaczył przypadkowo u Dawida

   a. asa pik,
   b. jakiegoś asa czarnego koloru,
   c. jakiegoś asa.

2. Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek?

3. Podaj przykłady zdarzeń takich, że

   a. $\mathbb{P}[A|B] < \mathbb{P}[A]$,
   b. $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$
   c. $\mathbb{P}[A|B] > \mathbb{P}[A]$.

4. Mamy dwie urny i 50 kul. Połowa z kul jest biała, a połowa czarna. Jak rozłożyć kule do urn, aby zmaksymalizować prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrana kula z losowej urny jest biała (najpierw losujemy urnę, a potem z wybranej urny losujemy kulę)?

5. Naczelnik więzienia postanowił uwolnić jednego z trzech więźniów, o czym dowiedzieli się zainteresowani, ale nie dowiedzieli się, który z nich będzie wolny. Więzień A ma wśród strażników znajomego, który to wie. Chce go zapytać, ale krępuje się pytać o siebie. Pyta więc o imię jednego z więźniów (różnego od niego), który ma pozostać w więzieniu. Przed zadaniem pytania ocenia, że każdy z nich ma szansę wyjścia równą 1/3. Myśli, że jeśli strażnik powie na przykład, że zostaje B, to jego szanse rosną do 1/2 (bo zostanie uwolniony A lub C). Czy popełnia błąd?

6. Podaj przykład zdarzeń A, B i C, dla których

$$\mathbb{P}[A \mid B] < \mathbb{P}[A \mid B^c],$$

a jednocześnie

$$\mathbb{P}[A \mid B \cap C] \geq \mathbb{P}[A \mid B^c \cap C],$$
$$\mathbb{P}[A \mid B \cap C^c] \geq \mathbb{P}[A \mid B^c \cap C^c].$$

Słownie można sformułować paradoks w następujący sposób: może się zdarzyć, że w mieście X umieralność chorych na gruźlicę jest większa niż w mieście Y, a jednocześnie zarówno wśród kobiet, jak i wśród mężczyzn chorych na gruźlicę umieralność jest większa w mieście Y.

7. Przypuśćmy, że 1/20 wszystkich kości do gry jest sfałszowana i zawsze wypada na nich szóstka. Wybieramy losowo trzy kostki i rzucamy nimi. Oblicz

   a. prawdopodobieństwo wyrzucenia w sumie 18 oczek;
   b. prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna kostka była sfałszowana, jeżeli wyrzuciliśmy 18 oczek;

8. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeżeli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów. Również nie-dyslektyk może popełnić co najmniej 6 błędów i dzieje się to z prawdopodobieństwem $0,1$. Jasiu popełnił 6 błędów. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest dyslektykiem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w kolejnym teście też popełni co najmniej 6 błędów?

Zadania kartkówkowe

1. W pierwszej urnie znajdują się 3 kule białe i 1 czarna, a w drugiej 1 kula biała i 1 czarna. Losujemy jedną z urn z jednakowym prawdopodobieństwem, a następnie jedną kulę z wybranej urny.

   a. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli?

   b. Wylosowano białą kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z pierwszej urny?

   Odpowiedź

   a. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

   b. $\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}$

2. Mamy dwie kostki. Pierwsza jest standardową symetryczną kostką sześcienną, natomiast na drugiej ściankach znajdują się liczby $1, 2, 3, 6, 6, 6$. Losujemy jedną z kostek z jednakowym prawdopodobieństwem i wykonujemy nią jeden rzut.

   a. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstki?

b. Wypadła szóstka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucano drugą kostką?

Odpowiedź

a. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

b. $\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

3. W pewnej skrzynce pocztowej 20% wiadomości stanowi spam. Filtr antyspamowy poprawnie rozpoznaje wszystkie wiadomości będące spamem, ale błędnie oznacza jako spam również 25% zwykłych wiadomości.

   a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana wiadomość zostanie oznaczona jako spam?

   b. Wiadomość została oznaczona jako spam. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzeczywiście jest spamem?

   Odpowiedź

   a. $0{,}2 \cdot 1 + 0{,}8 \cdot 0{,}25 = 0{,}4$

   b. $\frac{0{,}2 \cdot 1}{0{,}4} = \frac{1}{2}$

4. Fabryka produkuje śrubki na dwóch maszynach. Maszyna A produkuje 75% wszystkich śrubek, a maszyna B pozostałe 25%. Wśród śrubek produkowanych przez maszynę A 10% jest wadliwych, a wśród śrubek produkowanych przez maszynę B 30% jest wadliwych.

   a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana śrubka jest wadliwa?

   b. Wylosowano wadliwą śrubkę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że została wyprodukowana przez maszynę B?

   Odpowiedź

   a. $0{,}75 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$

   b. $\frac{0{,}25 \cdot 0{,}3}{0{,}15} = \frac{1}{2}$

Lista 4. Niezależność zdarzeń

Zadania na ćwiczenia 29.10.2026

Zadania na ćwiczenia

1. Maciek rzuca dwiema kośćmi. Pierwsza kość jest dobrze wyważona. Na drugiej kości szóstka wypada dwa razy częściej niż każda z pozostałych liczb, przy czym wszystkie pozostałe wyniki są jednakowo prawdopodobne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie większa niż 10?

2. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania

   a. 6 oczek co najmniej raz?
   b. 5 oczek dokładnie 3 razy?

3. W meczu piłki nożnej z prawdopodobieństwem 1/6 wygrywają goście, z prawdopodobieństwem 1/2 gospodarze, a z prawdopodobieństwem 1/3 będzie remis. Obliczyć prawdopodobieństwo, że

   a. w 10 meczach będzie 6 zwycięstw gospodarzy i 4 remisy
   b. w 14 meczach będzie 7 zwycięstw gospodarzy i 3 remisy.

4. Adam, Bolek i Czesio rzucają po kolei monetą. Wygrywa ten, który pierwszy wyrzuci orła. Znaleźć szanse wygranej dla każdego z nich.

5. Wykonujemy dwa eksperymenty: rzucamy kością, na której liczby parzyste wypadają dwa razy częściej niż liczby nieparzyste (wszystkie parzyste są tak samo prawdopodobne i wszystkie nieparzyste są tak samo prawdopodobne) i losujemy liczbę ze zbioru $\{1, 2, \dots, 10\}$. Skonstruuj przestrzeń probabilistyczną opisująca wykonanie tych eksperymentów niezależnie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma otrzymanych liczb jest mniejsza niż 5?

6. Rozważmy zdarzenia A_1, ..., A_n. Dla $\epsilon_j \in \{0, 1\}$ niech

$$A_j^{\epsilon_j} = \begin{cases} A_j & \epsilon_j = 0 \\ A_j^c & \epsilon_j = 1 \end{cases} .$$

Pokaż, że $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sa niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wyboru $\epsilon_1, \ldots \epsilon_n$, $A_1^{\epsilon_1}, \ldots A_n^{\epsilon_n}$ są niezależne.

7. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_{2026}$ są niezależne i mają jednakowe prawdopodobieństwo p. Jaka jest szansa, że zajdzie dokładnie jedno?

8. Student musi poprawić oceny niedostateczne z dwóch przedmiotów. Szansa poprawienia oceny z pierwszego przedmiotu w jednej próbie wynosi p, a z drugiego — q. Żeby móc poprawić drugą ocenę, trzeba najpierw poprawić pierwszą. Poszczególne próby poprawiania są niezależne. Wiadomo, że po piętnastu próbach poprawiania oceny student jeszcze nie poprawił oceny z drugiego przedmiotu. Jaka jest szansa – pod tym warunkiem – że nie poprawił jeszcze oceny z pierwszego przedmiotu?

9. Pewien matematyk nosi w kieszeniach (lewej i prawej) po jednym pudełku zapałek. Ilekroć chce zapalić papierosa, sięga do losowo wybranej kieszeni. Jaka jest szansa, że gdy po raz pierwszy wyciągnie puste pudełko, w drugim będzie k zapałek ($k = 0, 1, 2, \ldots, m$, gdzie m jest liczbą zapałek w pełnym pudełku; zakładamy, że w chwili początkowej matematyk ma dwa pełne pudełka)?

10. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w jednej próbie równym p.

Zadania kartkówkowe

1. Rzucamy czterokrotnie symetryczną kostką. Zakładamy, że wyniki kolejnych rzutów są niezależne.

   a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że szóstka wypadnie co najmniej raz?

   b. Jakie jest prawdopodobieństwo, że szóstka wypadnie dokładnie dwa razy?

   Odpowiedź

   a. $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296}$

   b. $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$

2. W meczu piłki nożnej gospodarze wygrywają z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, goście z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$, a remis pada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Rozpatrujemy trzy niezależne mecze.

   a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że gospodarze wygrają wszystkie trzy mecze?

   b. Jakie jest prawdopodobieństwo, że gospodarze wygrają dokładnie dwa mecze, a trzeci zakończy się remisem?

   Odpowiedź

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b. $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

3. Komputer składa się z dwóch podzespołów A i B. Podzespół A ulega awarii z prawdopodobieństwem 0,2, natomiast podzespół B z prawdopodobieństwem 0,3. Zakładamy, że awarie obu podzespołów są niezależne.

   a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żaden z podzespołów nie ulegnie awarii?

   b. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie jeden z podzespołów ulegnie awarii?

   Odpowiedź

   a. $0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$

   b. $0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}38$

4. Rzucamy symetryczną monetą i symetryczną kostką. Wyniki obu eksperymentów są niezależne.

   a. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na monecie wypadnie orzeł, a na kostce szóstka?

   b. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na monecie wypadnie orzeł lub na kostce szóstka (dopuszczamy jednoczesne wystąpienie obu zdarzeń)?

   Odpowiedź

   a. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

   b. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

Lista 5. Zmienne losowe

Na ćwiczenia 5.11.2026

Zadania na ćwiczenia

1. Losujemy bez zwracania dwie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Niech X będzie sumą wylosowanych liczb. Wyznacz rozkład oraz wartość oczekiwaną X.
2. Oblicz $\mathbb{E}[X]$ jeżeli X jest zmienną o rozkładzie $\mathrm{Poi}(\lambda)$.
3. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $\{1, 2, \dots n\}$, czyli

$$\mathbb{P}[X = j] = \frac{1}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

   Obliczyć $\mathbb{E}[Y]$ jeżeli

   a. $Y = e^X$,
   b. $Y = X^2$.

4. Monika wybrała się do kasyna w Las Vegas mając przy sobie 255\$. Jako cel postawiła sobie wygranie 1 dolara w ruletkę i wyjście z kasyna z kwotą 256\$. Podczas tej wizyty obstawiała kolory. Wszystkie pola poza 0 i 00 są czerwone lub czarne (po 18 pól). Poprawne wskazanie koloru (z prawdopodobieństwem 18/38) podwaja zaryzykowaną kwotę. Monika zastosowała następującą strategię: postanowiła, że będzie grać kolejno o 1\$, 2\$, 4\$, 8\$, 16\$, 32\$, 64\$, 128\$. Jeżeli w jednej z gier wygra, zabiera nagrodę i opuszcza kasyno z 256 dolarami. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jej się powiodło. Obliczyć wartość oczekiwaną wygranej.
5. Uzasadnij, że

   a. Jeżeli $X(\omega) = a$ dla pewnej $a \in \mathbb{R}$ i wszystkich $\omega \in \Omega$, to $\mathbb{E}[X] = a$.
   b. Jeżeli zmienne losowe X i Y spełniają $X(\omega) \leq Y(\omega)$ dla każdej $\omega \in \Omega$, to $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.

6. Rzucamy kostką tak długo, aż wyrzucimy wszystkie oczka. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

7. Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów w taki sposób, że żadne trzy nie są współliniowe. Każda para punktów, niezależnie od pozostałych, została połączona odcinkiem z prawdopodobieństwem p. Niech X oznacza liczbę powstałych trójkątów. Oblicz $\mathbb{E}X$.

8. W urnie znajduje się 50 białych kul. Losujemy ze zwracaniem po jednej kuli, przy czym wyciągniętą kulę malujemy na czerwono, jeśli jest biała. Niech X będzie liczbą czerwonych kul w urnie po 20 losowaniach. Obliczyć $\mathbb{E}[X]$.

9. Pokaż, że jeżeli zmienna losowa X przyjmuje tylko wartości całkowite nieujemne, to

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k].$$

Zadania kartkówkowe

1. Rzucamy niezależnie symetryczną sześcienną kostką aż do otrzymania pierwszej jedynki. Zmienna losowa X oznacza liczbę wykonanych rzutów, łącznie z rzutem, w którym wypadła pierwsza jedynka.

   a. Znajdź $\mathbb{E}[X]$.
   b. Niech $Y = 2^{-X}$. Znajdź $\mathbb{E}[Y]$.

2. Rzucamy niezależnie dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami. Zmienna losowa X oznacza większy z uzyskanych wyników.

   a. Znajdź $\mathbb{E}[X]$.
   b. Niech $Y = (-1)^X$. Znajdź $\mathbb{E}[Y]$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{k}{21}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 6.$$

   a. Znajdź $\mathbb{E}[X]$.
   b. Niech $Y = \frac{1}{X}$. Znajdź $\mathbb{E}[Y]$.

4. Rzucamy trzykrotnie symetryczną monetą. Rzuty są niezależne. Zmienna losowa X oznacza liczbę uzyskanych orłów.

   a. Znajdź $\mathbb{E}[X]$.
   b. Niech $Y = 2^X$. Znajdź $\mathbb{E}[Y]$.